MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 43/1985

Arbeitstagung Geyer/Harder: K-Theorie von Körpern

6.10. bis 12.10.1985

Ziel der Arbeitstagung, die von U. Rehmann (Bielefeld) und Ch. Soulé (Paris) geleitet wurde, war es, die Beweise der beiden folgenden tiefen Resultate aus der K-Theorie von Körpern zu verstehen und einige ihrer Konsequenzen darzustellen:

<u>Theorem I</u> (Merkurjev-Suslin): Das Normrestsymbol

$\alpha_F : K_2(F)/nK_2(F) \to H^2(F,\mu_n \otimes \mu_n)$ ist für jeden Körper F und jedes zur Charakteristik von F prime n ein Isomorphismus.

<u>Theorem II</u> (Suslin): $\overline{F}$ sei algebraisch abgeschlossen und $m > 0$.

i) Ist m gerade, so ist $K_m(\overline{F})$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

ii) Ist m ungerade, so ist $K_m(\overline{F})$ direkte Summe eines $\mathbb{Q}$-Vektorraums mit $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (bzw. $\prod_{l \neq p} \mathbb{Q}_l(\mathbb{Z}_l)$, falls char $\overline{F} = 0$ (bzw. char $\overline{F} = p > 0$) .

Vortragsauszüge

M. KERVAIRE: Die Brauer-Gruppe eines Körpers

Zwei einfache Algebren A, B mit Zentrum F heißen ähnlich, falls es Matrizen-Algebren $M_m(F)$, $M_n(F)$ gibt, so daß $A \otimes_F M_m(F)$ und $B \otimes_F M_n(F)$ F-isomorph sind. Die Ähnlichkeitsklassen von (endlich-dimensionalen) einfachen Algebren mit Zentrum F bilden die sogenannte Brauer-Gruppe $Br(F)$ von F. Die Gruppenoperation in $Br(F)$ wird vom Tensorprodukt (über F) der Algebren induziert.

$Br(F)$ läßt sich auch als Kohomologie-Gruppe $H^2(Gal(F_s/F), F_s^*)$ interpretieren. Sei K/F eine galoissche Erweiterung, $G = Gal(K/F)$, und $u \in H^2(G;K^*)$, so liefert das verschränkte Produkt eine einfache Algebra $A(K/F;u)$ mit Zentrum F.

Die Algebra $A(K/F;u)$ ist $\oplus_{\sigma\in G} Kx_\sigma$ mit der "Multiplikationstafel":

$$x_\sigma x_\tau = u(\sigma,\tau)x_{\sigma\tau} \qquad \sigma,\tau \in G$$
$$x_\sigma \alpha = \sigma(\alpha)x_\sigma \qquad \alpha \in K,\ \sigma \in G$$

wobei u wieder einen Repräsentanten der Klasse $u \in H^2(G;K^*)$ bezeichnet.

$A(K/F;u)$ hat die Eigenschaft

$$A(K/F;u) \otimes_F K \cong M_n(K) ,$$

wobei $n = [K:F]$.

Jede einfache Algebra ist einem verschränkten Produkt ähnlich. (Ein viel tieferer Satz von Amitsur besagt jedoch, daß nicht jede einfache Algebra ein verschränktes Produkt ist.)

$Br(F)$ ist eine Torsionsgruppe.

C. SOULE: Milnor K-theory of fields

When F is a commutative field and $n \in \mathbb{N}$, define

$$K_n^M(F) = \underbrace{F^* \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} F^*}_{n \text{ copies}} / \langle x_1 \otimes \ldots \otimes x \otimes \ldots \otimes 1-x \otimes \ldots \otimes x_n \rangle \text{ , Milnor K-theory}$$

of F. When $v : F^* \to \mathbb{Z}$ is a discrete valuation one can define a tame symbol $\partial_v : K_n^M(F) \to K_{n-1}^M(k)$, $n \geq 1$, where k is the residue field. The Milnor K-theory of a rational function field $F(T)$ is computed via a (split) short exact sequence

$$0 \to K_n^M(F) \to K_n^M(F(T)) \xrightarrow{\partial=(\partial_v)} \bigoplus_{v \neq \infty} K_{n-1}^M(k(v)) \to 0$$

(v runs over all discrete valuations of $F(T)$ which correspond to irreducible monic polynomials in $F(T)$). When E is a monogen finite extension of F, $E = F[T]/(\pi)$ for some monic irreducible polynomial π, define a corestriction (or transfer) map

$$\mathrm{cor}_{E/F} : K_n^M(E) \to K_n^M(F) \quad \text{as the composite of the maps}$$

$$K_n^M(E) \to \bigoplus_{v \neq \infty} K_{n-1}^M(k(v)) \xrightarrow{\partial^{-1}} K_n^M(F(T))/K_n^M(F) \xrightarrow{-\partial_\infty} K_n^M(F) ,$$

where ∂_∞ is the tame symbol attached to the valuation v_∞ on $F(T)$, defined by $v_\infty(f) = -\deg f$, $f \in F(T)^*$. We gave several properties of $\mathrm{cor}_{E/F}$.

M. KNESER: Das Galois-Symbol

I. Galois-Cohomologie: Definitionen und grundlegende Eigenschaften, $H^1(E/F,E^\cdot) = 0$, $H^1(F,\mu_n) \cong F^\cdot/F^{\cdot n}$ falls $n \neq 0$ in F (Voraussetzung, die für den ganzen weiteren Vortrag gelten soll), dabei μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln.

II. Ergänzungen über Brauer-Gruppen: Verallgemeinerte verschränkte Produkte mit galoisschen Algebren (nach Teichmüller), $H^2(E/F,E^{\cdot}) \cong Br(E/F)$, $H^2(F,\mu_n) = {}_nBr(F)$, Berechnung des Bildes eines zyklischen verschränkten Produktes $A_\zeta(a,b)$ in $H^2(F,\mu_n)$ (dabei $\zeta \in \mu_n \subset F$).

III. Das Galois-Symbol: Definition des Symbols und des daraus resultierenden Ringhomomorphismus $\alpha_{F,n} = (\alpha^r_{F,n})$: $K^M(F)/_n = \bigoplus_{r\geq 0} K^m_r(F)/_n \to \bigoplus_{r\geq 0} H^r(F,\mu_n^{\otimes r})$. Interpretation für die Algebrenklasse von $A_\zeta(a,b)$.

IV. Der Resthomomorphismus für das Galois-Symbol: Definition, Eigenschaften, die exakte Sequenz

$$0 \to H^r(F,\mu_n^{\otimes r}) \to H^r(F(T),\mu_n^{\otimes r}) \to \bigoplus_x H^{r-1}(F(x),\mu_n^{\otimes r-1}) .$$

V. Folgerungen und Ausblick: Der Satz von Bloch, daß $\operatorname{Ker} \alpha^2_{F,n} \cong \operatorname{Ker} \alpha^2_{F(T),n}$ und $\operatorname{Coker} \alpha^2_{F,n} \cong \operatorname{Coker} \alpha^2_{F(T),n}$ ist. Formulierung des Satzes von Merkurjev und Suslin, daß $\alpha^2_{F,n}$ bijektiv ist; Folgerung für die Brauer-Gruppe. Die Vermutung von Kato, daß $\alpha^r_{F,n}$ für alle r bijektiv ist.

W. SCHARLAU: <u>Die Tate'schen Resultate</u>

Der Satz von Merkurjev-Suslin besagt, daß für jeden Körper F mit $\frac{1}{n} \in F$ die kanonische Abbildung

$$\alpha_F : K_2F/nK_2F \to H^2(F,\mu_n^{\otimes 2}) , \ \{a,b\} \to da \cup db = (a,b)$$

ein Isomorphismus ist. Folgende Teile des Beweises wurden vorgetragen:

1) Die Behauptung wird auf den Fall $n = p =$ Primzahl zurückgeführt.

2) Man kann o.B.d.A. annehmen $\mu_p \subset F$.

3) Im Fall $n = p$, $\mu_p \subset F$ besagt die Injektivität: $\sum_{i=1}^{k} (a_i,b_i) = 0$ in $H^2(F,\mu_p^{\otimes 2}) = Br_p(F) \otimes \mu_p \Rightarrow \Sigma\{a_i,b_i\} \in pK_2F$.

Diese Implikation wird für den Fall $k = 1$ bewiesen. (Der allgemeine Beweis wird später durch Induktion nach k geführt.)

4) Unter Verwendung von 1), 2), 3) wird der Satz für globale Körper bewiesen. Daß α_F surjektiv ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß alle zentralen einfachen Algebren zyklisch sind. Für die Injektivität wird folgendes Lemma entscheidend benutzt: Hat man zwei zyklische Algebren $(a,b) \cong (c,d)$, so existieren x,y mit $(a,b) \cong (x,b) \cong (x,y) \cong (c,y) \cong (c,d)$. Der Beweis dieses Lemmas benutzt globale Klassenkörpertheorie.

W.D. GEYER: <u>Hilberts Satz 90 für K_2</u>

Ein wesentliches Hilfsmittel zum Beweis des Satzes von Merkurjev und Suslin ist das Analogon von Hilberts Satz 90 für K_2 : Ist E/F eine zyklische Erweiterung vom Grad $p \neq \operatorname{char} F$ mit der Gruppe $G = \langle\sigma\rangle$, so ist die Sequenz

$$(*) \qquad K_2E \xrightarrow[1-\sigma]{} K_2E \xrightarrow[\text{cor}]{} K_2F$$

exakt. Modulo p ergibt sich daraus die Exaktheit der Sequenz

$$k_2F \oplus k_2E \xrightarrow[(\text{res},\ 1-\sigma)]{} k_2E \xrightarrow[\text{cor}]{} k_2F \ .$$

Es wird die Exaktheit von (*) durch direkte Rechnung bewiesen, falls E/F die Bedingungen

(a) F hat nur algebraische Erweiterungen von p-Potenzgrad

(b) $N : E^{\bullet} \to F^{\bullet}$ ist surjektiv

erfüllt. Um den allgemeinen Fall zu beweisen, sei für jede Körpererweiterung F'/F die Homologie der mit F' tensorierten Sequenz (*) mit $V(F')$ bezeichnet. Die Idee des Beweises ist es, zu F einen Oberkörper F_∞ zu finden, der die Bedingungen (a), (b) erfüllt und für den res: $V(F) \to V(F_\infty)$ injektiv ist. Die Bedingung (a) ist leicht zu erfüllen, weil $V(F) \to V(F')$ injektiv ist, falls $[F':F] \not\equiv 0 \bmod p$ ist. Schwierigkeiten bereitet die Realisierung von (b). Sie geschieht durch sehr große transzendente Körpererweiterungen. Jeder zentral-einfachen Algebra A/F wird eine Severi-Brauer-Varietät X zugeordnet, so daß $[A]$ im Kern von $BrF \to BrF(X)$ liegt. Durch Komposition aller Funktionenkörper von Severi-Brauer-Varietäten über F werden insbesondere alle zyklischen Algebren über F zerfällt, was nach abzählbarer Iteration zu einem Körper F_∞ mit (b) führt. Offen blieb im Vortrag die Injektivität der Restriktion auf V bei dieser Severi-Brauer-Varietäten-Konstruktion, d.h. Merkurjevs

<u>Lemma 3</u>: Ist X Severi-Brauer-Varietät über F, zerfällt durch E, so ist $V(F) \to V(F(X))$ injektiv.

E. BAYER: <u>Weitere Eigenschaften des Galois-Symbols</u>

Sei F ein Körper, p eine Primzahl mit $\mathrm{Char}\, F \neq p$ und $\mu_p \subset F$. Man betrachtet eine zyklische Erweiterung L/F vom Grad p. Es gilt:

<u>Satz 2</u>: Falls α_F injektiv ist, ist die folgende Sequenz exakt:

$$k_2(F) \xrightarrow{(\alpha_F,\mathrm{res})} {}_p\mathrm{Br}(F) \oplus k_2(L) \xrightarrow{(\mathrm{res},-\alpha_L)} {}_p\mathrm{Br}(L)$$

wobei $k_2(F) := K_2(F)/pK_2(F)$.

<u>Korollar</u>: Falls α_F injektiv ist, so ist auch α_L injektiv.

Zum Beweis braucht man Hilberts Satz 90 für K_2.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse und mit Satz 5 (siehe nächsten Vortrag) kann man den Satz von Merkurjev und Suslin beweisen.

N. KLINGEN: Spezialisierung

Thema des Vortrages war der Beweis des ausstehenden Satzes:

Ist F ein Körper, $p \neq \operatorname{char} F$ eine Primzahl, $\mu_p \subset F$, $a \in F^* \setminus F^{*p}$ und $L = F(\sqrt[p]{a})$, so besteht der Kern von $\operatorname{res}_{L/F}: k_2F \to k_2L$ genau aus den Symbolen $\{a,b\}$, $b \in F^*$.

Dabei ist $k_2F := K_2F/p\cdot K_2F$ gesetzt.

Beweisgang: 1) Der Satz folgt sofort aus dem analogen Ergebnis in der Brauergruppe ${}_p\mathrm{Br}\,F$, wenn das Galoissymbol $\alpha_F : k_2F \to H^2(F,\mu_p^{\otimes 2})$ injektiv ist.

2) Über die Injektivität von α_F kann an dieser Stelle benutzt werden:

a) F endlich $\Rightarrow$ α_F injektiv.

b) (Tate) F global $\Rightarrow$ α_F injektiv (de facto bijektiv)

c) (Bloch) α_F injektiv $\Rightarrow$ $\alpha_{F(T)}$ injektiv ($F(T)$ rationaler Funktionenkörper)

d) (Merkurjev; Korollar des vorangehenden Vortrags):

$\mu_p \subset F$, α_F injektiv $\Rightarrow$ $\alpha_{F(\sqrt[p]{a})}$ injektiv.

3) Zu gegebenem $x \in \operatorname{Ker} \operatorname{res}_{L/F}$ "verschiebt" man das Problem in einen geeignet konstruierten Körper $\tilde{F}$, für den gemäß 2) $\alpha_{\tilde{F}}$ injektiv ist.

4) Das gewonnene Resultat spezialisiert man mit einer geeigneten F-wertigen Stelle von $\tilde{F}$ zum gewünschten Ergebnis in F.

M. KNEBUSCH: Quadratische Formen

Es wurde über Zusammenhänge zwischen dem Wittring $W(F)$ eines Körpers F (auch $\operatorname{Char} F = 2$), der Milnoralgebra $k_*F = K_*F/2$, und (falls $\operatorname{Char} F \neq 2$) der Kohomologiealgebra $H^*(F) = H^*(F,\mathbb{Z}/2)$ über dem

Körper $\mathbb{F}_2$ referiert. Nach Milnor (Invent. math. 9, 1970) gibt es einen natürlichen $\mathbb{F}_2$-Algebrenhomomorphismus $s_*: k_*F \to \mathrm{gr}\, W(F)$ in den graduierten Wittring $\mathrm{gr}\, W(F) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$, der einer Erzeugenden $l(a)$ $(a \in F^*)$ in $k_1(F)$ die Klasse $\overline{<1,-a>}$ der bilinearen Form $<1,-a>$ zuordnet. Die Frage ist, ob s_* bijektiv ist. Die Surjektivität ist trivial. Nach Milnor ist $s_n : k_n(F) \to I^n/I^{n+1}(F)$ bijektiv für $n \leq 2$. Der Beweis beruht auf einem kommutativen Dreieck von Gruppenhomomorphismen $(t = 2^{n-1})$

$$\begin{tikzcd}
k_n(F) \arrow[rd, "s_n"] \arrow[dd, "l(-1)^{t-n}"'] & \\
& I^n/I^{n+1} \arrow[ld, "\overline{w}_t"] \\
k_t(F) &
\end{tikzcd}$$

wobei $\overline{w}_t$ von der t-ten "Stiefel-Whitney-Klasse" $w_t : \widehat{W}F \to k_tF$ induziert wird ($\widehat{W}F$ = Grothendieck-Ring der Bilinearformen über F). Für $n = 1,2$ ist $t = n$. Ist Char $F \neq 2$, so liefert die Cliffordinvariante c ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd}
k_2(F) \arrow[rr, "s_2", "\sim"'] \arrow[rd, "h_2"'] & & I^2/I^3 \arrow[ld, "\overline{c}"] \\
& H^2(F) &
\end{tikzcd}$$

Nach dem Satz von Merkurjev ist h_2 bijektiv, also auch $\overline{c}$ bijektiv. Dadurch findet ein altes Problem von Pfister, ob $I^3(F)$ genau aus der Wittklassen besteht, auf denen die klassischen Invarianten Dimensionsindex, Diskriminante, Cliffordinvariante verschwinden, eine bejahende Antwort (Injektivität von $\overline{c}$). Im Falle Char $F = 2$ hat anscheinend K. Kato bewiesen, daß $s_* : k_*F \to \mathrm{gr}W(F)$ ein Isomorphismus ist.

H. HELLING: Matsumotos Satz

Die vorgetragene Version des Satzes von Matsumoto besagt, daß

$$K_2^M F \cong H_2(SL(F), \mathbb{Z})$$

gilt. Dabei ist F ein Körper, K_2^M das Milnorsche K_2, und $SL(F) = \varinjlim SL(n,F)$. Es wurde der Beweis von Matsumoto skizziert, der davon ausgeht, daß die Steinberggruppe $St(n,F)$ für $n \geq 3$ zentrale Erweiterung von $SL(n,F)$ mit K_2F ist, wonach nach Übergang zum direkten Limes und Universalität von $St(F)$

$$K_2F \cong H_2(SL(F), \mathbb{Z})$$

gilt. Daß $K_2F \cong K_2^M F$ gilt, ist Inhalt der Konstruktion einer zentralen Erweiterung

$$1 \to K_2^M F \to StF \to SLF \to 1,$$

deren Details in Milnors "Introduction to K-theory" stehen. Der Nutzen des Satzes von Matsumoto für die Arbeitstagung bestand in der Möglichkeit, kanonisch einen Transfer $K_2E \to K_2F$ zu definieren, wenn E/F endliche Körpererweiterung ist. $SL(E) \to SL(F)$ ist selbst kanonisch, und der Transfer für K_2 ist der dadurch induzierte Homomorphismus zwischen den Schur-Multiplikatoren $H_2(SL(E)) \to H_2(SL(F))$.

M. LEVINE: The Q-construction

The construction of the classifying space of a category, the categorical equivalent of homotopy fibers, and Quillen's Theorems A+B were described. Next, the definition of an exact category, and the Q-construction were given, together with the definition of the K-groups of an exact category $\mathcal{M}$:

$$K_i(\mathcal{M}) = \pi_{i+1}(BQ\mathcal{M}).$$

The definition of $K_o(M)$ was then composed with the Grothendieck group of M (they're the same). We then gave some basic properties of the Q-construction, including the resolution theorem, devissage, and localization.

G. TAMME: K und K'-Theorie der Schemata

Für ein separiertes noethersches Schema X werden die Gruppen $K_q(X)$ und $K'_q(X)$ definiert und die relative K-Sequenz mittels Devissage und Lokalisierung bewiesen.

Alsdann wird die Quillen'sche Spektralsequenz

$$E_1^{pq} = \underbrace{K_{-p-q}(M_p/M_{p+1})}_{\bigoplus\limits_{x \in X^p} K_{-p-q}(k(x))} \Rightarrow E^{p+q} = K'_{-p-q}(X)$$

konstruiert und der Komplex $0 \to E^{-q} \to E_1^{0,-q} \xrightarrow{d_1} E_1^{1,-q} \to \dots$ betrachtet. Der Satz von Bloch, d.h. $H^p(X,K_q) = E_2^{p,-q}$, und also $H^p(X,K_q) = 0$ für $p > q$, $H^q(X,K_q) = CH^q(X)$ wird für reguläre algebraische Schemata X über einem Körper hergeleitet.

Schließlich werden die sog. Homotopieeigenschaft, i.e. die Isomorphie von $K'_q(S) \xrightarrow{\pi^*} K'_q(V(E))$ für Vektorraumbündel $\pi: V(E) \to S$ und die K-Theorie der Brauer-Severi-Schemata X/S, i.e.

$$\bigoplus_{n=0}^{r-1} K_q(A^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} K_q(X)$$

behandelt, wobei in der letzten Formel A die X/S zugeordnete Azumaya-Algebra über S ist.

U. REHMANN: Plus-Konstruktion und ein Satz von Wang

1. Durch die Plus-Konstruktion wird dem klassifizierenden Raum $BGL(A)$ der allgemeinen linearen Gruppe eines assoziativen Ringes A

ein Raum $BGL(A)^+$ mit Fundamentalgruppe $\pi_1(BGL(A)^+) = GL(A)/E(A) = K_1(A)$ und $\pi_2(BGL(A)^+) = H_2(E(A),\mathbb{Z})$ sowie der Eigenschaft $H_*(BGL(A), i^*L) \xrightarrow{\sim} H_*(BGL(A)^+, L)$ für ein lokales Koeffizientensystem L auf $BGL(A)^+$ zugeordnet, hierbei ist i^* induziert durch die Einbettung $i : BGL(A) \to BGL(A)^+$. Nach Quillen wird definiert: $K_n(A) := \pi_n(BGL(A)^+)$. Der Zusammenhang mit der Definition in den beiden vorangehenden Vorträgen wird durch "Delooping" hergestellt:

$$\Omega(BQP(A)) \simeq K_o(A) \times BGL(A)^+ ,$$

hierbei ist $P(A)$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven A-links-Moduln.

2. Satz von Wang. Ist A zentrale einfache k-Algebra vom Index $n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ (Primfaktorzerlegung), k Körper, und ist $\alpha \in A^*$ von der reduzierten Norm 1, so ist

$$\alpha^{n/p_1 \cdots p_r} \in A' := [A^*,A^*] .$$

Insbesondere gilt also:

$$N\alpha = 1 \text{ , } n \text{ quadratfrei } \Rightarrow \alpha \in A' .$$

Die Eigenschaften der Dieudonné-Determinante liefern damit:

$$n \text{ quadratfrei } \Rightarrow K_1(A) \hookrightarrow k^* .$$

U. JANSSEN: <u>Ende des Beweises des Satzes von Merkurjev-Suslin</u>

1. Es wurde bewiesen das noch zum Beweis des Satzes fehlende

<u>Lemma 3</u>: Sei X eine Brauer-Severi-Varietät der Dimension $p-1$ über F, $p \neq \text{Char } F$, E/F ein zyklischer Zerfällungskörper, $Gal(E/F) = \langle\sigma\rangle$, $F(x)$ der Funktionenkörper von X, dann ist

$$K_2(E)/(1-\sigma)K_2(E) \xrightarrow{res} K_2(E\cdot F(x))/(1-\sigma)K_2(E\cdot F(x))$$

injektiv.

Der Beweis benutzt die Quillen-Spektralsequenz

$$E_1^{i,j}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(i)}} K_{-i-j}(k(x)) \Rightarrow E^{i+j} = K_{-i-j}(X) ;$$

es ist die Injektivität von $E_2^{1,-2}(X) \to E_2^{1,-2}(X_E)$ zu zeigen, $X_E = X \times_F E \cong \mathbb{P}_E^{p-1}$. Mit Hilfe Chern'scher Klassen $c_i : K_o(X) \to CH^i(X)$ ($= E_2^{i,-i}$, Bloch's Formel!) und des Satzes von Grothendieck-Riemann-Roch zeigt man $E_2^{1,-2} = E_\infty^{1,-2}$. Daher kann in $K_1(X)$ bzw. $K_1(X_E)$ gerechnet werden, und die Injektivität folgt aus der expliziten Beschreibung dieser Gruppen durch die Sätze von Quillen und Wang.

2. Es wurden referiert folgende Sätze von Suslin über Torsion in K_2 von Körpern.

<u>Satz 1</u>: a) $\mathrm{Char}(F) = p > 0 \Rightarrow {}_pK_2(F) = 0$.

b) $\mathrm{Char}\, F = p \nmid n$, $\mu_n \subseteq F \Rightarrow {}_nK_2(F) = \{\mu_n, F^*\}$.

<u>Satz 2</u>: Ist F endlich erzeugt, so ist ${}_{1^n}K_2(F) \xrightarrow{\alpha_F'} {}_{1^n}H^2(F, \mathbb{Z}_1(2))$ ein Isomorphismus.

U. STUHLER: <u>Einige Konsequenzen aus dem Satz von Merkurjev-Suslin</u>

Nach einer kurzen Übersicht über die Literatur, die sich an die Resultate von Merkurjev-Suslin anschließt, insbesondere über neuere Ergebnisse von Murre über Codimension 2-Zykel auf algebraischen Varietäten, wurde eine Einführung in die Arbeit von Kato: "A Hasse principle for two-dimensional global fields", (1985) gegeben.

Es wurde der Komplex

$$S_X : 0 \to K_2(k(X_F)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_1(k(x)) \to \bigoplus_{x \in X^{(2)}} K_o(k(x)) \to 0$$

im Fall eines arithmetischen Schemas $X/\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_S$ betrachtet und die Eulercharakteristik $\chi(S_X/p) - \chi(pS_X)$ berechnet. Wie gesagt, benötigte man dafür die Resultate von Merkurjev und Suslin, allerdings auch wesentlich die Resultate von Bloch-Kato-Saito über die Klassenkörpertheorie 2-dimensionaler globaler Schemata. Entscheidend ist folgendes Resultat: Bezeichnet $D(X)$, $E(X)$ Kern und Kokern des Homomorphismus $0 \to K_2(k(X_F)) \to \bigoplus_{x\in X_F^{(1)}} K_1(k(x)) \to 0$, so hat man die Beziehung

$$D(X_F) \simeq \bigoplus_{v\in P(F)} D(X_{F_v}) \quad \text{und} \quad 0 \to E(X_F) \to \bigoplus_{v\in P(F)} E(X_{F_v}) \to V/n \to 0 .$$

Am Ende des Vortrages wurden erläutert:

1) die Bloch-Beilinson-Soulé Vermutung

2) Es wurde gezeigt, daß man eine Injektion (Hasse-Prinzip) hat:

$$0 \to H^3(k(X_F);\mathbb{Z}/n(2)) \to \bigoplus_{v\in P(F)} H^3(k(X_{F_v});\ \mathbb{Z}/n(2)) .$$

3) Dieses kohomologische Resultat konnte mittels eines wohl einfachen Resultates von Merkurjev-Suslin benutzt werden, um ein Hasse-Prinzip für die reduzierte Norm einer Divisionsalgebra von quadratfreiem Index über $k(X_F)$ zu beweisen.

4) J.-L. Colliot-Thélène hat eine Anwendung des Satzes von Kato auf die quadratischen Formen gegeben. Betrachtet man die Hamilton-Quaternionen $\left(\frac{-1,-1}{k(X_F)}\right)$ und wendet Kato's Resultat auf die reduzierte Norm an, so kann man die Pythagoras-Zahl z.B. des Körpers $\mathbb{Q}(x,y)$ bestimmen. Sie ist höchstens acht.

P. SCHNEIDER: <u>Rigiditätssätze in der höheren K-Theorie</u>

Es wurden folgende Sätze bewiesen:

<u>Theorem A</u>: (Gabber, Gillet/Thomason) k ein Körper, $X_{|k}$ glattes Schema, $o := O^k_{X,x}$ in einem $x \in X(k)$, n prim zu char k; dann ist

$$K_*(o,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong K_*(k,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) .$$

<u>Theorem B</u>: (Suslin) E/k Erweiterung separabel abgeschlossener Körper, n prim zu char k; dann ist

$$K_*(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong K_*(E, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad .$$

Die Beweise werden zunächst durch Standardargumente, wobei allerdings Quillen's Beweis der Gersten-Vermutung für reguläre algebraische Schemata über einem Körper benutzt wird, auf folgendes Lemma zurückgeführt.

Rigiditätslemma: $\mathcal{O}$ ein henselscher lokaler Ring mit abgeschlossenem Punkt ξ , n invertierbar in $\mathcal{O}$, $Y|_{\mathcal{O}}$ glatt von reiner relativer Dimension 1, σ_o und σ_1 Schnitte von $Y|_{\mathcal{O}}$ mit $\sigma_o(\xi) = \sigma_1(\xi)$, $\mathcal{O} \to F$ ein Homomorphismus in einem Körper F ; dann sind

$$K_*(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \underset{\sigma_1^*}{\overset{\sigma_o^*}{\rightrightarrows}} K_*(\mathcal{O}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to K_*(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad \text{gleich.}$$

Zusatz: Ist $\mathcal{O}$ ein Körper, welcher separabel abgeschlossen ist, und ist Y zusammenhängend, so gilt die Aussage für beliebige Schnitte σ_o und σ_1 .

Ist Y eine glatte zusammenhängende Kurve über einem Körper k mit regulärem projektiven Modell $\overline{Y}$, so induzieren die Schnitte zu abgeschlossenen Punkten eine Paarung $\mathrm{Div}(Y) \times K_*(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to K_*(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Unter Ausnutzung der Homotopieinvarianz der K-Theorie zeigt man, daß diese Paarung über die verallgemeinerte Picardgruppe $\mathrm{Pic}(\overline{Y},Y) := \mathrm{Div}(Y)/(f)$ mit $f \equiv 1 \bmod P$ für $P \in \overline{Y} \setminus Y$ faktorisiert. Im nächsten Schritt zeigt man mit Standardargumenten der Descenttheorie eine Inklusion $0 \to \mathrm{Pic}(\overline{Y},Y)/n\mathrm{Pic}(\overline{Y},Y) \to H^2_{et}(\overline{Y}, j_!\mu_n)$ in eine geeignete Etalcohomologiegruppe. Ist nun k separabel abgeschlossen, so ist die Etalcohomologie von $\mathrm{Spec}(k)$ trivial, und man folgert, daß obige Paarung sogar über $\{D \in \mathrm{Div}(Y) : \deg D = 0\}$ faktorisiert, was offensichtlich den Zusatz impliziert. Der allgemeine Fall eines henselschen Ringes erledigt sich mit ähnlichen Argumenten, wenn man beachtet, daß die verlangte Eigenschaft richtig ist in der Etalcohomologie (Basiswechselsätze), und wir in der speziellen

Faser "Gleichheit" vorausgesetzt haben.

C. DENINGER: K-Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper I

Der Beweis folgender miteinander eng zusammenhängender Sätze von Suslin wurde vorbereitet.

Satz 1: Sei k ein alg. abg. Körper der Char 0. Dann ist

$K_{2i}(k)$ eindeutig divisibel und

$K_{2i-1}(k) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus$ eind. divisibel für $i \geq 1$.

Satz 2: $0 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{N}$, dann sind die natürlichen Abbildungen

$$H_i(BGL_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}/m) \xrightarrow{\sim} H_i(BGL_n(\mathbb{C})^{top}, \mathbb{Z}/m)$$

Isomorphismen.

Für jede topologische Gruppe G bezeichnet hierbei BG den klassifizierenden Raum von G in der diskreten und BG^{top} denjenigen von G in der gewöhnlichen Topologie.

Im Mittelpunkt dieses Vortrages stand die universelle Homotopie-Konstruktion von Suslin. Sei $X_{n,i} = GL_n \times_{\mathbb{C}} \dots \times_{\mathbb{C}} GL_n = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{n,i}$ und $X^h_{n,i} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}^h_{n,i}$ die Henselisierung von $X_{n,i}$ in $1 \in X_{n,i}(\mathbb{C})$. Nach Theorem A aus Schneiders Vortrag gilt:

$$K_*(\mathcal{O}_{n,i}, \mathbb{Z}/m) \xrightarrow{\sim} K_*(\mathbb{C}, \mathbb{Z}/m) .$$

Nach Suslins Version des Satzes von Whitehead ist dies äquivalent zu

$$H_*(GL(\mathcal{O}^h_{n,i}), \mathbb{Z}/m) \xrightarrow{\sim} H_*(GL(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/m) .$$

Da nach einem Lemma von Charney $GL(\mathcal{O}^h_{n,i})$ trivial auf $H_*(GL(\mathcal{O}^h_{n,i}, M^h_{n,i}), \mathbb{Z}/m)$ operiert, ist dies weiterhin äquivalent zu

$$\tilde{H}_*(GL(\mathcal{O}^h_{n,i}, M^h_{n,i}), \mathbb{Z}/m) = 0 .$$

Hierbei bezeichnet $M^h_{n,i}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}^h_{n,i}$.

Dieses Resultat erlaubt es nun, gewisse universelle Ketten

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$c_{n,i} \in C_{i+1}(GL(\mathcal{O}^h_{n,i}, M^h_{n,i}), \mathbb{Z}/m)$$

in der Standard-Auflösung zu finden, die im nächsten Vortrag an entscheidender Stelle zur Konstruktion einer Nullhomotopie benutzt werden.

Gegen Ende des Vortrages wurde für eine Liesche Gruppe G, der Raum BG_ε erklärt und die Homotopiefaserung

$BG_\varepsilon \to BG \to BG^{top}$ aufgestellt.

K. WINGBERG: K-Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper II

Mit Hilfe der universellen Homotopie-Konstruktion wurde gezeigt, daß die Inklusionen

$$BGL_n(\mathbb{C})_\varepsilon \to BGL_n(\mathbb{C}) \to BGL(\mathbb{C})$$

$$BSL_n(\mathbb{C})_\varepsilon \to BSL_n(\mathbb{C}) \to BSL(\mathbb{C})$$

Nullhomomorphismen in $\tilde{H}_*(-, \mathbb{Z}/m)$ induzieren.

Als ein erstes Korollar ergab sich die Trivialität der Homologiegruppen

$$\tilde{H}_i(BSL_n(\mathbb{C})_\varepsilon, \mathbb{Z}/m) = 0 \ , \quad 0 \le i \le \frac{n-1}{2} \ ,$$

wobei zum Beweis entscheidend die Surjektivität der Abbildung

$$H_*(BSL_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/m) \to H_*(BSL_n(\mathbb{C})^{top}, \mathbb{Z}/m)$$

einging. Ein weiteres Korollar ergab hieraus, daß

$$BSL(\mathbb{C})^+ \to BSL(C)^{top} \quad \text{und} \quad BGL(\mathbb{C})^+ \to BGL(\mathbb{C})^{top}$$

Isomorphismen in $H_*(-, \mathbb{Z}/m)$ und $\pi_*(-, \mathbb{Z}/m)$ induzieren. Ferner erhält man unmittelbar einen Beweis des Satzes 2 des vorstehenden Vortrages.

Nun gelingt es den oben stehenden Satz 1 (die Lichtenbaumvermutung) zu beweisen, indem eine Isomorphie der Homotopiegruppen der Homotopiefaser $F\mathbb{C}$,

$$F\mathbb{C} \to BGL(\mathbb{C})^{top} \to BGL(\mathbb{C})^{top} \otimes \mathbb{Q} ,$$

$$\pi_{2i}(F\mathbb{C}) = 0 , \quad \pi_{2i-1}(F\mathbb{C}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{(Bott-Periodizität)},$$

und Tor $\pi_j(BGL\ \mathbb{C}^+)$ nachgewiesen wird.

Berichterstatter: M. Kolster (Münster)

Tagungsteilnehmer

Dr. P. Abramenko
Fachbereich Mathematik
Universität Frankfurt
Robert-Mayer-Str. 6-10
6000 Frankfurt 1

Dr. Ch. Deninger
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. A. Bak
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstr.
4800 Bielefeld 1

Prof. Dr. H. Esnault
Max-Planck-Institut für
Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
5300 Bonn 3

Dr. W. Bauer
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. G. Frey
Fachbereich Mathematik
Bau 36
Universität des Saarlandes
6600 Saarbrücken

Prof. Dr. E. Bayer
Départment de Mathématiques
Université de Genève
2-4 rue du Lièvre
CH-1211 Genève 24
Schweiz

Prof. Dr. J. Gamst
Fachbereich 3
Universität Bremen
Kufsteinerstraße
2800 Bremen 33

Prof. Dr. H. Behr
Fachbereich Mathematik
Universität Frankfurt
Robert-Mayer-Str. 6-10
6000 Frankfurt 1

Prof. Dr. W.-D. Geyer
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

Dr. Böcherer
Mathematisches Institut
Universität Freiburg
Albertstr. 23b
7800 Freiburg

Dr. G. Habdank
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstr.
4800 Bielefeld 1

Prof. Dr. G. Harder
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstr. 10
5300 Bonn 1

Dr. I. Kersten
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. H. Helling
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstr.
4800 Bielefeld 1

Prof. Dr. M. Kervaire
Département de Mathématiques
Université de Genève
2-4 rue du Lièvre
CH-1211 Genève 24
Schweiz

Prof. Dr. K. Hoechsmann
Dept. of Mathematics
University of Vancouver
4480 W. 6th Ave.
Vancouver, B.C. V6R1V3
Kanada

Prof. Dr. N. Klingen
Mathematisches Institut
Universität Köln
Weyertal 86-90
5000 Köln 41

Prof. Dr. F. Ischebeck
Mathematisches Institut
Westfälische Wilhelms-
Universität
Einsteinstr. 62
4400 Münster

Prof. Dr. M. Knebusch
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Dr. U. Jannsen
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. M. Kneser
Mathematisches Institut
Universität Göttingen
Bunsenstr. 3-5
3400 Göttingen

Prof. Dr. W. v.d.Kallen
Mathematisch instituut
Universiteit te Utrecht
Postbus 800.010
NL-3508 Utrecht TA
Niederlande

Prof. Dr. M. Kolster
Mathematisches Institut
Westf. Wilhelms-Universität
Einsteinstr. 62
4400 Münster

Prof. Dr. H. Lange
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

Prof. Dr. U. Rehmann
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstr.
4800 Bielefeld 1

Prof. Dr. M. Levine
Department of Mathematics
Boston University
504 Lake Northeastern University
Boston MA 02115
USA

Prof. Dr. J. Ritter
Mathematisches Institut
Universität Augsburg
Memminger Str. 6
8900 Augsburg

Prof. Dr. F. Lorenz
Mathematisches Institut
Westf. Wilhelms-Universität
Einsteinstr. 62
4400 Münster

Prof. Dr. J. Rohlfs
Fach Mathematik
Universität Eichstätt
Ostenstr. 26-28
8078 Eichstätt

Prof. Dr. R. Oliver
Matematisk Institut
Aarhus Universitet
Ny Munkegarde
DK-8000 Aarhus C
Dänemark

Dr. M. Rost
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. A. Pfister
Fachbereich Mathematik
Universität Mainz
Saarstr. 21
6500 Mainz

Dr. W. Ruppert
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

Prof. Dr. M. Rapoport
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
6900 Heidelberg

Prof. Dr. Schappacher
Mathematisches Institut
Universität Göttingen
Bunsenstr. 3-5
3400 Göttingen

Prof. Dr. W. Scharlau
Mathematisches Institut
Westf. Wilhelms-Universität
Einsteinstr. 62
4400 Münster

Prof. Dr. U. Stuhler
Fachbereich 7 Mathematik
Gesamthochschule Wuppertal
Gaußstr. 20
5600 Wuppertal 1

Dr. C. Scheiderer
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2
8520 Erlangen

Prof. Dr. G. Tamme
Mathematisches Institut
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Prof. Dr. P. Schneider
Mathematisches Institut
Universität Köln
Weyertal 86-90
5000 Köln 41

Prof. Dr. E. Viehweg
Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
5300 Bonn 3

Dr. R. Schwänzl
Fachbereich Mathematik
Universität Osnabrück
Albrechtstr. 28
4500 Osnabrück

Dr. A. Vogt
Mathematisches Institut
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

Dr. W.K. Seiler
Fakultät für Mathematik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5
6800 Mannheim

Dr. N. Walter
Fakultät für Mathematik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5
6800 Mannheim

Prof. Dr. Ch. Soulé
U.E.R. de Mathematiques
Université de Paris VII
2, Place Jussieu
F-75005 Paris
Frankreich

Dr. K. Wingberg
Mathematisches Institut
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg