Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 / 02249

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 43/1990

Arbeitsgemeinschaft Geyer-Harder
über
LOOP GROUPS
7.–13.10.1990

Die Tagung fand unter Leitung von P. Slodowy (Hamburg) statt. Sie hatte zum Ziel, einen Überblick über die Theorie der Schleifengruppen, d.h. der Gruppen (polynomialer, glatter etc.) Abbildungen des Kreises S^1 in eine kompakte oder komplexe Lie-Gruppe, sowie insbesondere auch deren Querverbindungen zur Physik und anderen Gebieten der Mathematik zu geben.

Das Interesse an diesen Schleifengruppen, die den einfachsten und bisher am besten verstandenen Spezialfall des allgemeinen Typs von Abbildungsgruppen von einer Mannigfaltigkeit in eine endlichdimensionale Lie-Gruppe darstellen, entstammt u.a. der Physik (Quantenfeldtheorie, insbesondere Eichtheorie). Hierauf wurde in einem Überblick zur Theorie des freien bosonischen Strings eingegangen. Zunächst wurden jedoch die Grundlagen der Theorie der Schleifengruppen erarbeitet, zu denen insbesondere auch die affinen Kac-Moody-Algebren mit ihrer reichhaltigen Strukturtheorie gehören, welche die klassischen halbeinfachen Lie-Algebren einschließen. Über die Charaktere von Moduln affiner Kac-Moody-Algebren bestehen Beziehungen zur Kombinatorik und zu Modulfunktionen. Zentraler Gegenstand der Vorträge war dann vor allem die Darstellungstheorie der Schleifengruppen, ihrer Lie-Algebren und der eng mit ihnen verbundenen Virasoro-Algebra. Dazu wurde gezeigt, wie sich Schleifengruppen in die eingeschränkte lineare Gruppe eines polarisierten Hilbertraums einbetten lassen. Als wesentlich müssen in diesem Zusammenhang auch die Faktorisierungssätze für Schleifen gelten, welche die klassischen Zerlegungen (z.B. die von Bruhat) verallgemeinern. Sodann wurde die Grassmannvarietät des polarisierten Hilbertraums und auf ihr das Determinantenbündel konstruiert. Damit ließ sich dann die Borel-Weil-Theorie auf den vorliegenden Fall

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

übertragen; an die Stelle der universellen Überlagerung der Gruppe treten hier jedoch zentrale Erweiterungen. Mit Hilfe dieser Konstruktion läßt sich dann eine Klasse von Darstellungen der Schleifengruppe, die sogenannten Darstellungen positiver Energie, angeben. Die genannten Objekte haben nun vielfältige Anwendungen: So wurde der Bottsche Periodizitätssatz mit ihrer Hilfe bewiesen, eine morsetheoretische Interpretation der Grassmannschen gegeben, die Anwendung auf die Klassifikation von Vektorbündeln demonstriert, und schließlich noch gezeigt, wie sich mit Hilfe der Grassmannmannigfaltigkeit Lösungen der Korteweg-de Vries-Gleichung gewinnen lassen.

Wichtigstes Hilfsmittel im letzten Teil der Tagung waren Vertexoperatoren, die in der Physik die Wechselwirkung, insbesondere die Emission und Absorption von Teilchen, beschreiben sollen. Um sie zu definieren, war zunächst einiger technischer Aufwand nötig; dann jedoch ließen sich mit ihrer Hilfe neue Darstellungen affiner Lie-Algebren gewinnen und die unitären Darstellungen der Virasoro-Algebra bestimmen. Hier besteht schließlich auch eine Querverbindung zur Theorie der sporadischen Gruppen: Frenkel, Lepowsky und Meurman haben nämlich die größte von ihnen, das Monster, als Automorphismengruppe einer speziellen Vertexoperatoralgebra konstruiert. Dies wurde von A. Meurman vorgestellt.

Vortragsauszüge

Klaus Altmann
Kac-Moody-Algebren, Strukturtheorie

Zu einer verallgemeinerten Cartan-Matrix A läßt sich über Erzeugende und Relationen eine Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}(A)$ konstruieren, wobei das Vorgehen weitgehend dem Satz von Serre für endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren entspricht. Es treten jedoch einige neue Effekte auf. So zerfallen die verallgemeinerten Cartan-Matrizen und damit auch die zugehörigen Algebren in drei Typen: den endlichen, den affinen und den indefiniten oder allgemeinen, wobei der erste Typ den endlichdimensionalen halbeinfachen Lie-Algebren entspricht. In den anderen beiden Fällen sind die Lie-Algebren unendlichdimensional; ihre Weyl-Gruppe W ist nicht mehr endlich, und es gibt sogenannte imaginäre Wurzeln, die unter W nicht mehr zu einfachen Wurzeln konjugiert sind. Während über den allgemeinen Typ noch sehr wenig bekannt ist, lassen sich die affinen Kac-Moody-Algebren $\mathfrak{g}$ als zentrale Erweiterungen der Schleifenalgebra $L(\mathring{\mathfrak{g}})$ einer endlichdimensionalen halbeinfachen Lie Algebra $\mathring{\mathfrak{g}}$ konstruieren. Explizit gilt:

$$\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathring{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t^{-1}, t] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

mit einem zentralen Element c und den Lie-Klammern $[d, t^i \otimes x] = it^i \otimes x$ und $[t^i \otimes x, t^j \otimes y] = t^{i+j} \otimes [x, y] + i\delta_{i,-j}(x, y)c$. Die zugehörige Weyl-Gruppe erweist sich dann als das semidirekte Produkt der Weyl-Gruppe von $\mathring{\mathfrak{g}}$ und ihrem Kowurzelgitter.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Bernd Steinert
Darstellungstheorie von Kac-Moody-Algebren

Neben der Definition der grundlegenden darstellungstheoretischen Begriffe wie Gewichtsraumzerlegung, (formaler) Charakter, Höchstgewichtsdarstellung und Verma-Modul für eine Kac-Moody-Algebra war das Hauptziel dieses Vortrages im Fall einer symmetrisierbaren verallgemeinerten Cartan-Matrix die Kac-Weylsche Charakterformel

$$\operatorname{ch} V = R^{-1} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, e(w(\lambda + \varrho) - \varrho)$$

mit $R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\operatorname{mult} \alpha}$ und $\varrho \in \mathfrak{h}^*$ mit $\varrho(h_i) = 1$ für integrable Höchstgewichtsmoduln mit höchstem Gewicht λ zu beweisen. Dazu ist es einerseits notwendig, die Operation des verallgemeinerten Casimir-Operators, wie ihn Kac definiert hat, auf solchen Höchstgewichtsmoduln zu betrachten, um eine erste einschränkende Bedingung für die in der Charakterformel auftretenden Gewichte zu erhalten. Ist der zugrundeliegende Modul integrabel, d.h. operieren die Erzeugenden der Kac-Moody-Algebra lokal nilpotent auf ihm, so ist eine Operation der Weyl-Gruppe W definiert. Diese Operation ergibt dann, daß alle in der gegebenen Darstellung des Charakters auftretenden Gewichte durch W aus dem höchsten Gewicht λ gewonnen werden können, und liefert dabei gleichzeitig auch die zugehörigen Multiplizitäten. Das Gewicht $\lambda = 0$ ergibt für den Nenner die gleiche Summendarstellung, wie sie oben im Zähler auftritt. Spezialisiert mensch diese Nennerformel schlußendlich für die einfachste affine Kac-Moody-Algebra $A_1^{(1)}$ mit der Cartan-Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, so nimmt sie die Gestalt des Jacobi-Tripelprodukts an. Dies ist das einfachste Beispiel der sogenannten Macdonald-Identitäten.

Wolfgang Schanz
Schleifengruppen und ihre Lie-Algebren

Die (stetigen, glatten etc.) Abbildungen $\operatorname{Map}(X, G)$ einer kompakten Mannigfaltigkeit X in eine endlichdimensionale Lie-Gruppe G sind Beispiele für unendlichdimensionale Lie-Gruppen. Von ihnen sind die Schleifengruppen $LG = \operatorname{Map}(S^1, G)$ bisher am besten verstanden.

Ist G eine einfache Gruppe, so gilt $\operatorname{Aut}(\operatorname{Map}(X, G))^o \cong \operatorname{Diff}(X) \ltimes \operatorname{Map}(X, \operatorname{Aut} G)$. Wichtige Untergruppen von LG sind die reell-analytischen, die rationalen und die

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

polynomialen Schleifen in G, die für ein halbeinfaches G dicht in der Schleifengruppe liegen. Schließlich gibt es eine natürliche Zuordnung einer Konjugationsklasse maximaler abelscher Untergruppen von LG zu jeder Konjugationsklasse in der Weyl-Gruppe von G.

Wesentlich für die weiteren Vorträge sind die zentralen Erweiterungen von LG und $L\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so wird jede zentrale Erweiterung $\tilde{L}\mathfrak{g}$ von $L\mathfrak{g}$ durch einen Kozyklus der Form

$$\omega(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \xi(\vartheta), \eta'(\vartheta)\rangle d\vartheta$$

für eine symmetrische, invariante Bilinearform $\langle .,. \rangle$ auf $\mathfrak{g}$ gegeben.

Wichtig ist weiterhin die zentrale Erweiterung Vir der Lie-Algebra der Vektorfelder auf S^1, die sogenannte Virasoro-Algebra.

Gerd Müller
Die zentrale Erweiterung der Schleifengruppen

G sei eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dazu definiert der Kozykel ω aus dem letzten Vortrag eine zentrale Erweiterung

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \tilde{L}\mathfrak{g} \longrightarrow L\mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

Dann stellt sich die Frage, wann $\tilde{L}\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe ist.

Für ein einfach zusammenhängendes G kommt die obige Erweiterung genau dann von einer Erweiterung $1 \to S^1 \to \tilde{L}G \to G \to 1$ her, wenn $\omega/2\pi$ eine ganze Kohomologieklasse auf LG definiert; und dies ist auch äquivalent dazu, daß für alle Kowurzeln $\check{\alpha}$ von G $\langle \check{\alpha}, \check{\alpha}\rangle \in \mathbf{Z}$.

Ist G nicht einfach zusammenhängend, aber halbeinfach, so kommt die obige Erweiterung unter der Voraussetzung $\langle \check{\alpha}, \check{\alpha}\rangle \in \mathbf{Z}$ von einer Gruppenerweiterung $1 \to \pi_1(G) \times S^1 \to \tilde{L}G \to LG \to 1$ her.

Für $G = U_n$ kommt die Erweiterung zu der Form $\langle A, B\rangle = -\mathrm{Spur}(AB)$ von einer zentralen Erweiterung $1 \to S^1 \to \tilde{L}U_n \to LU_n \to 1$ her.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Stefan Bechtluft-Sachs
Die eingeschränkte lineare Gruppe eines Hilbertraums

Für jedes n läßt sich $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ durch lexikographische Anordnung der Basiselemente mit dem Hilbertraum $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ identifizieren. Dieser besitzt durch Fourierentwicklung eine natürliche Polarisation $H = H_+ \oplus H_-$. Die eingeschränkte lineare Gruppe $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ besteht dann aus den Automorphismen von H, welche diese Polarisierung bis auf Hilbert-Schmidt-Operatoren erhalten. Die Schleifengruppen $L\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ lassen sich in $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ einbetten.

Es gibt eine zentrale Erweiterung $\widetilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ von $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ durch S^1, deren Einschränkung auf LU_n die universelle zentrale Erweiterung dieser Gruppe ist. Die Bedeutung von $\widetilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ liegt darin, daß $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ zwar auf der im nächsten Vortrag zu definierenden Grassmannvarietät $\mathrm{Gr}(H)$, nicht aber auf dem Determinantenbündel Det über $\mathrm{Gr}(H)$ operiert; $\widetilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ dagegen operiert auf Det und überlagert die Operation von $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ auf der Basis.

Rainer Jung
Die Grassmannvarietät eines polarisierten Hilbertraums

Die Grassmannvarietät $\mathrm{Gr}(H)$ eines polarisierten Hilbertraums $H = H_+ \oplus H_-$ ist eine komplexe Hilbertmannigfaltigkeit, deren Punkte gewissen Unterräumen W von H entsprechen, so daß $H_+ \in \mathrm{Gr}(H)$, und U_{res} transitiv auf $\mathrm{Gr}(H)$ operiert, wobei die Standgruppe $U(H_+) \times U(H_-)$ ist.

Wie im endlichdimensionalen Fall läßt sich eine Stratifikation von $\mathrm{Gr}(H)$ angeben. Dabei sind die Strata Σ_S, die durch $S \in \mathfrak{S} = \{\, T \subset \mathbb{Z} \mid \#(\mathbb{N} \setminus T) < \infty, \#(T \setminus \mathbb{N}) < \infty \,\}$ parametrisiert werden, zusammenziehbare Untermannigfaltigkeiten, die Bahnen einer Untergruppe von $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ sind. Ihre Kodimension in $\mathrm{Gr}(H)$ ist endlich. Eine dichte Untermannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_0(H) \subset \mathrm{Gr}(H)$ besitzt eine Zerlegung in endlichdimensionale Zellen C_S, die mensch dual zur Stratifikation von $\mathrm{Gr}(H)$ erhält.

Das Determinantenbündel Det auf $\mathrm{Gr}(H)$ kann als ein holomorphes Geradenbündel konstruiert werden. Es besitzt eine hermitesche Metrik, die invariant unter der Operation von $\tilde{U}_{\mathrm{res}}$ ist. Auf dem Sphärenbündel $S(\mathrm{Det})$ operiert $\tilde{U}_{\mathrm{res}}$ transitiv mit Standgruppe $U(H_+) \times U(H_-)$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Det* besitzt genügend viele holomorphe Schnitte $(\pi_S)_{S\in\mathfrak{S}}$, so daß sich eine Einbettung $\pi\colon \mathrm{Gr}(H) \to \mathbb{P}(\mathfrak{H})$ mit $\mathfrak{H} = \overline{\langle x_S \mid S \in \mathfrak{S}\rangle}$ definieren läßt, wodurch Det das über π zurückgezogene tautologische Geradenbündel von $\mathbb{P}(\mathfrak{H})$ ist. Die Strata Σ_S und die Zellen C_S lassen sich dann leicht mit Hilfe der so definierten homogenen Koordinaten beschreiben.

Bernhard Köck
Faktorisierungssätze und homogene Räume

L sei die Gruppe $L_{\mathrm{pol}}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der polynomialen Schleifen in $GL_n(\mathbb{C})$, und L^+ bzw. L^- seien die Untergruppen derjenigen Schleifen, deren Fourierentwicklungen keine negativen bzw. positiven Koeffizienten besitzen. Dann gelten folgende Faktorisierungssätze:

a) $L = \Omega U_n \times L^+$,

b) $L = \bigcup_{\lambda\in\check{T}} L^-\lambda L^+$ (Birkhoff-Zerlegung),

c) $L = \bigcup_{\lambda\in\check{T}} L^+\lambda L^+$ (Bruhat-Zerlegung),

wobei $\check{T} = \mathrm{Hom}(S^1, T)$ mit einem maximalen Torus $T \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Zum Beweis dieser Sätze wird der homogene Raum L/L^+ mit einem Teil Gr_0^n der Grassmannvarietät des Hilbertraums $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ identifiziert. Die Birkhoff- bzw. Bruhat-Zerlegung entspricht dann der Zerlegung von Gr_0^n in Strata Σ_λ bzw. in Zellen C_λ.

Martin Kuhlmann
Bott-Periodizität

Aus der Zellenzerlegung der Grassmannschen läßt sich die Periodizität $\pi_k(U) = \pi_{k+2}(U)$ für die Homotopiegruppen von $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ herleiten. Dazu benutzt mensch zunächst die Homotopieäquivalenzen $\Omega U \simeq \mathbb{Z}\times BU$ und $\Omega U_n \simeq \Omega_{\mathrm{pol}} U_n$ und setzt diese dann über $\mathbb{Z}\times BU \cong \mathrm{Gr}_0(H)$ und $\Omega_{\mathrm{pol}} U_n \cong \mathrm{Gr}_0^{(n)}$ zu bekannten Untervarietäten der Grassmannschen in Beziehung. Eine Dimensionsanalyse für die Zellenzerlegung $\mathrm{Gr}_0 = \bigcup_{S\in\mathfrak{S}} C_S$ zeigt schließlich, wie die Inklusion $\mathrm{Gr}_0^{(n)} \subset \mathrm{Gr}_0$ für $k \le 2n-2$ einen Isomorphismus der entsprechenden Homotopiegruppen induziert.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Frank Herrlich
Morsetheoretische Interpretation der Stratifizierung und der Zellenzerlegung der Grassmannschen

Die Operation von S^1 auf H und damit auch auf $\mathrm{Gr}(H)$, die durch Rotation der Schleifen gegeben ist, definiert auf der "glatten Grassmannschen" $\mathrm{Gr}_\infty(H)$ ein Vektorfeld ξ, dessen infinitesimaler Erzeugender der Operator $-d/d\vartheta \in \mathfrak{u}_{\mathrm{res}} = \mathrm{Lie}(U_{\mathrm{res}}(H))$ ist. Die kritischen Punkte von ξ sind gerade die Schnittpunkte H_S der Strata Σ_S mit den Zellen C_S. Σ_S und C_S sind die stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten von ξ.

Der Kozyklus ω auf $\mathfrak{u}_{\mathrm{res}}$, der die universelle zentrale Erweiterung induziert, definiert auch eine symplektische Form auf $\mathrm{Gr}(H)$. Bezüglich dieser Struktur ist das Vektorfeld ξ hamiltonsch. Die zugehörige Energiefunktion ist

$$E(W) = \mathrm{Spur}(i\frac{d}{d\vartheta})(J_W - J),$$

wobei J und J_W Operatoren auf H bezeichnen, die auf H_+ (bzw. W) $+1$ und auf H_- (bzw. $W^\perp$) -1 sind. E besitzt auch eine explizite Darstellung mit Hilfe der Plückerkoordinaten π_S und läßt sich "quantenmechanisch" als Erwartungswert des Energieoperators $id/d\vartheta$ interpretieren.

Bernd Brinkmann
Schleifengruppen und Modulräume von Vektorbündeln

Mit Hilfe der Birkhoff-Zerlegung $L\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = L^-TL^+$ lassen sich die holomorphen Vektorbündel vom Rang n auf $\mathbb{P}^1$ klassifizieren, indem mensch die Übergangsfunktionen eines Bündels auf $\mathbb{C}^\times$ als Schleifen $\gamma \in L\,\mathrm{GL}_n$ interpretiert und dann die zugehörige Zerlegung betrachtet.

Analog läßt sich für eine kompakte halbeinfache Lie-Gruppe G zeigen, daß die holomorphen prinzipalen $G_{\mathbb{C}}$-Bündel auf $\mathbb{P}^1$ (zusammen mit einer Trivialisierung für $|z| \geq 1$) den Punkten von ΩG entsprechen. Durch Herausschneiden einer Kreisscheibe X_∞ verallgemeinert sich diese Konstruktion auf riemannsche Flächen X. Ist $L_X^+ = \{\gamma \in L\,\mathrm{GL}_n \mid \gamma$ ist Rand einer holomorphen Funktion $X \setminus \overline{X_\infty} \to \mathrm{GL}_n\}$, so gilt ganz analog eine Entsprechung zwischen $L^-\backslash L\,\mathrm{GL}_n\,/L_X^+$ und den Vektorbündeln vom Rang n auf X.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Ulrich Stuhler
KdV-Gleichung und Grassmannsche

Mit Hilfe der Grassmannschen $\mathrm{Gr}(H)$ zum Hilbertraum $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ lassen sich Lösungen der Korteweg-de Vries-Gleichung gewinnen. Zunächst wurde der historische und physikalische Zusammenhang dargestellt; insbesondere wurde dabei die klassische KdV-Gleichung in eine Aussage über Lax-Paare umformuliert. Diese diente dann dazu (im Anschluß an Schur), die formale Theorie der KdV-Gleichung in einem Ring kommutativer Differentialoperatoren zu betrachten. Dabei erhält mensch als formale Lösung die Baker-Funktion. Die Laxsche Formulierung läßt sich auch zu einem ganzen Satz von Differentialgleichungen erweitern, der sogenannten KP-Hierarchie. Schließlich wurde dargelegt, wie sich zu Punkten $W \in \mathrm{Gr}(H)$ mit virtueller Dimension Null (d.h. die kanonische Projektion $\mathrm{pr}_+ \colon W \to H_+$ ist ein Isomorphismus) Lösungen der KdV-Gleichung konstruieren lassen.

Wilhelm Singhof
Borel-Weil-Theorie

Die irreduziblen Darstellungen der Schleifengruppe mit positiver Energie lassen sich im Raum der Schnitte eines holomorphen Geradenbündels auf LG/T realisieren. Dazu sei T ein maximaler Torus in der kompakten Lie-Gruppe G. Er läßt sich als Untergruppe von LG auffassen, und der homogene Raum LG/T kann zu einer komplexen Mannigfaltigkeit gemacht werden. $\tilde{L}G$ sei eine zentrale Erweiterung von LG mit Kern S^1. Dann läßt sich dem Charakter λ der Untergruppe $T \times S^1$ von $\tilde{L}G$ in natürlicher Weise ein holomorphes homogenes Geradenbündel L_λ über LG/T zuordnen. Auf dem Raum Γ_λ der holomorphen Schnitte von L_λ operiert $\tilde{L}G \ltimes \mathsf{T}$, wobei T die Gruppe der Rotationen von S^1 bezeichnet, die auch auf $\tilde{L}G$ operiert. Eine Darstellung von $\tilde{L}G \ltimes \mathsf{T}$ heißt von positiver Energie, wenn kein Gewichtsraum mit negativem Eigenwert bgzl. T auftritt. Die von Null verschiedenen Γ_λ sind dann genau die irreduziblen Darstellungen von $\tilde{L}G \ltimes \mathsf{T}$ mit positiver Energie.

Wolfgang K. Seiler
Fundamentale Darstellungen der allg. linearen Gruppe

Zur Untersuchung der Darstellungen der Gruppe $\widetilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}$ (aus Vortrag 5) beginnt mensch mit der Heisenberg-Gruppe einer zentralen Erweiterung der additiven Gruppe eines Vektorraums V und zeigt, daß es bei gegebener komplexer Struktur $V_{\mathbb{C}} \cong A \oplus \overline{A}$ genau eine

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

irreduzible unitäre Darstellung gibt, bei der das Zentrum treu operiert. Der zugehörige Darstellungsraum ist eine Komplettierung $\hat{S}(A)$ der symmetrischen Algebra von A. Daraus ergibt sich fast unmittelbar die Klassifikation der irreduziblen unitären Darstellungen der zentralen Erweiterung der Schleifengruppe eines Torus.

Die fundamentalen Darstellungen von $\widetilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}$ sollen auf dem Raum Γ der globalen Schnitte des Bündels Det* über der Grassmannschen realisiert werden. Dazu wird dieser Raum zunächst mit einem fermionischen Fockraum identifiziert, wodurch die Konstruktion eines dichten Hilbertraums $\mathfrak{H}$ in Γ ermöglicht wird, auf dem dann $\tilde{U}_{\mathrm{res}}$ unitär operiert. Sodann wird eine reelle Zusammenhangskomponente mit $\hat{S}(A)$ identifiziert, auf der die Heisenberg-Gruppe irreduzibel dargestellt wird. Da $\tilde{L}T \subset U_{\mathrm{res}}$, sind damit auch die Darstellungen von $\widetilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}$ und $\tilde{U}_{\mathrm{res}}$ irreduzibel und, durch weitere Einschränkung, die der Untergruppen $\tilde{L}U_n \subset \tilde{U}_{\mathrm{res}}$ (wobei $L^2(S^1, \mathbb{C}^n) \cong L^2(S^1, \mathbb{C})$).

Wolfgang Müller
Vertexoperatoren, aus physikalischer Sicht

Ein freier klassischer bosonischer String beschreibt sich zu einem festen Zeitpunkt τ durch ein Element des Schleifenraums $U = L\mathbb{R}^{d-1,1}$ des d-dimensionalen Minkowski-Raums. Seine Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den kritischen Punkten des Funktionals S auf den Wegen in U, das durch

$$S(X(\sigma,\tau)) = -\frac{1}{2\pi\alpha}\int \sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X}\dot{X})(X'X')}\; d\tau d\sigma$$

mit $\dot{X} = \partial_\tau X$ und $X' = \partial_\sigma X$ gegeben wird ($X(\cdot,\tau)$ ist dabei 2π-periodisch in σ). Bei einer Parametrisierung mit $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ und $\dot{X}X' = 0$ ergeben sich die kritischen Punkte als Lösungen der Wellengleichung. Sie lassen sich (nach Abspalten der Schwerpunktsbewegung) in einer Fourierreihe mit Koeffizienten α_n^L, α_n^R entwickeln, die jeweils zum nach links bzw. nach rechts laufenden Anteil der Welle gehören. Diese Koeffizienten spielen eine wichtige Rolle bei der Quantisierung.

So wurde dann der Übergang von einem klassischen mechanischen zum zugehörigen quantenmechanischen System geschildert, wobei besonders der Fall des harmonischen Oszillators hervorgehoben wurde. Hierzu war auch eine kurze Einführung in Fockraumdarstellungen notwendig. Abschließend wurde die Wechselwirkungs- bzw. Streutheorie der Strings angedeutet. Insbesondere wurde erklärt, daß der Vertexoperator $V(k,\sigma,\tau) = :\exp\,(-ik\;X(\sigma,\tau)):$ in der physikalischen Interpretation die Absorption bzw. Emission eines sogenannten Tachyons mit Impuls k am Ort σ zur Zeit τ beschreibt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Norbert Klingen
Vertexoperatordarstellungen

Für die affinen Kac-Moody-Algebren $\tilde{\mathfrak{g}}$ zu den einfachen Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ vom Typ A_n, D_n und E_n lassen sich mit Hilfe von Vertexoperatoren irreduzible Darstellungen konstruieren, die kein endlichdimensionales Analogon besitzen. Den Ausgangspunkt bildet das Kowurzelgitter L von $\mathfrak{g}$, dem über die Cartanunteralgebra $\mathfrak{h} = L \otimes \mathbb{C}$ eine Erweiterung $\tilde{\mathfrak{h}}$ zugeordnet wird. Dann ist $\mathfrak{L} = [\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}]$ eine Heisenberg-Algebra. Sie besitzt einen irreduziblen Modul $M(1)$, der isomorph zu dem Polynomring über $\mathbb{C}$ in den Variablen $h_i \otimes t^j$ ($j < 0$, $\{h_i\}$ eine Basis von $\mathfrak{h}$) ist. Hier operiert das Zentrum von $\mathfrak{L}$ durch 1. Der "Vertexmodul" $V_L = M(1) \otimes \mathbb{C}\{L\}$ hat als zweite Komponente schließlich noch die projektive Darstellung $\mathbb{C}\{L\} = \bigoplus_{\alpha \in L} \mathbb{C}e^\alpha$ von L, wobei $\beta \in L$ den Strahl $\mathbb{C}e^\alpha$ in $\mathbb{C}e^{\alpha+\beta}$ abbildet. Auf V_L läßt sich nun die Operation von $\mathfrak{L} \subset \tilde{\mathfrak{h}}$ auf $\tilde{\mathfrak{h}}$ fortsetzen. Schließlich können zu jedem $\alpha \in L$ Vertexoperatoren $X_\alpha(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, konstruiert werden, die auf V_L operieren. Ist $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$, so lassen sich deren Lie-Klammern berechnen, und es zeigt sich, daß die von $\tilde{\mathfrak{h}}$ und den $X_\alpha(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$, $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$) erzeugte Unteralgebra von $\mathrm{End}(V_L)$ eine zu $\tilde{\mathfrak{g}}$ isomorphe Lie-Algebra ist. Da in den genannten Fällen L von den Vektoren der Länge 2 erzeugt wird, ist V_L ein irreduzibler $\tilde{\mathfrak{g}}$-Modul.

Michael Flohr, Andreas Recknagel, Raimund Varnhagen
Unitäre Darstellungen der Virasoro-Algebra

Im ersten Teil des Vortrags wurde die Shapovalov-Form auf Verma-Moduln $V_{h,c}$ der Virasoro-Algebra Vir definiert. Bezüglich dieser symmetrischen Bilinearform sind die Gewichtsräume zu verschiedenen Gewichten orthogonal. Die Determinante der Einschränkung der Form auf einen endlichdimensionalen Gewichtsraum heißt die Kac-Determinante; sie läßt sich mit Hilfe von Vertexoperatoren auf Fockräumen berechnen. Ihr Radikal ist gerade der maximale echte Untermodul des Verma-Moduls.

Mit diesen Ergebnissen lassen sich dann zum einen Charaktere irreduzibler Darstellungen von Vir angeben (Feigin, Fuchs) und zum andern auch alle unitären Darstellungen bestimmen (Friedan, Qiu, Shenker).

Im dritten Teil des Referats wurden schließlich alle unitären Darstellungen der diskreten Serie

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \qquad h_{p,q} = \frac{(p(m+1) - qm)^2 - 1}{4m(m+1)}$$

mit $m \in \{2, 3, \ldots\}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < p \leq m$, aus unitären Darstellungen der affinen Kac-Moody-Algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ explizit konstruiert (Sugawara- und GKO-Konstruktion). In den Beweisen geht dabei die Kac-Weylsche Charakterformel ein.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Martin Schlichenmaier
Vertexoperatoralgebren

Hier wurden Vertexoperatoren $Y(v,z)$ für allgemeine Elemente $v \in V_L = S(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^-) \otimes \mathbb{C}\{L\}$ eingeführt. Die Komponenten $L(n)$ eines bestimmten Vertexoperators $Y(\omega,z)$ in der z-Entwicklung bilden eine Darstellung der Virasoro-Algebra. Im "komplex-analytischen Bild" läßt sich die Verknüpfung von Vertexoperatoren beschreiben; insbesondere erhält mensch dabei die Kommutativität, die Assoziativität und die Jacobi-Identität für Vertexoperatoren. Schließlich wurde allgemein der Begriff der Vertexoperatoralgebra definiert und gezeigt, daß die oben konstruierten Vertexoperatoren eine solche bilden. Hinzu kamen noch die Definitionen von Automorphismen und Moduln von Vertexoperatoralgebren.

Arne Meurman
Konstruktion des Monsters

Zunächst wurde an die Beobachtung des "monstrous moonshine" erinnert, demzufolge eine enge Beziehung zwischen den Dimensionen der Darstellungen der größten sporadischen Gruppe, Monster M genannt, und der Laurent-Entwicklung der modularen Invariante $j(q)$ besteht. Danach wurde die Konstruktion einer Vertexoperatoralgebra skizziert, deren Automorphismengruppe gleich M ist. Der dabei eingeschlagene Weg ist der Konstruktion der einfachen Lie-Algebra vom Typ E_8 aus einer Unteralgebra vom Typ D_8 zusammen mit einer Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung analog.

Berichterstatter: Bernd Steinert

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Tagungsteilnehmer

Dr. Klaus Altmann
Fachbereich Mathematik
Universität Kaiserslautern
Erwin-Schrödinger-Straße
Postfach 3049

6750 Kaiserslautern

Prof.Dr. Theodor Bröcker
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach 397

8400 Regensburg

Stefan Bechtluft-Sachs
Fachbereich Mathematik
Universität Mainz
Postfach 3980
Saarstr. 21

6500 Mainz

Prof.Dr. Christopher Deninger
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

4400 Münster

Clemens Beckmann
Mathematisches Institut
Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof.Dr. Tammo tom Dieck
Mathematisches Institut
Universität Göttingen
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Wolfram Boenkost
Mathematisches Seminar
Fachbereich Mathematik
Universität Frankfurt
Postfach 11 19 32

6000 Frankfurt 1

Michael Flohr
Physikalisches Institut der
Universität Bonn
Nussallee 12

5300 Bonn 1

Dr. Bernd Brinkmann
Institut f. Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Prof.Dr. Jens Gamst
Fachbereich 3
Mathematik und Informatik
Universität Bremen
Bibliothekstr.1, PF 33 04 40

2800 Bremen 33

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Prof.Dr. Wulf-Dieter Geyer
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Dr. Joachim Hilgert
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Prof.Dr. Günter Harder
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstr. 10

5300 Bonn 1

Dr. Jens Hoppe
Institut für Theoretische Physik
Universität Karlsruhe
Kaiserstraße 12
Postfach 6380

7500 Karlsruhe 1

Prof.Dr. Wolfgang Hein
Fachbereich 6 Mathematik
Universität/Gesamthochschule Siegen
Hölderlinstr. 3

5900 Siegen

Dr. Uwe Jannsen
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Matthias Hennes
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Rainer Jung
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Dr. Frank Herrlich
Institut f. Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Prof.Dr. Norbert Klingen
Mathematisches Institut
Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Dr. Friedrich Knop
Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21

CH-4051 Basel

Johan van de Leur
Faculteit Wiskunde
Rijksuniversiteit Utrecht
Postbus 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Bernhard Köck
Mathematisches Institut II der
Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe 1

Prof.Dr. Falko Lorenz
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62

4400 Münster

Prof.Dr. Matthias Kreck
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof. Dr. Arne Meurman
Dept. of Mathematics
University of Lund
Box 118

S-221 00 Lund

Martin Kuhlmann
Institut f. Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Gebäude NA, Universitätsstr. 150
Postfach 10 21 48

4630 Bochum 1

Dr. Boudewijn Moonen
Paul-Langen-Str. 10

5300 Bonn 3

Andreas Langer
Mathematisches Institut
Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Dr. Gerd Müller
Fachbereich Mathematik
Universität Mainz
Postfach 3980
Saarstr. 21

6500 Mainz

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Wolfgang Müller
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. Ulrich Pinkall
Fachbereich Mathematik - FB 3
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

Dr. Jan Nekovar
Institute of Mathematics of the
CSAV
Zitna 25

115 67 Praha 1
CZECHOSLOVAKIA

Andreas Recknagel
Physikalisches Institut der
Universität Bonn
Nussallee 12

5300 Bonn 1

Prof.Dr. Serge Ochanine
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Prof.Dr. Jürgen Rohlfs
Fach Mathematik
Mathematisch-Geographische Fakultät
Universität Eichstätt
Ostenstr. 26-28

8078 Eichstätt

Prof.Dr. Eberhard Oeljeklaus
Fachbereich 3
Mathematik und Informatik
Universität Bremen
Bibliothekstr.1, PF 33 04 40

2800 Bremen 33

Wolfgang Schanz
Mathematisches Institut
Universität Erlangen
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Dr. Richard Pink
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 1

5300 Bonn 1

Dr. Norbert Schappacher
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Dr. Rudolf Scharlau
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 8640

4800 Bielefeld 1

Prof.Dr. Wilhelm Singhof
Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Universitätsstraße 1

4000 Düsseldorf 1

Martin Schlichenmaier
Fakultät für Mathematik und
Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim 1

Prof.Dr. Peter Slodowy
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Prof.Dr. Peter Schneider
Mathematisches Institut
Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Prof.Dr. Tonny A. Springer
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Dr. Oliver Schüle
Mathematisches Institut B
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
Postfach 80 11 40

7000 Stuttgart 80

Bernd Steinert
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 1

5300 Bonn 1

Dr. Wolfgang K. Seiler
Lehrstuhl für Mathematik VI
Fak.f.Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A 5

6800 Mannheim 1

Prof.Dr. Jan Stienstra
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit te Utrecht
P. O. Box 80.010

NL-3508 TA Utrecht

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Prof.Dr. Ulrich Stuhler
Fachbereich 7: Mathematik
Universität/Gesamthochschule
Wuppertal, Gaußstr. 20
Postfach 10 01 27

5600 Wuppertal 1

Rudolf Suter
Mathematik Departement
ETH-Zürich
HG G 27.2
Rämisstraße 101

CH-8092 Zürich

Peter Teichner
Fachbereich Mathematik
Universität Mainz
Postfach 3980
Saarstr. 21

6500 Mainz

Raimund Varnhagen
Physikalisches Institut der
Universität Bonn
Nussallee 12

5300 Bonn 1

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©