MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 49/1990

Deutsch-deutsches Treffen: Solitonphänomene und nichtlineare Systeme

10.11. bis 12.11.1990

Die Tagung fand unter Leitung von B. Fuchssteiner (Paderborn) statt. Die Idee zu einer solchen Kurztagung war unmittelbar nach dem 9. November 1989 enstanden. Damals war es das Ziel, die sich abzeichnende Annäherung beider deutscher Staaten zu nutzen, um auf einem wichtigen Teilgebiet der Mathematischen Physik zu neuen Formen der Zusammenarbeit zu kommen. Dies schien umso nötiger als eine kritische Bestandsaufnahme zeigte, daß auf unserem Arbeitsgebiet über die innerdeutsche Grenze zwar Forschungsergebnisse ausgetauscht wurden, aber kaum jemand seine Fachkollegen aus dem anderen Teil des Landes kannte.

Obwohl die Ereignisse der Folgezeit die ursprüngliche Absicht einer Institutionalisierung wissenschaftlicher Kooperation längst überholt hatten, wurde trotzdem an der Tagung (und ihrem Titel) festgehalten. Nur die Akzente wurden verschoben. Es ging nun eher um ein informelles Kennenlernen als um organisatorische Fragen, und wissenschaftlicher Gedankenaustausch konnte wieder etwas mehr im Vordergrund stehen. Natürlich konnte man sich auf dieser Tagung des erstmaligen Kennenlernens nicht von den aktuellen Ereignissen und Problemen lösen, im Gegenteil, politischer Meinungsaustausch spielte eine große Rolle und ermöglichte ein wachsendes Verständnis für die Situation der Kollegen aus dem jeweils anderen Teil Deutschlands.

Thematisch erstreckten sich Beiträge und Diskussionen über das engere Gebiet der Solitontheorie hinaus. Dies war auch so geplant. Schwerpunkte waren neben den Solitonphänomenen, Nichtlineare Phänomene jeder Art, einen besonderen Schwerpunkt bildeten dabei solche Phänomene im Bereich der Gravitationstheorie.

Insgesamt, eine kurze und dichtgedrängte Tagung, aber - zumindest nach Meinung des Berichterstatters - ein voller Erfolg.

Vortragsauszüge

L. Bordag:

Die Schottky Uniformisierung für nichtlineare Gleichungen

Die vorgeschlagene Methode ermöglicht eine effektive Beschreibung gut bekannter Θ-Funktions-formeln für die KdV-, KP-, und die Nichtlineare Schrödinger Gleichung. Durch endliche freie Schottky Gruppen kann man n holomorphe Differentiale auf der vorgegebenen Riemannschen Fläche beschreiben. Die entstehenden Ausdrücke sind durch Poincare-Reihen gegeben. In ähnlicher Weise kann man auch andere Parameter der Riemannschen Fläche beschreiben, so daß man dann bestimmen kann, unter welchen Bedingungen die Lösungen periodisch reell oder nichtsingulär werden. Die Methode ermöglicht auch bildliche Darstellungen gewonnener Lösungen durch Computer-Graphik.

B. Fuchssteiner:

Wechselwirkende Partikel

Ein System wechselwirkender Partikel, deren Dynamik durch die Schrödingergleichung beschrieben wird, wird eingeführt. Die Wechselwirkung ist kurzreichweitig und ihr Erwartungswert wird durch das negative Integral über das Quadrat der Energiedichte gegeben. Es stellt sich heraus, daß bei der Annahme eines geringen Überlappens der einzelnen Wellenfunktionen gewisse Bargmann Potentiale das Problem näherungsweise beschreiben. Das allgemeine Problem ist vollständig lösbar und führt zu einer Symmetriegruppenanalyse der NLS.

C. Hoenselaers:

Prolongation - hin und zurück

Am Beispiel der Sinus-Gordon-Gleichung wird gezeigt, wie für eine gegebene partielle Differentialgleichung in zwei unabhängigen Variablen die Prolongationsalgebra à la Estabrook-Wahlquist zu erhalten ist. Diese kann dann zum Auffinden von Bäcklund-Transformationen genutzt werden. Umgekehrt findet man für eine Schleifenalgebra viele Gleichungen, die per constructionem integrabel sind. Möglichkeiten der Verallgemeinerung auf drei Dimensionen werden diskutiert. Anhand von Computergraphiken werden einige typische Solitonen gezeigt.

H. Knörrer:

Die Geometrie von Fermiflächen

Es wurde ein Überblick über gemeinsame Arbeiten mit D. Bättig, Y. Feldman und E. Trubowitz über das Spektrum periodischer Schrödingeroperatoren $-\Delta + q(x)$, ($q(x)$ periodisch bezüglich eines Gitters $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$) gegeben. Unter anderem wurde eine Beweisidee für das folgende Resultat skizziert:

q is konstant genau dann, wenn für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Fermifläche

$$F_\lambda(q) := \{k \in \mathbb{R}^d | \exists \psi : (-\Delta + q)\psi = \lambda\psi, \psi(x+\gamma) = e^{i<k,\gamma>}\psi(x) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\}$$

eine Sphäre enthält.

D. Kramer:

Solitonen in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Methoden der Solitonentheorie werden angewandt, um exakte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen zu erzeugen. Dabei werden vor allem stationäre axialsymmetrische Vakuum- und Elektrovakuum-Felder betrachtet. Ausgangspunkt ist das der Ernst-Gleichung zugeordnete lineare Problem. Als Anwendungsbeispiele wird auf die nichtlineare Superposition zweier Kerr-Lösungen, auf die Überlagerung einer Kerr-Lösung mit dem Feld eines magnetischen Dipols, sowie auf das Gleichgewicht zweier geladener Massen hingewiesen.

H. Lange:

Über einige nichtlokale nichtlineare Schrödinger-Gleichungen

Für zwei Typen nichtlokaler nichtlinearer Schrödinger-Gleichungen, nämlich der

(i) DYSTHEsche NLS
(ii) Dissipative NLS

wird die globale Wohlgestelltheit nichtlinearer Anfangs-Randwertaufgaben diskutiert.

D. Maison:

Gravitationssolitonen

Im Rahmen relativistischer Feldtheorien, die die Einsteinsche Gravitationstheorie enthalten (wie z. B. Kaluza-Klein Theorien, Einstein-Yang-Mills-Higgs-Theorie etc.), sind die Möglichkeiten Solitonlösungen zu finden durch No-Go-Theoreme stark eingeschränkt. In den meisten Fällen gibt es nur singuläre Lösungen (schwarze Löcher) mit Ausnahme der von Bartnik-McKinnon numerisch entdeckten Lösungen des Einstein-Yang-Mills-Systems. Diese regulären Lösungen erscheinen als spezielle Fälle einer breiteren Klasse von Lösungen, sowohl vom Typ schwarzer Löcher wie auch solchen mit echten (nackten) Singularitäten. Insbesondere findet man eine spezielle singuläre Lösung oszillatorischer Art, die sich als "Grenzwert" der Bartnik-McKinnon-Lösungen verstehen läßt.

R. Meinel:

Approximation der "Strahlungslösung" der KdV-Gleichung durch eine Überlagerung Breather-artiger Lösungen

Die allgemeine Lösung des Cauchy-Problems der Korteweg-de-Vries-Gleichung kann bekanntlich als nichtlineare Überlagerung einer N-Solitonenlösung und einer "Strahlungslösung" interpretiert werden. Im Vortrag wird dargestellt, wie der "Strahlungsanteil" der Lösung als Grenzfall einer Überlagerung von breather-artigen Lösungen gewonnen werden kann, obwohl einzelne Breather-Lösungen singulär sind. Auf diese Weise kann die allgemeine Lösung als Grenzfall $N \to \infty$ einer verallgemeinerten N-Solitonenlösung betrachtet werden.

P Meinhold:

Inverse Streumethode

Für eine Gleichung vom KdV-Typ wird eine Lax-Darstellung angegeben. Dadurch können mittels der inversen Streumethode Lösungen dieser Gleichung gefunden werden, die in einfacher Weise neue Lösungen der KdV (insbesondere Mehrsolitonenlösungen) ergeben, welche im Unendlichen nicht verschwinden.

P. Möbius:
Verschiedene Anregungsmoden bei nichtlinearen Evolutions- und Wellengleichungen: ihre Ausbreitungsformen und Überlagerungsmöglichkeiten

Für die bekanntesten nichtlinearen konservativen und dissipativen Evolutions- und Wellengleichungen in $(1+1)$-Dimensionen werden die fundamentalen Anregungsmoden und ihre Ausbreitungsformen diskutiert. Dazu gehören die stationären und asymptotisch-stationären Wellen, die sowohl in integrablen als auch nichtintegrablen Feldgleichungen auftreten können. Verschiedene Möglichkeiten, den in der Hamiltonschen Mechanik wohldefinierten Begriff der Integrabilität auf den Fall unendlich-vieler Freiheitsgrade zu erweitern, werden vorgeschlagen. Das Problem der Integrabilität ist mit der zugehörigen Symmetrie-Algebra, den Erhaltungssätzen sowie der nichtlienaren Superposition verknüpft. Es zeigt sich, daß eine unendliche Symmetrie-Algebra Integrabilität bedeutet und daß dann ein Lax-Paar existiert. Aus einer unendlichen Symmetrie-Algebra folgen nicht notwendig unendlich viele Erhaltungsgleichungen. Einige Aussagen über mögliche nichtlineare Superpositionsregeln werden angegeben.

G. Neugebauer:
Minimalflächengleichungen als integrable Systeme

Die (allgemein relativistischen) Gravitationsfelder rotierender Sterne (d. h. die Lösungen der entsprechenden Einsteinschen Feldgleichungen) können durch Minimalflächen in einem vierdimensionalen (Pseudo-) Riemannschen Raum (der nicht mit der Raum-Zeit verwechselt werden darf) beschrieben werden. Die Minimalflächengleichungen sind gleichzeitig Chiralfeldgleichungen, bilden also ein integrables System, auf das Inverse Methoden zur Lösungskonstruktion angewandt werden können (Beispiel: Erzeugung einer "Superposition" von Kerr-Lösungen durch mehrfache Bäcklundtransformation des Minkowskiraumes). Wünschenswert wäre eine analoge Behandlung der Feld- (Minimalflächen-) Gleichungen für das Körperinnere. Daraus ergeben sich folgende Fragen $F_i (i = 1,2,3)$ und (Teil-) Antworten $A_i (i = 1,2,3)$:

F_1: Sind alle Minimalflächengleichungen integrabel?

A_1: Unbekannt. Die bekannten integrablen Minimalflächengleichungen sind

Chiralfeldgleichungen mit ebener oder axialgeometrisch-stationärer Symmetrie.
F_2: Beschreibt jede dieser Chiralfeldgleichungen ein Minimalflächenproblem?
A_2: Ja (die entspechenden Riemannschen Metriken können angegeben werden.)
F_3: Welche Riemannschen Räume sind Chiralräume?
A_3: Es können notwendige Bedingungen angegeben werden.

G. Oevel:
Geometrische Interpretation von Mastersymmetrien
Für Soliton-Gleichungen in $1+1$-Dimensionen wurden die Struktur und die Eigenschaften der Mastersymmetrien erläutert. Reduziert man die Ausgangsgleichung auf die invariante Untermannigfaltigkeit der N-Soliton Lösungen mit verschwindenden Randbedingungen, so erhält man ein im Liouvilleschen Sinne integrables System. Für dieses System können die Wirkungs- und Winkelvariablen explizit als Ausdruck in der physikalischen Feldvariablen konstruiert werden. Damit lassen sich neben dem Zusammenhang von Mastersymmetrien mit Winkelvariablen auch die spektralen Eigenschaften des Rekursionsoperators klären.

W. Oevel:
Eichtransformationen von Lax Operatoren und reziproke Transformationen integrabler Gleichungen
Auf der Algebra der Pseudo-Differentialoperatoren in einer unabhängigen Variablen existieren 3 abstrakte integrable Systeme. Eichtransformationen der unterliegenden Operatoren führen, mit Hilfe von Eigenfunktionen, die zugeordneten nichtlinearen Gleichungen ineinander über. Speziell läßt sich zu jeder isospektralen Deformation der Gelfand-Dikii-Klasse eine modifizierte Version sowie - über einen Wechsel der unabhängigen Koordinate - ein reziprok verknüpftes System angeben. Es ergeben sich Miura- und auto-Bäcklund Transformationen von Kadomtsev-Petviashvili, modifizierter KP und einer $(2+1)$ dimensionalen Harry-Dym-Gleichung.

R. Schimming:
Ein expliziter Ausdruck für die KdV-Hierarchie
Die Korteweg-de-Vries-Hierarchie von Solitonen-Differentialgleichungen wird in der Literatur rekursiv definiert. Der Verfasser ermittelt einen voll ex-

pliziten Ausdruck für die rechten Seiten der KdV-Hierarchie, indem er eine Verbindung zur asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskerns nach Minakshisundaram-Pleijel herstellt. Vorarbeit dazu wurde beireits in den 20-er Jahren durch unbewußt "solitonische" Kosntruktionen von J. L. Burchnall und T. W. Chaundy geleistet. Ein aktuelles offenes Problem ist: Läßt sich auch für die KP-Hierarchie mittels "Wärmeleitungsmethoden" ein expliziter Ausdruck finden?

R. Seiler:
Quantum Hall Effect

We define the relative Index, Index(P,Q), for a pair of infinite dimensional projections on a Hilbert space to be the integer that is the natural generalization of dim(P) -dim(Q) in finite dimensional vector spaces. We show that the Hall conductance for independent electrons in the plane is the relative index where P and Q project on the states below the Fermi energy for Hamiltonians that differ by a quantum flux and the Fermi energy is appropriately placed. This approach is closely related to, and sheds light on, Bellisard's interpretation of the Hall conductance as an index.

W. Strampp:
KP und Painlevé-Eigenschaften

Die formale Übertragung des Painlevé Kriteriums, welches bei partiellen DGln auf die Singularitäten-Mannigfaltigkeits Gleichung führt, auf das Produkt von Eigenfunktion und ihrer adjungierten, sowie auf eine Bäcklund Transformation der KP selbst ,führt auf neue Gln vom intrgrablen Typ.

H. Steudel:
Bäcklundtransformationen als physikalische Gleichungen - Strukturbeziehungen zwischen Differentialgleichungen der nichtlinearen Optik

Es werden aus der nichtlinearen Optik einige Beispiele zusammengestellt dafür, daß physikalische Gleichungen selbst die Form einer Bäcklundtransformation (bzgl. einer einfacheren Gleichung) annehmen können. Ein neues Beispiel dieser Art ergibt sich aus der Feststellung, daß Kaups Eichtransformation (siehe D.J. Kaup, Physica D (1983) 143) jede Lösung der Differentialgleichungen der stimulierten Ramanstreuung auf ein Paar von Lösungen zu den Maxwell-Bloch-Gleichungen der selbstinduzierten Transparenz abbildet, wobei beide Lösungen durch eine Bäcklundtransformation aufeinander bezogen sind.

W. Wiwianka:

Algorithmen zur rekursiven Berechnung von Lie-Bäcklund-Symmetrien nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

Es wurden Algorithmen vorgestellt, die einen Test auf vollständige Integrabilität bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen durchführen. Die Implementation dieser Algorithmen in Maple wurde beschrieben. Für einige Beispiele von lösbaren Gleichungen wurden Symmetrien und Mastersymmetrien, welche die rekursiven Strukturen der Hierarchie ergeben, berechnet.

Berichterstatter: B. Fuchssteiner

Tagungsteilnehmer

Dr. Ljudmila Bordag
Sektion Mathematik
Universität Leipzig
Augustusplatz 9

O-7010 Leipzig

Prof.Dr. Dietrich Kramer
Sektion Physik
Friedrich-Schiller-Universität
Max-Wien-Platz 1

O-6900 Jena

Prof.Dr. Benno Fuchssteiner
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Paderborn
Postfach 1621
Warburger Str. 100

4790 Paderborn

Prof.Dr. Horst Lange
Mathematisches Institut
Universität Köln
Weyertal 86-90

5000 Köln 41

Dr. Ernst F. Hefter
Physics Editorial
Springer Verlag
Postfach 10 52 80
Tiergartenstr. 17

6900 Heidelberg

Prof.Dr. Dieter Maison
Max-Planck-Institut für Physik und
Astrophysik
Werner Heisenberg-Inst. f. Physik
Föhringer Ring 6

8000 München 40

Dr. Cornelius Hoenselaers
Max-Planck-Institut für Physik und
Astrophysik
Karl-Schwarzschild-Str. 1

8046 Garching

Dr. Reinhard Meinel
Zentralinstitut für Astrophysik
Akademie der Wissenschaften

Rosa-Luxemburg-Str. 17a

O-1591 Potsdam -Babelsberg

Prof.Dr. Horst Knörrer
Mathematik
ETH Zürich
ETH-Zentrum
Rämistr. 101

CH-8092 Zürich

Dr. Peter Meinhold
Sektion Mathematik
Technische Universität Dresden
Mommsenstr. 13

O-8027 Dresden

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dr. Peter Moebius
Postfach 235

O-8020 Dresden

Prof.Dr. Gernot Neugebauer
Sektion Physik
Friedrich-Schiller-Universität
Max-Wien-Platz 1

O-6900 Jena

Dr. Gudrun Oevel
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Paderborn
Postfach 1621
Warburger Str. 100

4790 Paderborn

Dr. Walter Oevel
Dept. of Mathematical Sciences
University of Technology

GB- Loughborough, Leics. LE11 3TU

Dr. Rainer Schimming
Sektion Mathematik
Ernst-Moritz-Arndt-Universität
F.-L.-Jahn-Str. 15a

O-2200 Greifswald

Prof.Dr. Ruedi Seiler
Fachbereich Mathematik - FB 3
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

Dr. Heinz Steudel
Akademie der Wissenschaften
Zentralinstitut für Optik u.
Spektroskopie
Rudower Chaussee 6

O-1199 Berlin

Dr. Walter Strampp
Fachbereich 17 - Mathematik
Universität Kassel
Nora-Platiel-Str. 5

3500 Kassel

Dr. Waldemar Wiwianka
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Paderborn
Postfach 1621
Warburger Str. 100

4790 Paderborn

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft