MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 51/1987

Geometrie und Kombinatorik

21.11. bis 28.11.1987

Die Tagung fand unter der Leitung von Herrn H. Karzel (München) und Herrn H. Siemon (Ludwigsburg) statt.

Gemäß dem Thema der Tagung "Geometrie und Kombinatorik" behandelten die meisten Vorträge Fragen der endlichen Geometrie und kombinatorische Methoden in unendlichen Geometrien. Probleme und Begriffsbildungen der linearen Inzidenzgeometrie wurden angesprochen von J. André, L. Lenz, M. Marchi, K. Sörensen und H. Zeitler. J. André zeigte enge Zusammenhänge einer Klasse seiner nichtkommutativen Geometrien mit kombinatorischen Strukturen wie Assoziationsschemata auf. H. Lenz stellte ein elementares Axiomensystem für affine Räume vor, das nur auf den Grundbegriffen Punkt, Gerade und Inzidenz basierte. Jeder affine Raum ist ein Inzidenzraum, in dem für jedes Dreieck a,b,c die folgende Aussage (D) richtig ist: (D) Durch jeden Punkt x der Verbindungsgeraden $\overline{a,b}$ mit $x \neq a,b$ gibt es genau eine Gerade X, die $\overline{a,c}$, aber nicht $\overline{b,c}$ schneidet.

H. Lenz stellte das Problem, ob durch die Eigenschaft (D) neben den affinen – insbesondere auch im endlichen Fall – noch andere Inzidenzräume erfaßt werden, bei denen die Geraden mit mindestens vier Punkten inzidieren. Bei den von K. Sörensen betrachteten pseudoaffinen Räumen handelt es sich um Inzidenzräume, die zwar der Bedingung (D) genügen, bei denen aber jede Gerade nur drei Punkte enthält. Sörensen gelang eine inzidenzgeometrische Kennzeichnung der Klasse pseudoaffiner Räume, die man aus Gruppen vom Expernenten 3 erhält. Die pseudoaffinen Räume sind ihrerseits eine spezielle Klasse von Steinerschen

Tripelsystemen. Zeitler stellte eine Konstruktionsmethode, genannt "Perturbation" vor, mit der Steinersche Tripelsysteme, die Ovale enthalten, gewonnen werden können.

Bei der Untersuchung der Inzidenzstruktur kinematischer Räume, die von nichtquadratischen Divisionsalgebren herrühren, wird man auf die Notwendigkeit einer Erweiterung des Begriffs "projektiver Raum" geführt. Mit dieser Aufgabe befaßte sich M. Marchi, der in seinem Vortrag den Begriff "schwach projektiver Raum" einführte und einige Sätze dieser neuen Theorie bewies.

Fragen der nichtlinearen Inzidenzgeometrie wurden von J. Clay, A.Herzer, H.-J. Kroll und H. Mäurer angesprochen. Mit Hilfe von "circular planar nearrings" (Fastringe) konstruierte Clay Kreisstrukturen, die man als fehlerkorrigierende Codes wählen kann und die man in der Cryptographie anwenden kann. Zur Konstruktion expliziter Beispiele hat er ein Computer-Programm entwickelt. Herzer ging auf die Zusammenhänge zwischen Automorphismen einer Kettengeometrie und Jordan-Automorphismen im zugehörigen Koordinatenkörper ein, und Mäurer gab eine genaue Kennzeichnung der Möbius-Transformationen PGL(2,K) über einem quadratisch abgeschlossenen Körper K mit Char $K \neq 2$ an. Kroll konnte aufgrund von Resultaten von A. Kreuzer alle endlichen halbgeordneten Kreisstrukturen bestimmen.

Unter dem Thema Parallelismen, kinematische Räume und ihre Verallgemeinerung, kann man die Vorträge von H. Hotje, H. Karzel, H.-J Kroll (2. Vortrag) und R.-H. Schulz zusammenfassen. Hotje betrachtete die Struktur der kinematischen Räume, die den Gruppen $PSL(2,p^k)$ zukommen, und Schulz machte Angaben zur Klassifizierung und einer vereinfachten Konstruktion transversaler Translationsstrukturen. Vor einigen Jahren konnte G. Kist zeigen, daß alle gelochten Räume projektiv einbettbar sind, sofern die Geraden mit mindestens neun Punkten inzidieren. Aufgrund neuerer Resultate von Kroll und Karzel genügen gelochte Doppelräume dem Prismenaxiom und können daher zu kinematischen Räumen gemacht werden.

R. Artzy gab Darstellungen von Kollineationsgruppen affiner Ebenen durch Gruppen mit Relationen an, H. Siemon zeigte, für welche Untergruppe U der Kollineationsgruppe Γ einer desarguesschen affinen Ebene die Automorphismengruppe von U zu Γ isomorph ist, und K. Strambach stellte alle Multiplikationen $\mu : M \times M \to M$ vor, die eine auf M zweifach transitive Gruppe als

Automorphismengruppe gestatten. W. Heise führte einen eleganten Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes mit kombinatorischen Methoden vor. J.C. Fisher stellte das Problem, ob es endliche projektive Ebenen gibt und hierin Korrelationen, bei denen kein Punkt mit seiner Bildgeraden inzidiert. H. Wefelscheid ging auf Zusammenhänge zwischen gekoppelten Gruppen und semidirekten Produkten ein und berichtete, daß es seiner Doktorandin M. Hille erstmalig gelungen ist, mit Gruppenkopplungen nicht planare KT-Fastkörper zu konstruieren.

Über Datenerfassung durch Begriffsverbände und die hierzu in Darmstadt geleistete Arbeit berichtete K.E. Wolff. Mit kombinatorisch regulären Polyedern und Einbettungen im euklidischen Raum beschäftigte sich J.M. Wills, der seine Resultate mit Lichtbildern und selbstgebastelten komplizierten Modellen veranschaulichte.

Gleichzeitig mit dieser Tagung fand eine Fortbildungstagung für Gymnasiallehrer statt. Auf einer gemeinsamen Abendveranstaltung führte zunächst Wills Lichtbilder und Modelle von Polyedern vor, und anschließend skizzierte J. Misfeld einen elementargeometrischen Beweis zur Existenz der 17 ebenen Ornamentgruppen. Anhand von Lichtbildern zeigte Misfeld, daß man in Fußbodenmosaiken der Cosmatenkunst des 12. bis 14. Jahrhunderts von Kirchen Roms 14 dieser Gruppen realisiert findet.

Vortragsauszüge

J. ANDRÉ:

Endliche nichtkommutative Geometrie und kombinatorische Strukturen

Wir betrachten endliche P-Räume, d.h. Strukturen $\mathbf{R} = (X, \langle\ ,\ \rangle, F)$ mit $\langle\ ,\ \rangle : X^2 \to F$, $x \square y := \{x\} \cup \{z \mid \langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle\} \cup \{\langle x,y\rangle\}$ (J. Pfalzgraf). Die $|X|$-reihige Matrix N_f, die durch $N_f(x,y) = 1$ für $\langle x,y\rangle = f$, $= 0$ sonst, definiert ist, erweist sich als Nachbarschaftsmatrix zum Diagraphen $G_f := (X, Y_f)$ mit $Y_f := \{(x,x') \mid \langle x,x'\rangle = f\}$. Der Nachbarschaftsraum $\mathbf{V}$ bzw. die Nachbar-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

schaftsalgebra **A** ist der/die von allen N_f ($f \in F$) aufgespannte Unterraum bzw. Unteralgebra. Ersichtlich gilt stets $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{V}$. Genau dann ist der Raum **R** stark quasiaffin (d.h. die Bedingung des "Abtragens ähnlicher Dreiecke" gilt in verschärfter Form), wenn $\mathbf{A} = \mathbf{V}$ ist. Diese stark quasiaffinen Räume hängen eng mit gewissen kombinatorischen Strukturen, wie Assoziationsschemata und Verallgemeinerungen, zusammen (vgl. etwa Bannai, Ito: Algebraic Combinatorics I, Benjamin, 1984).

R. ARTZY:

Presentations for AG(2,p)

A presentation for the collineation group of the free affine plane extended from one fundamental triangle is known to be $\langle r,s,t;\ r^2,s^3,(rs)^2,t^4,(rt)^4\rangle$ [Artzy: Algebras, Groups and Geometries (1985)]. On the other hand, it is known [Artzy: Riveon Lematematika 7 (1954)] that the Hexagon condition and a very special Desargues condition in all 4-webs that contain one fixed 3-web in an affine plane, suffice to imply that the plane can be coordinatized by a prime field. These incidence conditions and the condition char = 3 are now imposed on the free plane and represented as relators, and for the group AG(2,3) of order 432, one obtains then $\langle r,s,t;\ r^2,s^3,(rs)^2,t^4,(rt)^2,u^3,(ru)^2 = (ur)^2,(rut^{-1})u = u(rut^{-1})\rangle$ with $u := st^2s^2t^2$. For AG(2,p) with $p>3$ prime, one additional generator, corresponding to the transformation $(x,y) \to (x,ky)$ with k a primitive root mod p, must be added, and it is conjectured that then a presentation can be obtained by the same method.

J.R. CLAY:

Circular Planar Nearrings

From the field of complex numbers $(\mathbf{C},+,\cdot)$ one constructs a planar nearring $(\mathbf{C},+,*)$ where $0*b = 0$ and $a*b = (|a|^{-1}\ a)\ b$. For $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\setminus\{0\}$, one gets from $\mathbf{C}^* * a+b$ exactly the points of the circle with radius $|a|$ and center b.

Using this motivation, one constructs numerous planar nearrings $(N,+,\cdot)$ where $B^* = \{N^*a+b \mid a\neq 0,\ a,b \in N\}$ consists of "circles" N^*a+b with "center" b and "radius" a, where $N^* = N\setminus\{0\}$. These incidence structures $(N,B^*,\in)$ are said to be <u>circular</u> if every three distinct points $x,y,z \in N$ belong to <u>at most</u> one "circle" $N^*a+b \in B^*$.

