

118 (Math. Forschungsinstitut Oberwolfach)  
Postfach 1015  
7000 Oberwolfach

1956, 1  
Math. Forschungsinstitut Oberwolfach  
E 20102937

Belegang "Strukturfragen in der Analysis" (Oberwolfach)  
im Math. Forschungsinstitut Oberwolfach 9. bis 14. Juli 1956

Protokoll (geführt durch die HH. Denninger, Frey, Haas, Klemm, Kröplin, Kunz, Kurz, Müller, Schumacher u.a.)

10.7.56 Prof. Kneser:

Mathematisches Forschungsinstitut  
Oberwolfach/Postfach 1015  
7000 Oberwolfach  
Fernsprecher: W 0101

Körperaxiome.

Ein Körper ist eine Menge von mindestens zwei Elementen, in der zwei Verknüpfungen "+" und "." erklärt sind mit folgenden Eigenschaften:

$a + b$	$a \cdot b$
kommutativ	kommutativ
assoziativ	assoziativ
	distributiv
0 neutrales Element	1 neutrales Element
zu $a$ ex. " $-a$ "	zu $a \neq 0$ ex. " $a^{-1}$ "

Beispiele für Körper:

- 1) Körper der reellen Zahlen
- 2) Körper  $\mathbb{R}$  der rationalen Zahlen
- 3) Körper der komplexen Zahlen
- 4) Restklassenkörper nach einer Primzahl
- 5) Körper der rationalen Funktionen mit reellen Koeffizienten

Durch die Körperaxiome sind die reellen Zahlen noch nicht eindeutig bestimmt. Es müssen weitere Axiome hinzugefügt werden.

Vollständige Ordnung durch die Relation  $a < b$ . Umschreibung der binären Relation  $a < b$  auf die unäre Relation  $b - a > 0$ .

Axiome der Anordnung:

1.  $a > 0, a = 0, -a > 0$ ; genau eine Relation von diesen dreien gilt.
2.  $a > 0, b > 0 \rightarrow a + b > 0$ .
3.  $a > 0, b > 0 \rightarrow a \cdot b > 0$ .

Durchsicht der Beispiele bezüglich vollständiger Ordnung:

- 1) und 2) sind angeordnete Körper.
- 3) und 4) können nicht vollständig geordnet werden.
- 5) Körper der rat. Funktionen lässt sich, wie folgt, vollständig ordnen:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0} \quad b_n \neq 0 \quad a_m \neq 0 \quad \text{oder} \quad f(x) = 0$$



Def.  $f(x) > 0$ , wenn  $\frac{a_m}{b_n} > 0$  (bleibt erhalten bei Erweitern des Bruches).

10.7.56 Prof. Haupt:

Umschreibung der Axiome der Anordnung

$$(O_1) \quad a \geq b \text{ und } b \geq a \Leftrightarrow a = b$$

$$(O_2) \quad a \geq b \text{ und } b \geq c \rightarrow a \geq c$$

$$(O_3) \quad a, b \text{ beliebig} \rightarrow a \geq b \text{ oder } b \geq a \text{ (oder beides).}$$

$O_1$  bis  $O_3$  kennzeichnen die vollständige,  $O_1$  und  $O_2$  die teilweise Ordnung.

Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation:

$$(O_a) \quad a \geq b \rightarrow a + c \geq b + c$$

$$(O_m) \quad a \geq b \text{ und } f \geq 0 \rightarrow af \geq bf$$

Beispiel 2) und 5) zeigen, dass die Axiome noch nicht zur eindeutigen Kennzeichnung des Körpers der reellen Zahlen ausreichen.

#### Archimedisches Axiom

(A) Zu  $a > 0, b > 0$  existiert eine natürliche Zahl  $n = n(a, b)$  mit der Eigenschaft:  $a < nb$ .

Gleichwertig mit (A) ist die Einschliessungseigenschaft

(E) Jede reelle Zahl  $a$  lässt sich einschliessen zwischen zwei rationale Zahlen von beliebig kleiner Differenz.

(A) ist unabhängig von den vorhergehenden Axiomen, denn Beispiel 5) ist nicht archimedisches geordnet ( $x > b_0$  für beliebiges  $b_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x$  ist also unendlich gross bezgl. jeder Konstanten).

Aus (A) folgt: Die rationalen Zahlen liegen dicht im Körper der reellen Zahlen.

