MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 43/1984

Arbeitsgemeinschaft Geyer-Harder über

4-Mannigfaltigkeiten

7.10. bis 13.10.1984

Die Tagung fand unter der Leitung von Herrn Kreck (Mainz) und Herrn Singhof (Köln) statt. Ziel war es, einen auch für nicht-Spezialisten verständlichen Überblick über die aufsehenerregenden Ergebnisse von M. Freedman und S. Donaldson und ihre Anwendung auf exotische $\mathbb{R}^4$'s zu geben.

Um die Resultate in Dimension 4 einschätzen zu können, wurde zunächst über die Klassifikation differenzierbarer Strukturen in höheren Dimensionen und über den Beweis des wichtigsten Werkzeuges, des h-Kobordismussatzes, berichtet. Daran wurde erläutert, welche spezifischen Probleme in der Dimension 4 auftreten, insbesondere welche Rolle der Whitney Trick spielt. Nach der Vorstellung "klassische" Resultate in Dimension 4 wurde dann der für Freedmans Arbeit grundlegende Apparat der Casson Henkel vorgestellt. Wir haben anschliessend einen Bericht über den technisch sehr komplizierten Beweis von Freedmans Hauptresultat gehört, daß ein Casson Henkel homöomorph zum Standardhenkel ist. Mit Hilfe dieses Resultates ist es möglich, die Methoden aus den höheren Dimensionen auf die topologische Klassifikation 1-zusammenhängender 4-Mannigfaltigkeiten auszudehnen.

Der zweite Teil der Tagung beschäftigte sich mit dem Satz von S. Donaldson, der besagt, daß wenn die Schnittform einer differenzierbaren 4-Mannigfaltig-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

keit positiv definit ist, es sich um die standard Euklidische Form handelt. Dieses Resultat sollte auf dem Hintergrund von Freedmans Ergebnis gesehen werden, daß jede unimodulare symmetrische Form durch eine topologische Mannigfaltigkeit realisiert werden kann. Naturgemäß benötigt man zum Beweis des Satzes von Donaldson analytische Methoden, genauer differentialgeometrische. Wir haben zunächst einen Vortrag über die benötigten differentialgeometrischen Grundlagen gehört. Anschließend haben wir über den Modulraum der Yang-Mills Gleichung, insbesondere seine lokale Struktur, berichtet. Der Modulraum hat i.a. zwei Arten von Singularitäten, das eine sind Kegel über $\mathbb{C}P^2$, das andere sind Singularitäten, die generisch durch Störung verschwinden. Darüber und über die Orientierbarkeit des Modulraumes wurde berichtet. Der technisch aufwendigste Teil von Donaldsons Beweis ist die Kompaktifizierung des Modulraums durch die zugrundeliegende 4-Mannigfaltigkeit.

Schließlich haben wir einen Vortrag über exotische $\mathbb{R}^4$'s gehört.

Zum Abschluß der Tagung wurde die folgende Liste von offenen Problemen vorgestellt:

1.) Gibt es auf $\mathbb{R}^4$ überabzählbar viele exotische Strukturen? Gerüchteweise hat Gompf gezeigt, daß es unendlich viele Strukturen gibt. Ferner haben Freedman und Taylor gezeigt, daß es einen universellen exotischen $\mathbb{R}^4$ gibt, der jeden exotischen $\mathbb{R}^4$ als offene Untermannigfaltigkeit enthält.

2.) Sei M 1-zusammenhängend und kompakt. Gibt es einen universellen exotischen $M-\{p\}$? Das obige Resultat von Freedman und Taylor löst dieses Problem für $M = S^4$.

3.) Welche unimodularen symmetrischen Formen sind Schnittformen von 1-zusammenhängenden differenzierbaren 4-Mannigfaltikeiten?

Donaldson hat angekündigt, daß $2\ m\ E_8 \oplus 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht realisiert werden kann.

4.) R. Stern vermutet: Jede Schnittform einer 1-zusammenhängenden kompakten differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeit ist orthogonale Summe von $\pm$ Schnittformen algebraischer Flächen.

5.) Gibt es exotische Strukturen auf kompakten 1-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten? Man weiß aus Freedmans Satz und klassischer surgery Theorie, daß es viele Beispiele von nicht einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten gibt, die eine exotische Struktur besitzen, z.B. $\mathbb{R}P^4$. Was ist mit der universellen Überlagerung?

6.) Freedmans Theorie für 4-Mannigfaltigkeiten mit nicht poly/zyklischer Fundamentalgruppe (in dem Fall haben Freedman und Quinn die entsprechenden Sätze bewiesen).

7.) Sind kompakte topologische 4-Mannigfaltigkeiten triangulierbar (reell algebraisch, Lipschitz)? Wenn ja, ist die 3-dimensionale Poincaré Vermutung falsch.

8.) Klassifiziere die Casson Henkel. Insbesondere ist der Casson Henkel mit einem kink in jeder Etage standard?

9.) Welche Elemente von $\pi_2(M^4)$ lassen sich durch topologische zahme Einbettung $S^2 \to M$ repräsentieren. Speziell: Erzeuger der Chern Mannigfaltigkeit Ch. Wenn ja, ist reguläre Umgebung kein Bündel.

Wir geben nun anschließend das Programm der Tagung und die Namen der Vortragenden sowie eine Literaturübersicht wieder.

Programm

Die ersten 3 Vorträge berichten über die entsprechenden höher-dimensionalen Sätze und über grundlegende Resultate der 4-dimensionalen Topologie, die schon länger bekannt sind.

1. Vortrag: Differenzierbare Strukturen auf höher-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. (R. Stöcker, Bochum)

Formulierung des h-Kobordismussatzes und Anwendung auf Poincaré Vermutung in dim ≥ 5 [Mi_1], § 9, Milnors Beispiele von 7-dimensionalen exotischen Sphären [Mi_2] , Formulierung des Satzes von Kirby und Siebenmann über Klassifikation von smoothings [Ki, Si],IV,§ 10 (wir betrachten nur den Fall CAT = Diff), der entsprechende Satz für offene 4-Mannigfaltigkeiten [Si_1] , Theorem 4.4.

2. Vortrag: Henkelzerlegung und der h-Kobordismussatz in höheren Dimensionen. (D. Siersma, Utrecht)

Es sollen die grundlegenden Begriffe über Henkelkörper eingeführt werden, die wichtigsten Schritte des Beweises des h-Kobordismussatzes skizziert werden und erläutert werden, daß alle Schritte des Beweises in [Mi_1] auch für dim 4 funktionieren außer dem Whitney Trick [Mi_1, § 6] . Es soll skizziert werden, welche Information man in dim 4 benötigen würde, um den Beweis durchzuführen ([Fr, § 10] , [Ca, Lect III] oder [Si_2, Einführung]).

3. Vortrag: Ältere Resultate über 4-Mannigfaltigkeiten und quadratische Formen. (N. Klingen, Köln)

Realisierungsproblem von quadratischen Formen als Schnittformen von einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten [Ma, § 1.2] , Satz von Rohlin (ein Beweis, z.B. der in [Ma, § 1.4, S. 27] skizzierte sollte vorgeführt werden), nicht Approximierbarkeit von gewissen Abbildungen $S^2 \to M^4$ durch differenzierbare Einbettungen [K.M.] , Bericht über Klassifikation der kompakten einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten bis auf h -Kobordismus (z.B. [Ma, § 1.1]).

Die nächsten drei Vorträge entwickeln die Theorie der Casson-Henkel. Bei Bedarf können wir den Vortragenden den Artikel [Ca] zuschicken.

4. Vortrag: Henkelkörperbeschreibung von 4-Mannigfaltigkeiten (Th. Bröcker, Regensburg)

Was wir brauchen steht in [Fr, § 2] knapp zusammengefaßt. Etwas ausführlicher steht es in [Ma, § 3.1] oder in der in diesen Arbeiten zitierten Literatur. Ziel des Vortrages müßte sein, durch viele Bilder an diese bei Freedman benutzte Beschreibungsweise zu gewöhnen und den Kirby calculus zu erläutern, soweit es in [Fr] (wie dort in § 2 erläutert) gebraucht wird.

5. Vortrag: Definition von Kinky- und Casson Henkeln. Cassons Finger Lemma. (K. Jänich, Regensburg)

Bericht über den Rest von [Fr, § 2] und Beweis von [Fr, Lemma 3.1] und, je nach Zeit, Lemma 10.1 in [Fr] (wird beim Beweis des h-Kobordismussatzes benötigt). Zur Literatur vergleiche auch [Ca] oder [Ma]

6. Vortrag: Existenz von Casson Henkeln in 4-Mannigfaltigkeiten (M. Rost, Regensburg)

Beweis von [Fr, Theorem 3.1] (siehe auch [Ca] oder [Ma] für ausführliche Beweise).

Die nächsten beiden Vorträge sollen eine Skizze des Beweises des technischen Hauptresultats von Freedman: "Ein Casson Henkel ist homöomorph zum Standardhenkel" darstellen. Diese beiden Vorträge müßten von den Referenten aufeinander abgestimmt werden. Eine mögliche Aufteilung wäre in eine Übersicht über die Teile, die mit Bing Topologie zu tun haben, und den Rest.

7. + 8. Vortrag: Beweisskizze von Freedmans Satz: CH $\approx$ H. (L. Siebenmann, Orsay).

9. Vortrag: Anwendungen auf kompakte 4-Mannigfaltigkeiten. (S. Stolz, Mainz)

Das wichtigste Hilfsmittel für Anwendungen ist der h-Kobordismussatz. Nach den Vorbereitungen des 2. Vortrags folgt unter Verwendung des verallgemeinerten Finger Lemmas [Fr. Lemma 10.1] und des Hauptresultats von Freedman, daß ein kompakter differenzierbarer h-Kobordismus zwischen einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten homöomorph zum Produkt ist [Fr, Theorem 10.2]. Der deutlich schwierigere Satz für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten [Fr, Theorem 10.3] soll formuliert werden. Dies sollte knapp erläutert werden. Die Verallgemeinerung auf topologische 4-Mannigfaltigkeiten (jede solche hat eine fast-differenzierbare Struktur [Qu]) sollte formuliert werden. Die Hauptzeit des Vortrages sollte für Anwendungen verwendet werden, die (einschließlich der Poincaré Vermutung) in [Fr, § 1] enthalten sind. Je nach Zeit könnte noch über die Anwendungen auf exotische Strukturen von kompakten nicht einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten berichtet werden [Kr_1, Kr_2] .

In den folgenden 4 Vorträgen soll der Satz von Donaldson behandelt werden.

10. Vortrag: Selbst-Dualität in der 4-dimensionalen Riemannschen Geometrie. (Ch. Deninger, Regensburg)

Zunächst soll der formale Aufbau des Beweises von Donaldson kurz erläutert werden ([Do] ,I. 2.). Daran schließt sich eine Einführung der grundlegenden differentialgeometrischen Begriffe an: Selbst-duale Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln über 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten und die Gruppe der Eichtransformationen. Diese Begriffe sollen an zwei wichtigen Spezialfällen erläutert werden:

1) U(1)-Bündel über beliebigen 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.(Leicht)

2) SU(2)-Bündel über S^4 mit der Chern-Klasse -1.(Bericht)

   Dieses Beispiel liefert das Muster für den gesamten Donaldsonschen Beweis.

Literatur:([Do] , I. 3., I. 4, der erste und der letzte Abschnitt von I. 5, mit eventueller Ergänzung durch die entsprechenden Teile von [AHS]).

11. Vortrag: Der Modulraum. (U. Stuhler, Wuppertal)

Unter "Modulraum" ist hierbei das folgende zu verstehen: Auf einer 4-Mannigfaltigkeit mit positiv definiter Schnittform betrachte man eine Riemannsche Metrik und das SU(2)-Bündel mit Chern-Klasse -1, sei $\mathfrak{A}$ die Menge der selbst-dualen Zusammenhänge und $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Eichtransformationen. Wir nennen $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ den Modulraum. Die lokale Struktur von $\mathfrak{M}$ wird untersucht; dabei muß unterschieden werden, ob man in der Umgebung eines reduziblen oder eines irreduziblen Zusammenhangs ist. Das wichtigste Hilfsmittel bei dieser Untersuchung ist der Indexsatz von Atiyah-Singer. Literatur: ([Do] , II. 1 - II. 2.)

12. Vortrag: Der gestörte Modulraum und seine Orientierbarkeit. (T. tom Dieck, Göttingen)

Im allgemeinen wird der Modulraum keine 5-dimensionale Mannigfaltigkeit (mit Singuralitäten) sein. Um in eine generische Situation zu kommen, in der dies der Fall ist, muß man eine kleine Störung σ an den Selbst-Dualitäts-Gleichungen anbringen und wird dann zu einem gestörten Modulraum $\mathfrak{M}^{\sigma}$ geführt. Der reguläre Anteil von $\mathfrak{M}^{\sigma}$ ist eine orientierbare 5-dimensionale Mannigfaltigkeit. Literatur: ([Do] , II. 3 und II 4.)

13. Vortrag: Die Kompaktifizierung des gestörten Modulraumes. (E. Vogt, Berlin).

In diesem Vortrag soll der Abschnitt III von [Do] behandelt werden. Er nimmt etwa die Hälfte von Donaldsons Arbeit ein und ist technisch kompliziert. Da die Hoffnung besteht, daß Modifikationen des Beweisgangs hier zu wesentlichen Erleichterungen führen, sollte der Vortragende nicht zu sehr auf die Details eingehen. Jedenfalls ist dies der Beweisteil, der sich entscheidend auf die tiefliegenden analytischen Resultate von Uhlenbeck und Taubes stützt.

Der letzte Vortrag soll die Anwendung der Resultate von Freedman und Donaldson auf exotische $\mathbb{R}^4$'s beschreiben.

14. Vortrag: Exotische $\mathbb{R}^4$'s. (K. Wirthmüller, Regensburg)

Es soll über [Go] berichtet werden.

Literatur

[A.H.S.] Atiyah-Hitchin-Singer: Self duality in four-dimensional Riemann geometry. Proc. R. Soc. Lond. A 362, 425-461 (1978)

[Ca] Casson: Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds, Notes by Guillou, Orsay

[Do] Donaldson: An application of gauge theory to four-dimensional topology. J. Diff. Geom. 18 (1983),279-315

[Fr] Freedman: The topology of four-dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982), 357-453

[Fr_2] Freedman: A fake $S^3 \times \mathbb{R}$, Ann. of Math. 110 (1979), 177-201

[Go] Gompf: Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies, J. Diff. Geom. 18 (1983), 217-228

[Hi] Hitchin: The Yang Mills equations and the topology of 4-manifolds, Sem. Bourbaki, 606, 167-178 (1982/83)

[K. M.] Kervaire-Milnor: On 2-spheres in 4-manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47 (1961), 1651-1657

[Ki, Si] Kirby-Siebenmann: Foundational essays on topological manifolds, smoothing and triangulation, Ann. of Math. Studies, 88 (1977)

[Kr_1] Kreck: Some closed 4-manifolds with exotic differentiable structure, Proc. Alg. Top. Aarhus 1982, Spinger L.N. 1051, 246-262 (1984)

[Kr_2] Kreck: Smooth structures on closed 4-manifolds up to connected sum with $(S^2 \times S^2)$'s. Preprint (1984)

[Ma] Mandelbaum: Four-dimensional topology: an introdction, Bull. A.M.S. 2 (1980), 1-160

[Mi_1] Milnor: Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton Math. Notes, 1965

[Mi_2] Milnor: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math. 64 (1956), 399-405

[Qu] Quinn: Ends of maps III, J. Diff. Geom. (1983)

[Si_1] Siebenmann: Topological manifolds, Proc. Int. Con. Nizza (1971) 133-163

[Si_2] Siebenmann: Amorces de la chirurgie en dimension quatre: un $S^3 \times \mathbb{R}$ exotique. Sem. Bourbaki (1978/79), 536, 1-25

[Si_3] Siebenmann: La conjecture de Poincaré topologique en dimension 4, Sem. Bourbaki (1981/82),588, 1-30

Außerdem sind inzwischen erschienen:

M. Freedman - F. Quinn: The topology of 4-manifolds. Preprint 1984.

D. Freed - K. Uhlenbeck: Instantons and 4-manifolds. Berkeley lecture notes, Springer 1984.

Berichterstatter: M. Kreck und W. Singhof

Tagungsteilnehmer

Prof. Dr. G. Barthel
Fakultät für Mathematik
der Universität
Postfach 5560

7750 Konstanz

Prof. Dr. T. tom Dieck
Mathematisches Institut
der Universität
Bunsenstr. 3 -5

3400 Göttingen

Prof. Dr. K. Behnke
Fachbereich Mathematik
der Universität
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Dr. W. Ewing
Mathematisches Institut
der Universität
Bunsenstr. 3 - 5

3400 Göttingen

Prof. Dr. R. Berndt
Mathematisches Seminar
der Universität
Bundesstr. 55

2000 Hamburg

Prof. Dr. G. Faltings
Fachbereich 7 - Mathematik
der Gesamthochschule
Gaußstr. 20

5600 Wuppertal

Prof. Dr. R. Böhme
Abteilung für Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 150 - Gebäude NA

463 Bochum-Querenburg

Dipl.-Math. H.-J. Fendrich
Fachbereich Mathematik
der Universität
Saarstr. 21

6500 Mainz

Prof. Dr. Th. Bröcker
Fachbereich Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Dr. K.H. Fieseler
Fakultät für Mathematik
der Universität
Postfach 5560

7750 Konstanz

Dr. C. Deninger
Fachbereich Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Prof. Dr. H. Flenner
Mathematisches Institut
der Universität
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Prof. Dr. G. Frey
Fachbereich Mathematik
der Universität
Bau 27

6600 Saarbrücken

Prof. Dr. K. Jänich
Fachberich Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Prof. Dr. J. Gamst
Fachbereich 3 Mathematik & Informatik
der Universität
Kufsteiner Str.

2800 Bremen 33

Prof. Dr. F. Ischebeck
Mathematisches Institut
der Universität
Einstein-Str. 62

4400 Münster

Prof. Dr. W.-D. Geyer
Mathematisches Institut
der Universität
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Priv.-Doz. Dr. U. Karras
Institut für Mathematik
der Universität
Postfach 500 500

4600 Dortmund 50

Prof. Dr. E. Gottschling
Fachbereich Mathematik
der Universität
Saarstr. 21

6500 Mainz

Prof. Dr. L. Kaup
Fakultät für Mathematik
der Universität
Postfach 5560

7750 Konstanz

Prof. Dr. G. Harder
Mathematisches Institut
der Universität
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Priv.-Doz. Dr. N. Klingen
Mathematisches Institut
der Universität
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Dr. F. Hegenbarth
Institut für Mathematik
der Universität
Postfach 500 500

4600 Dortmund 50

Prof. Dr. M. Knebusch
Fachbereich Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Dr. Th. Höfer
Mathematisches Institut
der Universität
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Prof. Dr. M. Kreck
Fachbereich Mathematik
der Universität
Saarstr. 21

6500 Mainz

Prof. Dr. K. Lamotke
Mathematisches Institut
der Universität
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Dr. Andrea Pickl
Fachbereich Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Prof. Dr. P. Löffler
Mathematisches Institut
der Universität
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Prof. Dr. V. Puppe
Fakultät für Mathematik
der Universität
Postfach 5560

7750 Konstanz

Prof. Dr. F. Lorenz
Mathematisches Institut
der Universität
Einstein-Str. 62

4400 Münster

Dr. M. Rost
Fachbereich Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Dr. M. Lübke
Fakultät für Mathematik
der Universität
Postfach 3008

8580 Bayreuth

Dr. H.G. Rück
Fachbereich Mathematik
der Universität
Bau 27

6600 Saarbrücken

Prof. Dr. L. Miller
Mathematisches Institut II
der Universität
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe

Dr. W. Seiler
Fakultät für Mathematik & Informatik
der Universität
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim

Dr. B. Moonen
Mathematisches Institut
der Universität
Weyertal 86 - 90

5000 Köln 41

Prof. L. Siebenmann
Univ. de Paris-Sud
Bat 425 (91405)

Orsay /FRANCE

Dr. E.K. Pedersen
Fachbereich Mathematik
der Universität
Bunsenstr. 3 -5

3400 Göttingen

Prof. D. Siersma
Mathematisch instituut
Budapestlaan 6/Postbus 80.010

3508 TA Utrecht
Niederlande

Priv.-Doz. Dr. W. Singhof
Mathematisches Institut
der Universität
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Dr. Angelika Tschimmel
Fachbereich 7 Mathematik
der Gesamthochschule
Gaußstr. 20

5600 Wuppertal 1

Dr. P. Slodowy
Mathematisches Institut
der Universität
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Prof. Dr. E. Vogt
Institut für Mathematik I
der Freien Universität
Hüttenweg 9

1000 Berlin 33

Dr. Jan Stevens
Riksuniversiteit te Leiden
Subfaculteit der
Wiskunde en Informatica
Postbus 9512
2300 RA LEIDEN/Netherlands

Dr. D. Wemmer
Mathematisches Institut
der Universität
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof. Dr. R. Stöcker
Abteilung für Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 150

463 Bochum-Querenburg

Dr. K. Wirthmüller
Fachbereich Mathematik
der Universität
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Dr. S. Stolz
FAchbereich Mathematik
der Universität
Saarstr. 21

6500 Mainz

Dr. Cornelia Wissemann-Hartmann
Sonnenstr. 84

5600 Wuppertal 2

Prof. Dr. U. Stuhler
Fachbereich 7 Mathematik
der Gesamthochschule
Gaußstr. 20

5600 Wuppertal 1

Prof. Dr. J. Wolfart
Reine Mathematik
der Universität
Robert-Mayer-Str. 6-10

6000 Frankfurt 1

Dr. K. Timmerscheidt
FB 6 Mathematik
der Gesamthochschule
Universitätsstr. 2

4300 Essen