

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 18a/1990

Mathematische Modellbildung

Tagung der Fachschaft Mathematik im Cusanuswerk

27. April bis 1. Mai 1990

Die Tagung¹ stand unter der Leitung von Herrn Matthias Bücker (Karlsruhe) und Frau Gisela Kurth (Würzburg) und verfolgte das Ziel, theoretische Methoden mathematischer Modellbildung vorzustellen und die bei ihrer Anwendung auftretenden Probleme und deren Lösungsmöglichkeiten zu diskutieren.

Die geladenen Referenten stellten in jeweils drei Vorträgen

- die Grundlagen mathematischer Modellbildung und Optimierungsmethoden zur Berechnung erstellter Modelle (M. Morlock),
- ein Modell zur Simulation der Wachstumsdynamik von Bäumen (H. Krieger),
- ein Modell der westdeutschen Wirtschaft (A. Steiner)

vor. Über die insgesamt neun Vorträge der einzelnen Referenten wird im Anschluß zusammenfassend berichtet. Die Tatsache, daß ein großer Teil der teilnehmenden AltcusanerInnen im Bereich der Modellbildung arbeitet, führte zu einem lebhaften Austausch zwischen universitärer Forschung und praktischer Anwendung, der durch die angenehme Atmosphäre und die hervorragend ausgestattete Bibliothek des mathematischen Zentrums sehr gefördert wurde.

Die 10 studierenden und 11 ehemaligen StipendiatInnen äußerten einhellig ihre Dankbarkeit für die Gastfreundschaft in Oberwolfach und den Wunsch, die Tagung des kommenden Jahres wieder in Oberwolfach durchzuführen.

¹ Fachschaftstagungen sind Teil der Bildungsarbeit der Bischöflichen Studienstiftung, Cusanuswerk, "bei denen in Zusammenarbeit mit kompetenten Fachleuten Spezialprobleme einer einzelnen Disziplin oder Grenzfragen mehrerer Wissenschaften erörtert werden." Neben den geförderten StudentInnen nehmen auch ehemalige StipendiatInnen der Fachrichtung an der Veranstaltung teil, die "in besonderer Weise Gelegenheit der Zusammenarbeit von Stipendiaten und Altcusanern" bietet. (vgl. Jahresbericht des Cusanuswerkes 1985, S.10)

M. Morlock:

Mathematische Modellbildung im Operations Research

Allgemeine Überlegungen zur Problematik math. Modellbildung:

Mathematische Modelle müssen eine komplexe Wirklichkeit vereinfachend, aber adäquat abbilden. Weil dies nicht ohne weiteres garantiert werden kann, müssen die aus mathematischen Modellen gewonnenen Ergebnisse kritisch begutachtet werden.

Verwendung math. Modelle zur Optimierung realer Vorgänge:

Eine typische Aufgabenstellung im Bereich des Operations Research ist die lineare Optimierung: gesucht wird ein x so, daß $c^T x$ minimal wird unter der Nebenbedingung $Ax \leq b$ (mit $x, c \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$). Als Lösungsmethode wurde der Simplexalgorithmus angesprochen und auf die Ellipsoidverfahren hingewiesen.

Eine weitere wichtige Aufgabenstellung ist die Optimierung eines sog. n -stufiger Entscheidungsprozesses: gesucht eine "Politik" (u_1, \dots, u_n) , die zum Ausgangszustand x_0 durch die rekursive Definition $x_j := f_j(x_{j-1}, u_j)$, ($j = 1, \dots, n$) eine Zustandsfolge (x_0, \dots, x_n) mit minimalen Kosten $\sum_{j=1}^n c_j(x_{j-1}, u_j)$ ergibt.

Es wurde ein Verfahren aus der diskreten dynamischen Optimierung besprochen, welches rekursiv und mit Speicherung aller gewonnenen Zwischenergebnisse arbeitet: seien $v_{n-j}^*(x_j)$ die minimalen Kosten bei Start im Zustand x_j . Wenn bereits alle $v_{n-j}^*(x_j)$ bekannt sind, dann ergibt sich nach der Bellmanschen Funktionalgleichung

$$v_{n-j+1}^*(x_{j-1}) = \min_u \{c_{j-1}(x_{j-1}, u) + v_{n-j}^*(f_j(x_{j-1}, u))\}.$$

In der Praxis verbietet durch die oft eintretende kombinatorische Explosion der hohe Rechenaufwand eine exakte Lösung vieler Probleme (insbesondere sei hier auf die sogenannten NP -vollständigen Probleme hingewiesen). Statt dessen verwendet man Heuristiken, die i.a. wesentlich schneller arbeiten. Sie basieren meist auf einfachen, dem "gesunden Menschenverstand" entsprechenden Ideen. Durch geschickte Auswahl und Kombination solcher Heuristiken – eine Aufgabe, die in Zukunft vielleicht Expertensysteme, also "Metaheuristiken" übernehmen könnten – lassen sich Verfahren gewinnen, die in der Praxis wegen der üblichen Unschärfe der Eingabedaten und der sich daraus ergebenden Modellierungsprobleme meist vollkommen ausreichen.

Am Beispiel des Travelling Salesman Problems wurden solche Verfahren vorgestellt, am Rechner demonstriert und diskutiert.

Schließlich wurde dargestellt, wie wichtig es zur Lösung praktischer Probleme ist, das heuristische Wissen nichtmathematischer Mitarbeiter dynamisch in den Optimierungsprozeß miteinzubeziehen. Dabei wird davon ausgegangen, daß im allgemeinen die Randwerte eines Problems nicht statisch sind, ihre Variabilität aber oft mathematisch schlecht faßbar ist (gemeint ist die Benutzung anderer Grundsubstanzen, eines veränderten Herstellungsverfahrens, anderen Transportmittel, ...). In Zusammenarbeit mit M. Bucker wurde ein für die chemische Industrie entwickeltes Verfahren

zur Planung und Kontrolle der Produktion vorgestellt. Mit Hilfe objektorientierter Programmierung werden zu untersuchende Prozesse sowie die "kürzesten Wege" graphisch so dargestellt, daß die Kreativität der Mitarbeiter angeregt wird. Ihren Ideen entsprechend werden Randbedingungen des Problems verändert und so eine optimale Lösung gesucht. Die Erfahrung zeigt, daß dieses Verfahren zu wesentlich besseren Ergebnissen führt.

H. Krieger:

Mathematische Modelle zur Simulation von Bäumen und deren Wachstumsdynamik

Es wurde ein Simulationsmodell der Wachstumsdynamik von Bäumen vorgestellt. Anhand dieses Beispiels wurde verdeutlicht, wie prinzipiell vorgegangen wird, um aus einer nichtmathematisch begründeten Theorie ein mathematisches Modell zu erstellen und wie umgekehrt die Auseinandersetzung mit der math. Modellbildung die Theorie beeinflußt.

Zugrunde liegt eine biologische Theorie über das Wachstum von Bäumen. In Zusammenarbeit mit Biologen wird das Gesamtmodell "Baum" in mehrere Teilmodelle zerlegt: Atmung, Transpiration, Photosynthese, Wachstum, Umwelt, Bodenwasser und Bodentemperatur. Diese Zerlegung erleichtert den Überblick und vereinfacht den Modellierungsprozeß, da die Teilmodelle zuerst einzeln realisiert und dann verknüpft werden können. Zunächst werden die abzubildenden Systemprozesse zusammengetragen, die Kausalzusammenhänge untersucht und ein Wirkungsdiagramm aufgestellt. Das Wirkungsdiagramm muß in die funktionalen Zusammenhänge zwischen Zustandsgrößen und Parametern übersetzt werden; diese lassen sich dann implementieren. Startwerte, d.h. Eingangsdaten lassen sich einfach durch Erhebungen an Bäumen erhalten, darauf aufbauend kann das Modell iterativ den Wachstumverlauf simulieren.

Ziel des Modells ist die Untersuchung von Einflüssen wie Luftverschmutzung, Bodenversauerung usw. auf das Wachstumsverhalten.

A. Steiner:

Ein mathematisches Modell der deutschen Wirtschaft

Es wurde die Entwicklung der Wirtschaftswissenschaften bei der Beschreibung ihres Fachgebietes mittels mathematischer Modelle dargestellt. Diese Entwicklung reicht

von statischen Modellen über begrenzte dynamischen Beschreibungen bis zu großen volkswirtschaftlichen Modellen mit mehr als hundert Variablen.

Statische Modelle beschreiben sowohl definitorische Zusammenhänge wirtschaftlich interessierender Größen als auch deren empirisch festgestellte Abhängigkeiten. Um Aussagen über das Übergangsverhalten des wirtschaftlichen Systems von einem Gleichgewichtszustand in einen anderen machen zu können, wurden die algebraischen Gleichungen der statischen Modelle zu dynamischen Differenzgleichungen erweitert. Die zeitlich diskreten Variablen sind also aggregierte Periodengrößen wie sie zur Deutung eines Wirtschaftsprozesses üblicherweise Verwendung finden (z.B. das Sozialprodukt eines Quartals).

Beispielhaft wurde das Multiplikator-Akzelerator-Modell von Samuelson vorgestellt.

Die Gleichungen einfacher dynamischer Modelle können analytisch und graphisch (z.B. kooperativ statische Analyse) untersucht werden. Sie beschreiben jedoch nur einen beschränkten Ausschnitt der Wirklichkeit, und ihre Prognosefähigkeit ist begrenzt. Zur Überwindung dieses Dilemmas wurden große Modelle entwickelt, die unterschiedlichen Zielsetzungen gerecht zu werden versuchen und deren Analyse oder Simulation nur durch Computereinsatz geleistet werden kann. Das über Jahre hinweg entwickelte Modell (mit zur Zeit 161 Gleichungen und 30 exogenen Größen) wird fortwährend ausgeweitet, indem über mehrere Stufen exogene Variablen endogenisiert und damit die Erklärungsfähigkeit des Modells sukzessive erweitert wird. Neben der Erweiterbarkeit ist ein besonderes Ziel dieses Modells, Zusammenhänge der Volkswirtschaftslehre didaktisch gut darzustellen. Deswegen werden i.allg. nichtlineare algebraische Gleichungen (Definitionsgleichungen) und lineare deterministische Differenzgleichungen verwendet, die v.a. heuristisch und mittels Korrelationsanalysen und einfacher Schätzverfahren bestimmt werden. Angewendet wird das Modell speziell bei der Analyse möglicher Steuerungsstrategien, die sich durch die Nutzung der 16 zur Verfügung stehenden Instrumentvariablen und der Beeinflussung manipulierbarer Parameter auszeichnen. Beispielhaft wurde die simulierte Wirkung einer Steuerreform mit bzw. ohne begleitende Zinssenkungsmaßnahmen dargestellt.

Es wurde schließlich die Problematik einer ceteris-paribus-Analyse bei nichtlinearen Systemen angesprochen, bei denen kein Superpositionsgesetz gültig ist. Man regte eine Sensitivitätsanalyse des Modells, eine stochastische Erweiterung oder die Bildung eines Fehlermodells an, um die Prognosegüte und Aussagekraft zu verbessern. Es wurde die Verwendung nichtlinearer Dynamikgleichungen als i.allg. adäquatere Beschreibung des Verhaltens wirtschaftlicher Systeme erwähnt. Um die didaktische Einfachheit zu erhalten und aufgrund des zu großen Aufwandes, wurde bis heute auf derartige qualitative Entwicklungen des Modells verzichtet.

Berichterstatter: L. Faulstich, K.-D. Hilliges, G. Kurth, G. Zimmermann.

TagungsteilnehmerInnen:

Andrea Bigge
Querenburger Höhe 285
4630 Bochum

Alexander Bockmayr
Institut für Logik, Komplexität
und Deduktionssysteme
Universität Karlsruhe
7500 Karlsruhe

Dr. Matthias Bücker
Institut für Wirtschaftstheorie
und Operations Research
Universität Karlsruhe
7500 Karlsruhe

Christian Dickopp
Nizzaallee 20
5100 Aachen

Lukas Faulstich
Wassergasse 15
8400 Regensburg

Andreas Gastel
Stüzelberger Straße
4000 Düsseldorf 11

Georg Heeg
Baroper Straße 337
4600 Dortmund 50

Konrad Helms
Friesenstraße 62
2900 Oldenburg

Klaus-Dieter Hilliges
Vischerstraße 24
7000 Stuttgart 80

Andrea Ilgner
Neckarstraße 6
5205 St. Augustin 2

Bernd Irlenbusch
Wipperführer Staße 304
5067 Kürten / Eichhof

Albrecht Kliem
Haydnstraße 5
5300 Bonn 1

Manfred Knick
Forschungsinstitut für
anwendungsorientierte
Wissensverarbeitung
Helmholtzstraße 16
7900 Ulm

Holger Krieger
Institut für Umweltanalyse
Gesamthochschule Kassel
3500 Kassel

Gisela Kurth
Friedenstraße 47
8700 Würzburg

Wilhelm Lahr
Lindenweg 1
5460 Linz / Rhein

Ina Leiß
Im Kläuerchen 6a
6507 Oppenheim

Prof. Dr. Manfred Morlock
Institut für Wirtschaftstheorie
und Operations Research
Universität Karlsruhe
7500 Karlsruhe

Bernhard Rauch
Andreasstraße 9
8400 Regensburg

Wolfgang Ruß
Sandäckerstraße 10
7400 Tübingen 6

Helmut Schmitt
Jahnstraße 7
6370 Oberursel 5

Prof. Dr. Alfons Steiner
Institut für Wirtschaftspolitik
und Wirtschaftsforschung
Universität Karlsruhe
7500 Karlsruhe 1

Kai Tetzlaff
Mozartweg 14
2351 Trappenkamp

Irmgard Walter
Keltenstraße 14
7250 Leonberg

Georg Zimmermann
Barfüßerweg 7
7900 Ulm