Aus (E) folgt: Zu jeder reellen Zahl  $p$  gibt es eine rationale Intervallschachtelung, durch die  $p$  eindeutig bestimmt wird.

Den bisherigen Axiomen genügen die Beispiele 1) und 2).

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or title.

Main body of faint, illegible text, appearing to be several lines of a document.

Continuation of faint, illegible text in the middle section of the page.

Bottom section of faint, illegible text, possibly a footer or concluding paragraph.

Abschliessendes Axiom:

(ISA) Intervallschachtelungsaxiom: Zu jeder Intervallschachtelung existiert genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt.

11.7.56. Prof. Haupt:

Das Intervallschachtelungsaxiom lässt sich durch andere Axiome ersetzen.

(DA) Dedekindsches Axiom: Zu jedem Schnitt im Körper der rationalen Zahlen, dessen Oberklasse keine kleinste Zahl enthält, existiert eine reelle Zahl  $p$  in folgendem Sinn:  
 $u \leq p < s$  für jedes  $u$  aus der Unterklasse  $U$   
und jedes  $s$  aus der Oberklasse  $S$ .

(SA) Supremum-Axiom: Jede nach oben beschränkte nicht leere Menge  $T$  aus  $R$  besitzt ein Supremum in  $R^V$  ( $R^V$ : Körper der reellen Zahlen)

(MA) Monotonie-Axiom: Für  $a_n \in R$ ,  $a \in R$  und  $a_n \leq a_{n+1} \leq a$  existiert ein  $p \in R^V$  mit  $p = \sup (a_n, n = 1, 2, 3, \dots)$

Es wurde gezeigt, dass in einem archimedisch angeordneten Körper die letzten vier Axiome gleichwertig sind. Ferner wurde gezeigt, dass das Dedekindsche Axiom nur in archimedisch geordneten Körpern erfüllbar ist.

Aus den bisherigen Axiomen lässt sich folgern:

Ein archimedisch geordneter Körper, in dem (ISA) gilt, besitzt nur sich selbst als archimedisch geordneten Oberkörper. Jeder archimedisch geordnete Körper ist isomorph zu einem Unterkörper des Körpers der reellen Zahlen.

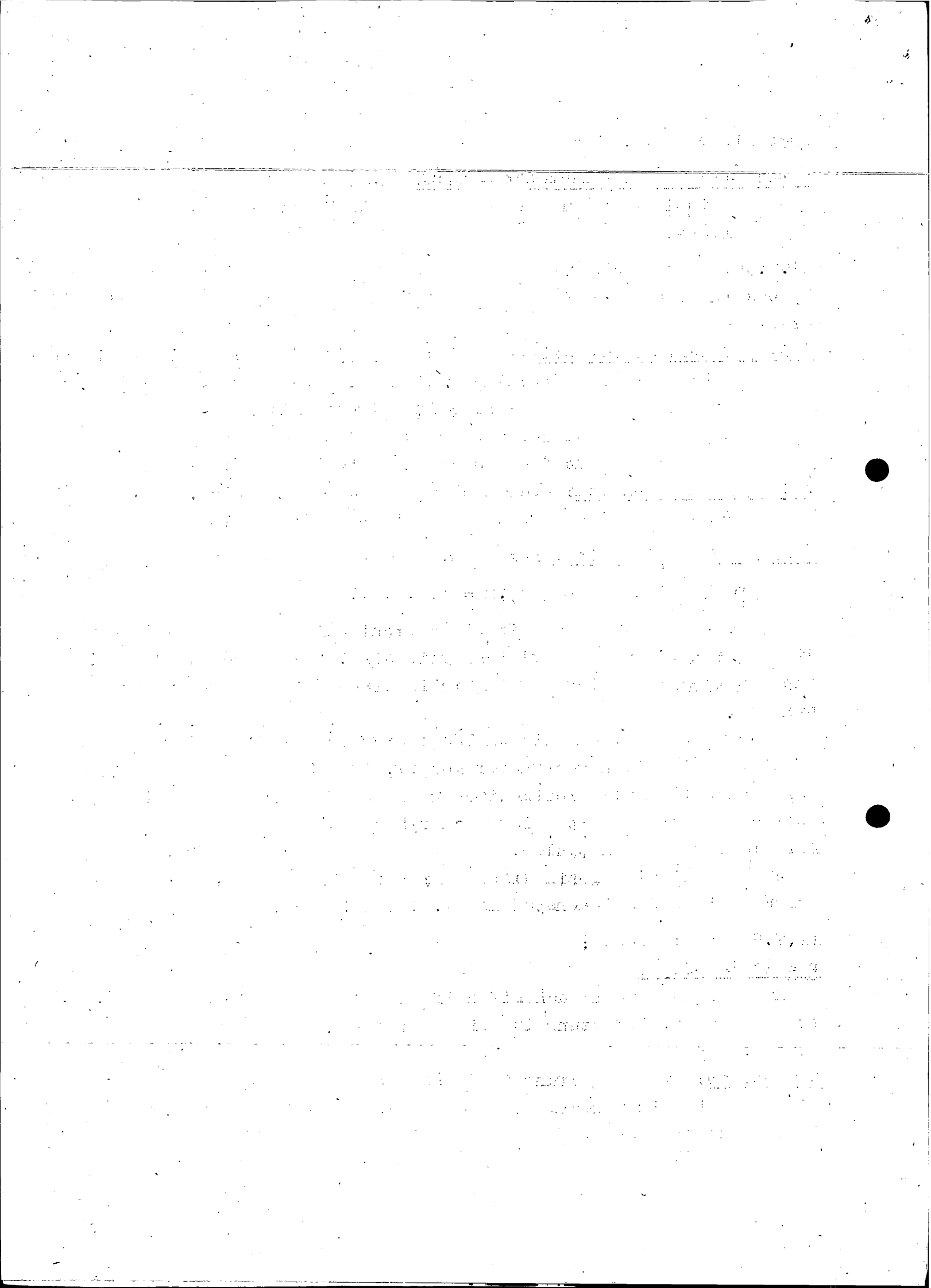
Jeder maximale archimedisch geordnete Körper ist isomorph zu  $R^V$ : Monomorphie des Axiomensystems  $(+, \cdot, <, \text{arch}, \text{maximal})$ :

11.7.56 Prof. Kneser:

### Bewertete Körper

Man kann  $R^V$  aus  $R$  auch mit Hilfe der "Bewertung" durch den Betrag erhalten. Bewertung ist eine Verallgemeinerung des absoluten Betrages.

Definition: Eine Bewertung ist eine Abbildung  $x \mapsto ||x|| \in W$  eines Körpers  $K$  in einen geordneten Körper  $W$ , den Wertekörper, mit folgenden Eigenschaften:



$$||x|| \geq 0 \text{ für } x \in K, \quad ||x|| = 0 \quad x = 0$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

$$||x \cdot y|| = ||x|| \cdot ||y||$$

Die trivialen Bewertungen  $||x|| = 0$  für alle  $x \in K$  und  $||x|| = 1$  für alle  $x \in K$  ausser  $x = 0$  werden ausgeschlossen.

- Beispiele:
- 1)  $K = R^V, \quad W = R^V \quad ||x|| = |x|$
  - 2)  $K=R(i)= a+bi, \quad a,b \in R, W \in R^V, \quad ||a+bi|| = a^2+b^2$
  - 3)  $K=R; \quad p$  Primzahl,  $0 \neq a \in R.$

$p$ -adische Bewertung: Darstellung von  $a$  als  
 $a = p^k \frac{m}{n}$  mit  $(m,p) = (n,p) = 1, \quad k$  ganz

Man setzt:  $||a|| = c^k$  für ein festes  $c$  mit  $0 < c < 1$

Für  $p = 2$  und  $c = \frac{1}{2}$  ist zum Beispiel:

$$||\frac{1}{2}|| = c^0 = 1,$$

$$||\frac{1}{2} - 1|| = ||-\frac{2}{2}|| = c^1 = \frac{1}{2},$$

$$||\frac{1}{2} - 1 + 2|| = ||\frac{4}{2}|| = c^2 = \frac{1}{4} \quad \text{usw.}$$

Daraus folgt  $\frac{1}{2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \dots$  mit Konvergenz(!) im Sinne dieser Bewertung.

Definition der konzentrierten Folge in einem bewerteten Körper:

$(a_n)$  heisst konzentriert, wenn das Cauchysche Konvergenzkriterium

$$||a_m - a_n|| \rightarrow 0 \text{ für alle } m, n \rightarrow \infty \text{ erfüllt ist.}$$

Ein Körper  $K$  heisst vollständig, wenn jede konzentrierte Folge  $(a_n) \quad a_n \in K$  einen Grenzwert  $a$  in  $K$  hat.

Konstruktion des vollständigen Körpers zu einem bewerteten Körper  $K$ :

Für Folgen  $A = (a_n)$  und  $B = (b_n) \quad (a_n, b_n \in K)$  setzt man fest:

$$A \pm B = (a_n \pm b_n)$$

und bestätigt, dass Summe, Differenz und Produkt konzentrierter Folgen wieder konzentrierte Folgen sind.

Die reziproke Folge  $A^{-1} = B$  wird in folgender Weise festgesetzt:

für  $A (a_n \rightarrow 0)$  :

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy auditing of the accounts.

In addition, the document outlines the necessary steps for reconciling bank statements with the company's internal records. This process involves comparing the balance on the bank statement with the balance in the company's ledger at the end of each month. Any discrepancies should be investigated immediately to identify errors or unauthorized transactions.

Furthermore, it is crucial to review the accounts regularly to ensure that all payments have been received and recorded. This includes checking for any outstanding invoices and following up on late payments. Maintaining a clear and organized system for tracking income and expenses is essential for the financial health of the business.

The document also provides guidelines for handling cash transactions. It advises that cash receipts should be recorded promptly and accurately. Similarly, cash payments should be documented with proper receipts and recorded in the accounting system. This helps in maintaining a clear trail of all cash flows.

Finally, the document stresses the importance of keeping all financial records secure and accessible. Regular backups of the accounting data should be performed to prevent data loss. Additionally, access to the records should be restricted to authorized personnel only to ensure confidentiality and integrity of the financial information.



$$b_n = 0, \text{ wenn } a_n = 0$$

$$b_n = a_n^{-1} \text{ sonst}$$

Mit  $0 = (0, 0, \dots)$  und  $\underline{1} = (1, 1, \dots)$  bilden die Folgen  $A, B, C, \dots$  noch keinen Körper, da die Nullfolgen mit nicht verschwindenden Gliedern keine reziproken Folgen haben. Um einen Körper zu erhalten, führt man für konzentrierte Folgen folgende Äquivalenzrelation ein:

$$A \sim B \iff a_n - b_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Die zu einer Folge  $A$  äquivalenten Folgen  $B$  bilden die Klasse

$$\mathcal{K}_A = \{B \mid B \sim A\}.$$

Die Klassen äquivalenter Folgen bilden einen Körper  $L$ , wenn man die Verknüpfungen wie folgt definiert:

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{G + H \mid G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\} = \mathcal{G} + \mathcal{H}$$

Die Klassen, in denen die Folgen  $(a, a, \dots)$  liegen ( $a \in K$ ), bilden einen zu  $K$  isomorphen Unterkörper, d.h.  $K \subseteq L$ . Die Bewertung von  $K$  lässt sich auf  $L$  erweitern, wobei der Wertekörper  $W$  zu einem Wertekörper  $\bar{W}$  erweitert werden muss.

Es wurde angedeutet, dass der Körper  $L$  vollständig ist, d.h. in  $L$  besitzt jede konzentrierte Folge einen Grenzwert.

So kommt man vom rationalen Zahlenkörper durch Betragsbewertung zum Körper der reellen Zahlen, durch  $p$ -adische Bewertung zu den  $p$ -adischen Zahlkörpern.

13.-14.7.56 Prof.Haupt.

A. Limesdefinition in s,d-Verbänden.

$$\overline{\lim} a_n: \text{ Def } \inf(\sup(a_k; k \geq n); n=1,2,\dots)$$

$$\underline{\lim} a_n: \text{ Def } \sup(\inf(a_k; k \geq n); n=1,2,\dots)$$

$$\lim a_n: \text{ Def } \text{der gemeinsame Wert von } \overline{\lim} \text{ und } \underline{\lim}, \text{ falls beide gleich sind.}$$

B. Integraltheorie als Problem der Kompletterung (Vervollständigung) eines normierten Vektorverbandes von Funktionen und der entsprechenden Erweiterung eines linearen, positiven, stetigen Funktionals (M.H.Stone).

Zur Einführung: Hinweis auf die Definition des bestimmten Integrals als Unterteilungsintegral durch Konstruktion. Gegenüber dieser Konstruktion ist hier der Ausgangspunkt ein axiomatischer und das

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Main body of faint, illegible text, appearing to be several paragraphs of a document.

DECLARATION OF THE

Text at the bottom of the page, including what appears to be a signature line and possibly a date or reference.

Problem ein Erweiterungsproblem.

Es sei also gegeben

(1) ein Vektorverband  $v$ , dessen Elemente reelle (endliche) Funktionen  $f|A$  sind mit einer beliebigen Menge  $A$  als gemeinsamem Definitionsbereich.

(2) ein lineares, positives, stetiges Funktional  $V|v$  d.h. eine reelle endliche Funktion mit  $v$  als Definitionsbereich, die folgende Eigenschaften besitzt:

(a) für  $f, g \in v$  gilt  $L(f+g) = L(f) + L(g)$  und  $L(af) = aL(f)$  für jede reelle Zahl  $a$  (Linearität);

(b) für  $f \in v$  mit  $f \geq 0$  (d.h.  $f(x) \geq 0$  für jedes  $x \in A$ ) ist  $L(f) \geq 0$  (Positivität);

(c) Ist  $f_n \in v$  mit  $f_n \geq f_{n+1}$  und  $\lim f_n = 0$  (im verbandstheoretischen Sinne, d.h.  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$  und  $\lim f_n(x) = 0$  (punktweise Konvergenz) für jedes  $x \in A$ ), so gilt  $\lim L(f_n) = 0$  (Stetigkeit).

Man setze nun  $N(f) = L(|f|)$  für  $f \in v$ . Dann hat  $N|v$  die Eigenschaften einer Quasi-Norm, oder Quasi-Bewertung  $\|f\| = N(f)$ , d.h.

(I)  $N(0) = 0$ ,  $(f) \geq 0$ ;  $N(f) \geq 0$ ;

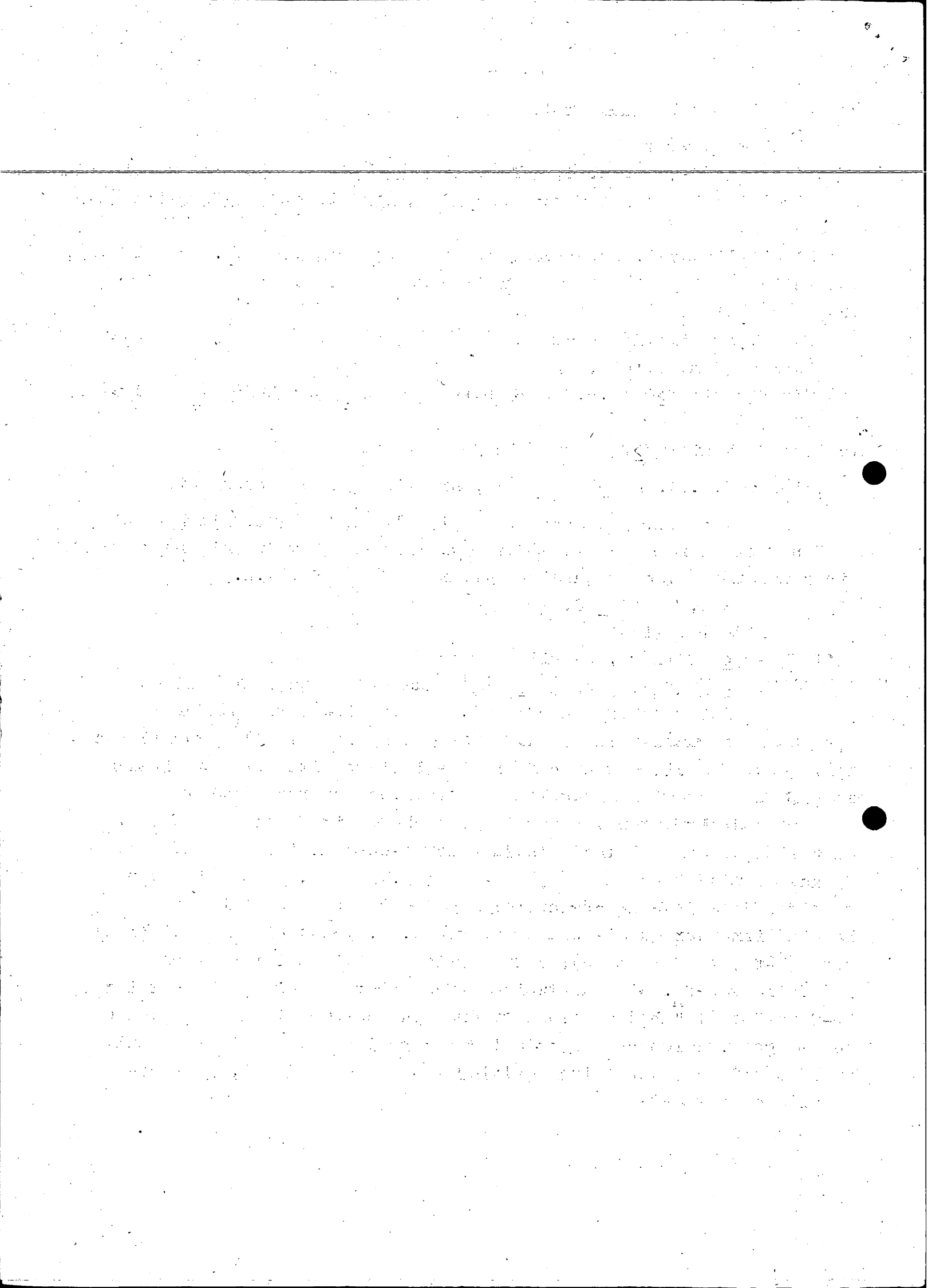
(II)  $N(af) = |a|N(f)$

(III)  $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ , es gilt sogar

(III')  $N(f) \leq \sum N(f_n)$ , wenn  $|f| \leq \sum |f_n|$  (Aus  $N(f) = 0$  kann aber nicht auf  $f = 0$  geschlossen werden). Man erweitert nun zunächst

$N|v$  zu einer Quasi-Norm  $N|a$  auf das System aller reellen Funktionen  $h|A$ , wobei  $N|a$  die Eigenschaften (I)-(III') besitzt und wobei auch unendliche Werte für  $N$  zugelassen werden. Sodann komplettiert

(vervollständigt) man  $v$  bezüglich  $N$  nach der im Vortrag von Prof. Kneser angegebenen Methode (Adjunktion  $N$ -konzentrierter Folgen  $f_n$  aus  $v$ , also  $f_n \in v$  und  $N(f_n - f_k) < \epsilon$  für  $n, k > C(\epsilon)$ ). Dabei wird dann gezeigt, dass jede  $N$ -konzentrierte Folge gegen eine Funktion  $h \in a$  im Sinne der Quasi-Norm konvergiert, d.h. dass ein  $h \in a$  existiert mit  $N(h - f_n) < \epsilon$  für  $n > D(\epsilon)$ ; dazu beweist man die Existenz einer Teilfolge von  $f_n$ , die punktweise  $N$ -fast überall gegen  $h$  konvergiert. "N-fast überall" bedeutet: Ausgenommen (höchstens) in den Punkten einer Menge  $Q$ , deren charakteristische Funktion  $c(x; Q)$  die Norm Null hat:  $N(c(x; Q)) = 0$ ; dabei ist definiert:  $c(x; Q) = 1$  oder  $0$  je nachdem  $x \in Q$  oder  $x \in A - Q$ .



Im klassischen Fall, dass  $v$  etwa der Vektorverband der reellen, stetigen Funktionen  $f|A$  in dem abgeschlossenen Intervall  $A$  ist und  $L|v$  das (Cauchy)Riemannsches Integral  $\int_A f dx$ , führt die oben beschriebene Vervollständigung mit Hilfe der Quasi-Norm zum Lebesgueschen Integral.

Zum Schluss Hinweis auf eine Erweiterung von  $L|v$  mit verbandstheoretischen Mitteln (ohne Heranziehung einer Norm) nämlich mittels fortgesetzter Adjunktion von monoton abwechselnd steigenden und fallenden Folgen von Funktionen (beginnend mit etwa steigenden Folgen von Funktionen aus  $v$ ). Diese Erweiterung führt im wesentlichen zum gleichen Ergebnis, wie die Vervollständigung mittels der Norm.

Literatur z.B. Haupt-Aumann-Pauc, Differential-und Integralrechnung, 2.Aufl. und zwar: Betr.Theorie der reellen Zahlen Bd.I. (Berlin 1948), I. und II. Abschnitt: - Betr.Theorie der Verbände (und Vektorverbände) Bd.III. (Berlin 1955), I. Abschnitt: - Betr. Theorie der linearen Funktionale Bd.III., VI. Abschnitt. Zur letzteren Theorie auch G.Aumann, Reelle Funktionen, (Berlin 1954), 9. Abschnitt.