Two properties of these circular planar nearrings seem to be very useful. First is that the "circles" N^*a+b have "center" b and "radius" a, and second is that three distinct points always belong to <u>at most</u> one "circle". In addition to $(N,B^*,\in)$ being a balanced incomplete block design, if $|N| < \infty$, one gets nice properties for error correcting codes, and applications to cryptography. Geometric considerations leed to numerous analogies and contrasts to properties of circles in the plane **C**. One of the more interesting are the models of finite tori within finite circular planar nearrings.

J.C. FISHER:

<u>Does there exist a correlation of PG(2,q) having no absolute points?</u>

A <u>correlation</u> is an incidence-preserving automorphism of the plane that interchanges the point set with the line set. An <u>absolute point</u> is a point that lies on its image line. Thus my question in algebraic notation becomes, "does there exist a nonsingular 3×3 matrix (a_{ij}) over $GF(p^r)$ for which $\Sigma a_{ij}x_ix_j^{p^s} = 0$ (with i,j = 0,1,2 and $0\leqq s\leqq r$) has only the trivial solution $x_0 = x_1 = x_2 = 0$?" The existence of such a correlation would solve a combinatorial problem of mine. It is also of general interest; for example, such a correlation could be used in the construction of the "tight triangle geometries" of M. Ronan. It is easy to show that for S=0 (i.e. for $\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$) the answer is no – there are no "imaginary" conics in PG(2,q); this suggests a negative answer to my question! On the other hand, it is easy to construct homogeneous equations of any degree $n\geq 3$ having only a trivial solution; this suggests a positive answer to my question!

W. HEISE:

Ein einfacher Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes

Es seien $n = 4t + (\frac{-1}{n})$ und p zwei verschiedene Primzahlen, $J \neq 1$ eine n-te Einheitswurzel über $GF(p)$, $\xi = \sum_{(\frac{i}{n})=1} J^i$ und $\xi' = \sum_{(\frac{j}{n})=-1} J^j$. Mit einer einfachen kombinatorischen Überlegung berechnet man für die Fälle $(\frac{-1}{n}) = -1,+1$ den Wert $\xi\xi' = \sum_{u=0}^{n-1} \mu_u J^u = \mu_0 - \mu_1$. Daraus ergibt sich die Polynomgleichung $(z-\xi)(z-\xi') = z^2 + z - (\frac{-1}{n})t$

Die Untersuchung, unter welchen Bedingungen an den quadratischen Charakter von n modulo p und von p modulo n dieses Polynom über $GF(p)$ in Linearfaktoren zerfällt, führt auf das quadratische Reziprozitätsgesetz.

A. HERZER:

Die Automorphismengruppe der Kettengeometrien über endlich dimensionalen Algebren

Ein Isomorphismus $\alpha: \Sigma(K,A) \to \Sigma(K,B)$ von Kettengeometrien heißt fundamental, wenn $[1,0]\alpha = [1,0]$, $[1,1]\alpha = [1,1]$ und $[0,1]\alpha = [0,1]$ gilt. Es wird $(A:K) = n < \infty$ vorausgesetzt. Definiere $\sigma: A \to B$ durch $[a^\sigma,1] = [a,1]^\alpha$. Es wird α schon von σ bestimmt. Satz: σ ist ein Jordan-Isomorphismus. Umgekehrt: Ist σ ein Algebren-Isomorphismus oder -Anti-Isomorphismus, oder ist A eine lokale Algebra, so läßt sich σ zu einem Isomorphismus α der Kettengeometrien $\Sigma(K,A) \to \Sigma(K,B)$ fortsetzen. Es gibt isomorphe Kettengeometrien zu nicht-isomorphen Algebren (sogar auch nicht einmal anti-isomorphen Algebren). Es werden Beweisschritte erörtert und Beispiele eigentlicher Jordanisomorphismen vorgestellt. $\sigma: A \to B$ Jordan-Homomorphismus: $1^\sigma = 1$ und $(uwu)^\sigma = u^\sigma w^\sigma u^\sigma$.

H. HOTJE:

PSL(2,p^k) als kinematischer Raum

Die Gruppe $G := PSL(2,p^k)$ besitzt eine Partition f von Untergruppen mit der Eigenschaft "$g \in G$, $F \in f \Rightarrow F^g \in f$" und läßt sich daher als kinematischer Raum, d.h. als gefaserte zweiseitige Inzidenzgruppe auffassen. Es wird erläutert, daß G auf verschiedene Weisen als Gruppe aufgefaßt werden kann, die auf einer echten Teilmenge $T \subset G$ durch Konjugation treu operiert. Im Fall $p \neq 2$ und T = Menge der Involutionen, ist T ein Teilraum und die Operation auf T hat Ähnlichkeiten mit der kinematischen Abbildung nach Blaschke/Grünwald.

H. KARZEL:

Endliche kinematische Räume

In jedem kinematischen Raum lassen sich zwei, ein Links- und ein Rechtsparallelismus definieren, die dem Doppelraumaxiom "Wenn $A \parallel_l B$, $C \parallel_r D$, $C \cap A$, $C \cap B$, $D \cap A \neq \emptyset$ ist, dann auch $D \cap B \neq \emptyset$" und dem Prismenaxiom genügen. Bereits früher wurde von H.-J. Kroll, K. Sörensen und dem Vortragenden gezeigt, daß jeder Prismenraum als kinematischer Raum darstellbar ist und dann, daß jeder projektive Doppelraum schon dem Prismenaxiom genügt. Dieses Resultat konnte dann Kroll auf affine und geschlitzte Doppelräume ausdehnen. In dem Vortrag wurde berichtet, daß sogar gelochte Doppelräume (diese wurden von G. Kist inzidenzgeometrisch gekennzeichnet) dem Prismenaxiom genügen. Ferner wurde eine Klassifizierung dieser Doppelräume angegeben, die eine genaue Bestimmung dieser Strukturen gestatten.

H.-J. KROLL:

Endliche halbgeordnete Kreisstrukturen

Es sei $(P,\mathbf{K})$ eine Inzidenzstruktur mit $|\mathbf{K}| \geq 2$, so daß durch je drei verschiedene Punkte $a,b,c \in P$ genau ein Kreis aus $\mathbf{K}$ geht und auf jedem Kreis

wenigstens fünf Punkte liegen. Auf der Menge $P^{(4)}$ der konzyklischen Punktequadrupel (a,b,c,d) mit $a,b \neq c,d$ sei eine Trennfunktion $\tau: P^{(4)} \to \{-1,1\}$, $(a,b,c,d) \to [a,b|c,d]$ gegeben, also eine Abbildung mit der Eigenschaft:
A1 Für je fünf konzyklische Punkte a,b,c,d,e mit $a,b \neq c,d,e$ gilt $[a,b|c,d][a,b|d,e] = [a,b|c,e]$.

$(P,\mathbf{K},\tau)$ heißt halbgeordnete Kreisstruktur, wenn für jeden Punkt $p \in P$ die Ableitung $\mathbf{A}(p) = (P\backslash\{p\},\{C\backslash\{p\} \mid C \in \mathbf{K},\ p \in C\})$ bzgl. der Zwischenfunktion τ_p: $(a,b,c) \to [p,a|b,c]$ eine halbgeordnete Ebene ist, d.h. wenn für $(\mathbf{A}(p),\tau_p)$ das Axiom von Pasch erfüllt ist und wenn es ein $K \in \mathbf{K}$ und vier verschiedene Punkte $a,b,c,d \in K$ gibt mit $p \in K$, $p \neq a,b,c,d$ und $[p,c|a,b] = -1$, $[p,d|a,b] = 1$.
Jede miquelsche Möbius-Ebene mit Charakteristik $\neq 2$, deren Ordnung größer 4 ist, läßt sich halbordnen.
A. Kreuzer hat alle endlichen halbgeordneten Ebenen bestimmt. Mit dieser Klassifikation läßt sich der folgende Satz beweisen:
Satz. Jede endliche halbgeordnete Kreisstruktur ist eine Möbius-Ebene ungerader Ordnung, deren Ableitungen desarguessche affine Ebenen sind.

Höherdimensionale Prismenkonfugurationen

Es sei $(P,\mathbf{G},\parallel_l,\parallel_r)$ ein Doppelraum, wobei $(P,\mathbf{G})$ ein Austauschraum ist. Unter einer l-Prismenkonfiguration $\pi = (G_1,G_2,G_3,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)$ verstehen wir drei verschiedene Geraden G_i zusammen mit sechs verschiedenen Punkten $a_i,b_i \in G_i$, so daß $G_1 \parallel_r G_2 \parallel_r G_3$, $\overline{a_1,a_2} \parallel_l \overline{b_1,b_2}$ und $\overline{a_2,a_3} \parallel_l \overline{b_2,b_3}$ gilt. Wir sagen, daß sich π schließt, wenn auch $\overline{a_3,a_1} \parallel_l \overline{b_3,b_1}$. Es zeigt sich, daß sich unter einer schwachen Zusatzbedingung jede 5-dimensionale Prismenkonfiguration schließt.

H. LENZ:

Elementare Axiome der affinen Geometrie

Ein linearer Raum ist eine Inzidenzstruktur, in der durch je zwei Punkte genau eine Gerade geht. Ein Unterraum ist eine Punktmenge, die mit je zwei Punkten deren Verbindungsgerade enthält. Eine Ebene ist der von drei nicht kollinearen Punkten erzeugte Unterraum.

F. BUEKENHOUT hat gezeigt: Jeder lineare Raum mit mindestens 4 Punkten auf mindestens einer Geraden, in dem jede Ebene eine affine Ebene ist, ist entweder selbst eine affine Ebene oder ein affiner Raum über einem Schiefkörper. Dieser Satz soll benützt werden, um affine Räume (mit mindestens 4 Punkten auf einer Geraden) durch elementare Axiome zu kennzeichnen, welche nur die Grundbegriffe Punkt, Gerade und Inzidenz verwenden.

H. MÄURER:

Eine Bemerkung zur Gruppe der Möbiustransformationen

Es wurde gezeigt, daß die Permutationsgruppen PGL(2,K), K ein quadratisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$, durch die beiden folgenden Eigenschaften charakterisiert werden können:

(i) Jedes Element $\neq 1$ hat wenigstens einen und höchstens zwei Fixpunkte

(ii) Zu je zwei verschiedenen Punkten existiert eine Involution, die diese beiden Punkte festläßt.

M. MARCHI:

Generalized Projective Spaces

Let $(\mathbf{P},\mathbf{R})$ be an incidence space and $\Delta(a_1,a_2,a_3)$ be any triangle. By a transversal T of Δ we shall mean a line such that $a_i \notin T$ and $T \cap \overline{a_i a_j} \neq \emptyset$ for $i,j \in \{1,2,3\}$; let $\mathbf{T}(a_1,a_2,a_3)$ be the set of all transversals of Δ. By a section line S of Δ we shall mean a line such that there exists a permutation $\{i,j,h\}$ of $\{1,2,3\}$ such that $a_i \in S$ and $\overline{a_j a_h} \cap S$ is a point of a suitable transversal line; let $\mathbf{S}(a_1,a_2,a_3)$ be the set of all section lines of Δ.
The incidence space $(\mathbf{P},\mathbf{R})$ will be called weak projective space if for any triangle $\Delta(a_1,a_2,a_3)$ we have: i) $\mathbf{T}(a_1,a_2,a_3) \neq \emptyset$; ii) $\forall X,Y \in \mathbf{T}(a_1,a_2,a_3) \cup \mathbf{S}(a_1,a_2,a_3)$: $X \cap Y \neq \emptyset$. By seting $\mathbf{G}(a_1,a_2,a_3) := \mathbf{T}(a_1,a_2,a_3) \cup \mathbf{S}(a_1,a_2,a_3) \cup \{\overline{a_1,a_2},\overline{a_2,a_3},\overline{a_3,a_1}\}$ we have:

Theorem 1. Let $(\mathbf{P},\mathbf{R})$ be a weak projektice space and $\Delta(a_1,a_2,a_3)$ be any triangle. Further let $\tilde{\mathbf{P}}(a_1,a_2,a_3) := \{X \cap Y \mid X,Y \in \mathbf{G}(a_1,a_2,a_3),\ X \neq Y\}$ and $\tilde{\mathbf{G}}(a_1,a_2,a_3) := \{G \cap \mathbf{P}(a_1,a_2,a_3) \mid G \in \mathbf{G}(a_2,a_2,a_3)\}$. Then the pair $(\tilde{\mathbf{P}}(a_1,a_2,a_3),\tilde{\mathbf{G}}(a_1,a_2,a_3))$ is a projective plane.

<u>Theorem</u> 2. Let $(\mathbf{P},\mathbf{R})$ be a weak projective space such that for any two triangles $\Delta(a_1,a_2,a_3)$, $\Delta(a_1,a_2,b)$ the condition " $\overline{a_1,a_2} \cap \mathbf{P}(a_1,a_2,a_3) = \overline{a_1 a_2} \cap \mathbf{P}(a_1,a_2,b)$ " holds. For $a,b \in \mathbf{P}$, $a \neq b$ let $\widetilde{a,b} := \overline{a,b} \cap \mathbf{P}(a,b,c)$, where c is any point with $c \notin \overline{a,b}$, and let $\tilde{\mathbf{R}} := \{\widetilde{a,b}: a,b \in \mathbf{P},\ a \neq b\}$. Then $(\mathbf{P},\tilde{\mathbf{R}})$ is a projective space and all lines of the set $\mathbf{R}\setminus\tilde{\mathbf{R}}$ are projective subspaces of $(\mathbf{P},\tilde{\mathbf{R}})$.

J. MISFELD:

<u>Realisierung der ebenen Ornamentgruppen in der Cosmatenkunst in den Kirchen Roms</u>

Im 12. bis 14. Jahrhundert waren Mitglieder der Künstlerfamilie Cosma in Italien als Baumeister und Künstler tätig. Sie schmückten insbesondere in Kirchen Wände, Fußböden, Säulen, Altäre etc. mit reichhaltigen Ornamenten aus farbigem Stein und später aus Glas aus. Nach einer Skizze eines elementar-geometrischen Beweises der Existenz von 17 ebenen Ornamentgruppen wurden hiervon 14 Gruppen, die in Fußbodenmosaiken realisiert sind (u.a. Lateranbasilika, S. Maria Maggiore, S. Clemente, Sixtinische Kapelle), als Dias vorgeführt.

R.-H. SCHULZ:

<u>Zur Klassifizierung von transversalen Translationsstrukturen</u>

BILIOTTI, MICELLI und der Autor konnten zeigen, daß die Translationsgruppe einer transversalen Translationsstruktur ("(s,k,λ)-translation transversal design") von einem der folgenden Typen ist:

(i) eine p-Gruppe

(ii) eine Hughes-Thompson-Gruppe (nur für $\lambda=1$)

(iii) eine Frobeniusgruppe.

Die Angabe von Beispielen des Typs (iii) für $\lambda > 1$ war bisher sehr kompliziert. Hier schildert nun der Autor eine vereinfachte Konstruktion solcher transversalen Translationsstrukturen (mit Parametern $s = q^{n-d}$, $k = q^{d-1} \cdot h$ und $\lambda = q^{(n-1)(d-1)}$ für $n-1 \geq d \geq 2$, $h \mid (q-1)$ und q Primzahlpotenz).

H. SIEMON:

Automorphismengruppen von Kollineationsgruppen

In einer früheren Untersuchung (J. of Geometry, **23** (1984), 83-93) habe ich gezeigt: Ist Char $\Sigma \neq 2$ (Σ Schiefkörper), ist $AG(2,\Sigma)$ die affine Ebene über Σ, Γ die volle Kollineationsgruppe von $AG(2,\Sigma)$, Dil die Dilatationsgruppe und T die Translationsgruppe, dann gilt Aut Dil $\simeq \Gamma$. Die verwendete Beweismethode kann für Char $\Sigma = 2$ nicht benützt werden. Einer Idee von H. Mäurer folgend, beweise ich die folgenden Sätze:

Satz I: Ist $G \trianglelefteq \Gamma$, $T \leq G$ und gilt:

1. Jeder Automorphismus σ von G respektiert die Richtungspartition von T;
2. Das Zentrum $Z(\Sigma)$ von Σ enthält ein $k_0 \neq 0,1$ mit $k_0{}^{\mu} = k_0$ für alle $\mu \in \text{Aut}\,\Sigma$;
3. Die Streckung $d\colon X \to Xk_0$ ist in G enthalten,

dann wird jeder Automorphismus von G durch einen inneren Automorphismus von Γ induziert.

Satz II: Ist Char $\Sigma \neq 2$, dann gilt: (a) Aut Dil $\simeq \Gamma$ (b) Aut A $\simeq \Gamma$ [A = affine Gruppe] (c) Aut $\Gamma \simeq \Gamma$

Insbesondere: Γ ist eine vollständige Gruppe.

Satz III: (a) Ist Char $\Sigma = 2$ und gibt es $k_0 \in Z(\Sigma)\backslash\{0,1\}$, dann gilt Aut Dil $\simeq \Gamma$, Aut A $\simeq \Gamma$ (b) Ist Char $\Sigma = 2$ und gibt es $k_0 \in Z(\Sigma)\backslash\{0,1\}$ mit $k_0{}^{\mu} = k_0$ für alle $\mu \in \text{Aut}\,\Sigma$, dann gilt Aut $\Gamma \simeq \Gamma$ (c) Ist Σ kommutativ, dann gilt Aut A $\simeq \Gamma$.

Anmerkung: Im Falle $G = GF(2^{a})$ können die Voraussetzungen von (b) nicht erfüllt werden.

K. SÖRENSEN:

Eine Klasse pseudoaffiner Räume

Es sei $(P,\mathbf{G})$ ein Inzidenzraum, in dem jede Ebene eine affine Ebene ist. Wenn $(P,\mathbf{G})$ die Ordnung 3 hat, heiße $(P,\mathbf{G})$ pseudoaffiner Raum.
Eine spezielle Klasse pseudoaffiner Räume erhält man folgendermaßen:
Es sei $(H,\ )$ eine Gruppe von Exponenten 3. Für $x,y \in H$ sei $x+y := x^{-1}yx^{-1}$. Definiert man für $x,y \in H$ mit $x \neq y$ als Verbindungsgerade $\overline{x,y} := \{x,y,-x-y\}$ und $\mathbf{L} := \{\overline{x,y} : x,y \in H \text{ mit } x \neq y\}$, dann ist $(H,\mathbf{L})$ ein pseudoaffiner Raum. Jeder Unterraum P von $(H,\mathbf{L})$ heiße z-pseudoaffiner Raum. Die z-pseudoaffinen Räume lassen sich mit Hilfe des Begriffs "zentrale Gerade" geometrisch kennzeichnen.
Eine Gerade G eines pseudoaffinen Raumes $(P,\mathbf{G})$ heißt zentral, wenn für alle $X,Y \in \mathbf{G}$ mit $G \parallel X,Y$ gilt $X \parallel Y$.

<u>Satz</u>. Für jeden pseudoaffinen Raum $(P,\mathbf{G})$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) $(P,\mathbf{G})$ ist z-pseudoaffin
(2) Es seien $A,C \in \mathbf{G}$ mit $A \parallel C$ und $x \in P$ mit $\{x \parallel A\} \neq \{x \parallel C\}$. Dann gibt es in der Ebene $\overline{\{x \parallel A\} \cup \{x \parallel C\}}$ eine zentrale Gerade.

K. STRAMBACH:

Anwendungen der Geometrie auf die Theorie der Funktionalgleichungen

Es wurden alle Multiplikationen $\mu\colon M \times M \to M$ vorgestellt, die eine zweifach transitive Gruppe Γ von Transformationen gestatten (für $\alpha \in \Gamma$ gilt also $[\mu(x,y)]^{\alpha} = \mu(x^{\alpha},y^{\alpha})$), sofern nur M eine endliche Menge, ein lokal kompakter zusammenhängender Raum (in diesem Fall wird Γ als Liesch vorausgesetzt) oder eine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (wobei Γ als eine algebraische Gruppe genommen wird) ist.

H. WEFELSCHEID:

Gekoppelte Gruppen

Ist G eine Gruppe und $\phi: G \to \mathrm{Aut}(G,)$; $g \to g_\phi$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

(•) $(g \cdot g_\phi(h))_\phi = g_\phi h_\phi$

dann ist $(G^\phi, \circ)$ mit der neuen Multiplikation $g \circ h = g \cdot g_\phi(h)$ wieder eine Gruppe. Man kann nun elementar zeigen, daß das semidirekte Produkt $N \otimes_s H$ zweier Gruppen N und H durch eine solche Kopplung δ aus dem direkten Produkt $N \otimes H$ hervorgeht: $(N \otimes H)^\delta = N \otimes_s H$.
Die umgekehrte Frage " Es sei G^ϕ eine gekoppelte Gruppe und gleichzeitig G^ϕ ein semidirektes Produkt $G^\phi \cong N \otimes_s H$, gilt dann stets $G \cong N \otimes H$?" ist bisher nur unter zusätzlichen Bedingungen beantwortbar. Beispiele von H.P. Kuhl lassen vermuten, daß unter den obigen Voraussetzungen $G \cong N \otimes H$ nicht generell gelten wird.

Die Relevanz, ganz allgemein Gruppenkopplungen zu untersuchen, wird anschließend aufgezeigt an der Konstruktion nicht planarer KT-Fastkörper durch Monika Hille (Duisburg).
Hier gehen spezielle Kopplungen auf elementarabelschen 2-Gruppen $\mathbb{Z}_2^{(\mathbb{Z}_2^G)}$, G = Gruppe ein.
Die von M. Hille konstruierten nichtplanaren KT-Fastkörper zeigen:
Es gibt (unendliche) scharf 3-fach transitive Gruppen (G,M) , deren Standuntergruppe $(G_a, M\backslash\{a\})$ nicht den Satz von Frobenius erfüllen, d.h. $K := \{\gamma \in G_a \mid \gamma(x) \neq x$ für alle $x \in M\backslash\{a\}\}$ ist keine Untergruppe von G_a.

J.M. WILLS:

Kombinatorisch reguläre Polyeder

Polyedrische Einbettungen endlicher regulärer Karten im euklidischen E^3 sind enge Analoga der regulären Polyeder und ideale Objekte der Computergrafik. Dabei ist ein Polyeder eine aus endlich vielen ebenen Polygonen selbstdurchdringungsfrei aufgebaute polyedrische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Diese **kombi–**

natorisch regulären Polyeder sind nicht durch metrische Zufälligkeiten, sondern durch die algebraische Struktur der Karte erklärt, deren Automorphismengruppe transitiv auf den Fahnen operiert.
Wir schließen Karten aus, die keine kombinatorischen Zellkomplexe sind. Für das Geschlecht $g = 0$ sind dann alle regulären Karten einbettbar: Es sind die 5 Platonischen Körper. Für $g = 1$ sind dann ebenfalls alle regulären Karten einbettbar: Man erhält 6 unendliche Serien kombinatorisch regulärer Tori. Am interessantesten ist der weitgehend offene hyperbolische Fall $g \geqq 2$. Wir zeigen polyedrische Einbettungen klassischer Karten (Riemannsche Flächen) von Felix Klein, Walter Dyck, H.S.M. Coxeter u.a.

K.E. WOLFF:

Datenrepräsentation mit Begriffsverbänden

Im Vortrag werden Anwendungsmöglichkeiten der von R. WILLE und B. GANTER (TH Darmstadt) entwickelten FORMALEN BEGRIFFSANALYSE an Beispielen aus der Kombinatorik, der Geometrie, aber auch der Psychosomatik (z.B. an GRID-Untersuchungen bei Magersuchtkranken) demonstriert. In der auf einer Formalisierung des Begriffs "Begriff" beruhenden Begriffsanalyse wird zu jedem "Kontext" (=Kreuzchentabelle) ein Verband, genannt der Begriffsverband des Kontextes, konstruiert, dessen Elemente -die "Begriffe"- bzgl. der Unterbegriff-Oberbegriff-Relation geordnet sind. Das Hasse-Diagramm des Begriffsverbandes enthält (nach geeigneter Beschriftung) die volle Information des Kontextes und gibt einen hervorragenden Überblick über die im Kontext gespeicherten Daten.
Eine kurze Computerdemonstration soll einen Einblick in die in der Forschungsgruppe Begriffsanalyse erstellten Algorythmen zur Berechnung und Zeichnung von Begriffsverbänden geben.

LITERATUR: WILLE, R.: Bedeutung von Begriffsverbänden, in: Ganter,B., Wille,R., Wolff,K.E. (Hrsg.), Beiträge zur Begriffsanalyse (BI Wissenschaftsverlag, Mannheim,Wien,Zürich,1987), 161-211.

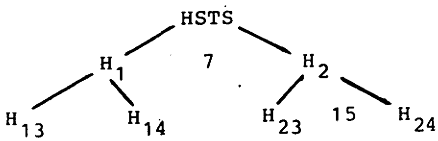
H. ZEITLER:

Konstruktion von STS(v) mit Mehrfachperturbationen

Satz. (RESMINI, 1981) *Genau für alle* $v \in$ HSTS *gibt es* STS(v) *mit einem Knotenoval.* HSTS: 7, 15+12n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz. *Genau für alle* $v \in H_{ij}$ *gibt es* STS(v) *mit einem Oval* O_i *und* STS(v) *mit einem Oval* O_j.
H_{13}: 19 + 24n, H_{14}: 27 + 24n, H_{23}: 31 + 24n, H_{24}: 39 + 24n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Diese Mengen sind paarweise disjunkt und es gilt HSTS = $H_{13} \cup H_{14} \cup H_{23} \cup H_{24} \cup \{7, 15\}$.



Beim Beweis wird mit einem STS(v) gestartet, das durch Anwendung des "Zentralverfahrens" gewonnen wurde. Der "Perturbationstrick" liefert neue Systeme STS(v). Sie enthalten Ovale mit anderen Tangentenkonfigurationen. Die Unterscheidung einer "Büschelmethode" und einer "Parallelenmethode" ergibt schließlich eine geometrische Charakterisierung der Mengen H_{ij}.

Berichterstatter: H. Karzel und H. Siemon

Tagungsteilnehmer

Prof.Dr. J. André
Fachbereich 9 - Mathematik
Universität des Saarlandes
Bau 27

6600 Saarbrücken

Prof.Dr. W. Heise
Mathematisches Institut
der TU München
Arcisstr. 21

8000 München 2

Prof. Dr. R. Artzy
Dept. of Mathematics
University of Haifa
Mount Carmel

Haifa 31 999
ISRAEL

Prof.Dr. A. Herzer
Fachbereich Mathematik
der Universität Mainz
Saarstr. 21

6500 Mainz

Prof.Dr. A. Barlotti
Istituto Matematico "U.Dini"
Universita di Firenze
Viale Morgagni 67/A

I-50134 Firenze

Prof.Dr. H. Hotje
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Dr. J. R. Clay
Dept. of Mathematics
Building 89
University of Arizona

Tucson, AZ 85721
USA

Prof.Dr. H. Karzel
Mathematisches Institut
der TU München
Arcisstr. 21

8000 München 2

Prof. Dr. J. C. Fisher
Istituto Matematico
Universita degli Studi
Viale Morgagni, 67/A

I-50134 Firenze

Prof.Dr. H.-J. Kroll
Mathematisches Institut
der TU München
Arcisstr. 21

8000 München 2

Prof.Dr. H. Lenz
Institut für Mathematik II
der Freien Universität Berlin
Arnimallee 3

1000 Berlin 33

Prof. Dr. K. Sörensen
Mathematisches Institut
der TU München
Arcisstr. 21

8000 München 2

Prof.Dr. H. Mäurer
Fachbereich Mathematik
der TH Darmstadt
Schloßgartenstr. 7

6100 Darmstadt

Prof.Dr. K. Strambach
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof. Dr. M. Marchi
Dipartimento di Matematica e
Informatica
Universita degli Studi di Udine
Via Zasiori, 6

I-33 100 Udine

Prof.Dr. H. Wefelscheid
Fachbereich Mathematik
der Universität-GH Duisburg
Postfach 10 16 29
Lotharstr. 65

4100 Duisburg 1

Prof.Dr. J. Misfeld
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof.Dr. J.M. Wills
Lehrstuhl für Mathematik II
Universität Siegen
Hölderlinstr. 3

5900 Siegen

Prof.Dr. R.-H. Schulz
Institut für Mathematik II
der Freien Universität Berlin
Arnimallee 3

1000 Berlin 33

Prof.Dr. K.E. Wolff
Fachhochschule Darmstadt
Schöfferstraße 3

6100 Darmstadt

Prof.Dr. H. Siemon
Sonnenrain 17

8701 Reichenberg

Prof.Dr. H. Zeitler
Fakultät für Mathematik und Physik
der Universität Bayreuth
Postfach 10 12 51

8580 Bayreuth

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft