Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitsgemeinschaft über partielle Differentialoperatoren
27.8. - 1.9.62

Die Leitung der Arbeitsgemeinschaft hatten Herr KÖNIG (Aachen/Köln) und Herr TILLMANN (Heidelberg). Außer ihnen waren anwesend: Fräulein BECKEN (Hamburg), Frau PRIEß (München) und die Herren BRACKHAGE (Karlsruhe), DOLD (Zürich), M.KNESER (München), LAMPRECHT (Würzburg), LEPTIN (Hamburg), PACHALE (Berlin), ROQUETTE (Tübingen), SCHWARZ (Freiburg), v.WALDENFELS (Jülich).

Im Zentrum der Tagung stand die Doktorarbeit von Lars HÖRMANDER: On the theory of general partial differential operators, die 1955 in den Acta Mathematica erschienen ist. HÖRMANDER versucht hier einen Überblick zu bekommen über die allgemeine Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen vornehmlich mit konstanten Koeffizienten. Seine Hilfsmittel sind die Theorie der Operatoren im Hilbertraum und die Distributionentheorie von Laurent SCHWARTZ. Die Arbeit geht aus von dem Satz von MALGRANGE, daß jede partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten eine Elementarlösung besitzt.

Die einzelnen Vorträge

KÖNIG (Aachen): Distributionentheorie

Der Vortrag, der den ganzen ersten Tag in Anspruch nahm, gliederte sich in fünf Abschnitte.

1. Glatte Funktionen. Es wurden der Raum $C^\infty(\Omega)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen in einem Gebiet $\Omega \subset R^n$ und seine Teilräume $C^\infty_\wedge(\Omega)$ (Funktionen, die samt ihren Ableitungen beschränkt sind), $C^\infty_0(\Omega)$ (Funktionen, die samt ihren Ableitungen am Rande oder im Unendlichen verschwinden), $C^\infty_*(\Omega)$ (Funktionen mit kompaktem Träger), $C^\infty_K(\Omega)$ (Funktionen mit den Träger in den festen Kompaktum $K \subset \Omega$) untersucht. Dabei zeigten sich die von KÖNIG eingeführten Halbnormen

$$\|f\|_m(A) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in A} \left| \partial^\alpha f(x) \right|$$

($A \subset \Omega$ beliebige Teilmenge, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, ganz, $\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_n!$, $\partial^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$)

von großem Vorteil. Sie erlauben nämlich in vielen Fällen direkte Abschätzungen, ohne daß die Formeln zu kompliziert werden. Zum Beispiel ist $\|fg\|_m(A) \leq \|f\|_m(A) \, \|g\|_m(A)$.

2. Vektorräume mit abzählbar vielen Halbnormen. Diese Theorie, die im wesentlichen von GELFAND und SCHILOW "Verallgemeinerte Funktionen" 2.Bd. übernommen wurde, gestattet einen bequemen Einstieg in die topologische Struktur der genannten Räume glatter Funktionen und ihrer Dualräume, der Distributionenräume.

3. Die Distributionen und ihre wichtigsten Eigenschaften.

4. Faltung. Faltung einer Distribution mit einer glatten Funktion von kompaktem Träger, d.h. Regularisation. Faltung von Distributionen miteinander. Die Stetigkeit der Operationen ergibt sich aus direkten Abschätzungen mit Hilfe der in 1. genannten Halbnormen und den Halbnormen für Distributionen

$$\|A\|^m(K) = \sup \left\{ |\langle A, u\rangle| \; : u \in C^\infty_K(\Omega), \|u\|_m(K) \leq 1 \right\}$$

5. Fouriertransformation.

LAMPRECHT (Würzburg): <u>Existenz und Eigenschaften einer Elementarlösung.</u>

Sei $P(\xi)$ ein Polynom mit konstanten komplexen Koeffizienten in $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, so bezeichnen wir mit $\tilde{P}(\xi)$ den Ausdruck $\left(\sum_\alpha |\partial^\alpha P(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Sei $D = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$, so gibt es zu dem Differentialoperator $P(D)$ mindestens eine Distribution E, so daß $P(D)E = \delta$ ist. E heißt eine Elementarlösung von $P(D)$. Die Ordnung der Distribution E ist höchstens $[\frac{n}{2}] + 1$. Sei Q ein zweites Polynom und sei $\tilde{Q}(\xi) < \text{konst.}\ \tilde{P}(\xi)$ für alle reellen ξ, so ist $Q(D)E$ ebenfalls eine Distribution der Ordnung $\leq [\frac{n}{2}] + 1$. Ist f eine L^2-Funktion mit kompaktem Träger, so ist $Q(D)E*f$, also insbesondere $E*f$, eine lokale L^2-Funktion.

PRIEß (München): Definition des Minimal- und des Maximalbereichs eines Differentialoperators.

Sei $P(D)$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, der für Funktionen in einem Gebiet $\Omega \subset R^n$ erklärt ist. Eine L^2-Funktion u liegt genau dann im Minimalbereich $\vartheta_{min}(P)$, wenn es eine Folge $u_j \in C_*^\infty(\Omega)$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: u_j und $P(D)u_j$ konvergieren in der L^2-Norm und $u_j \rightarrow u$. Eine L^2-Funktion u liegt genau dann im Maximalbereich, wenn $P(D)u$, die Ableitung im Distributionensinne verstanden, eine L^2-Funktion ist. - Einige Sätze über abgeschlossene Operatoren in Hilberträumen.

PACHALE (Berlin): Vergleich der Minimalbereiche I.

Neuer kurzer Beweis für die Existenz einer Elementarlösung für den Fall, daß Ω ein beschränktes Gebiet ist. Man nennt einen Differentialoperator $Q(D)$ schwächer als $P(D)$, wenn $\vartheta_{min}(P) \subset \vartheta_{min}(Q)$ ist. Wenn Ω beschränkt ist, gilt $\tilde{Q}(\xi) < \text{konst.}\ \tilde{P}(\xi)$ für alle reellen ξ.

BECKEN (Hamburg): Vergleich der Minimalbereiche II. Operatoren vom Haupttyp, elliptische Operatoren.

Umkehrung des von PACHALE vorgetragenen Satzes: Wenn Ω beschränkt und $\tilde{Q}(\xi) < \text{konst.}\ \tilde{P}(\xi)$ für alle reellen ξ ist, so ist Q schwächer als P. Wir nennen den homogenen Bestandteil höchsten Grades $p(\xi)$ den Hauptteil von $P(\xi)$. Der Operator $P(D)$ heißt vom Haupttyp, wenn $P(D)$ ebenso stark ist wie alle Operatoren mit den gleichen Hauptteil. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, falls Ω als beschränkt vorausgesetzt wird, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial \xi_i}(\xi)$ nicht alle gleichzeitig für ein reelles $\xi \neq 0$ verschwinden. $P(D)$ heißt elliptisch, wenn $p(\xi)$ für kein reelles $\xi \neq 0$ verschwindet. Dies ist äquivalent damit, daß $P(D)$ stärker ist als jeder Operator kleinerer oder gleicher Ordnung (Ω beschränkt).

SCHWARZ (Freiburg): <u>Struktur des Minimalbereichs.</u>

Ω sei wieder beschränkt. Daß die Funktionen aus $\vartheta_{min}(P)$ stetig oder in der p-ten Potenz integrabel sind ($2 \leq p \leq \infty$), kann durch Integrabilitätsbedingungen an $1/\tilde{P}(\xi)$ ausgedrückt werden. Die Eigenschaft, dem Minimalbereich anzugehören, hat lokalen Charakter in Ω.

Ein Polynom $P(\xi)$ heißt vollständig, wenn es auch nach einer beliebigen Translation oder reellen linearen Transformation seiner Koordinaten noch von allen Koordinaten abhängt. Für einen solchen Differentialoperator gilt: Gehört u allen $\vartheta_{min}(P^n)$ $(n = 1,2,\dots)$ an, so ist $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

v. WALDENFELS (Jülich): <u>Vergleich der Maximalbereiche.</u>

Ω sei beschränkt und $\vartheta_{max}(P) \subset \vartheta_{max}(Q)$. Dann gilt entweder $Q = aP + b$ (a und b konstant), oder $P(\xi) = p(\langle x_o, \xi \rangle)$, $Q(\xi) = q(\langle x_o, \xi \rangle)$, wo x_o ein reeller konstanter Vektor, p und q Polynome einer Veränderlichen und $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(q)$ ist.

ROQUETTE (Tübingen): <u>Operatoren vom lokalen Typ.</u>

Ein Differentialoperator P(D) heißt vom lokalen Typ, wenn die Eigenschaft, dem Maximalbereich anzugehören, lokalen Charakter trägt, genauer: wenn $\vartheta_{max}(P)$ durch Multiplikation mit C_*^∞-Funktionen in sich überführt wird. Diese Bedingung läßt sich durch verschiedene reell-algebraische Eigenschaften von $P(\xi)$ ausdrücken. Für einen vollständigen Operator vom lokalen Typ läßt sich eine Elementarlösung direkt durch komplexe Integration konstruieren.

TILLMANN (Heidelberg): <u>Hypoelliptische Operatoren.</u>

Sei Ω beschränkt. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

a) P ist vollständig und vom lokalen Typ.

b) Aus $P(D)u = 0$ folgt, daß u beliebig oft differenzierbar ist.

c) Es gibt eine Elementarlösung, die außerhalb des Nullpunktes eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist.

Die Bedingung c) beinhaltet nach SCHWARTZ, Théorie des distributions I (1957), S. 143 ff., daß P hypoelliptisch ist, d.h. daß eine Lösung u von $P(D)u = f$ in jeder offenen Menge beliebig oft differenzierbar ist, in der f beliebig oft differenzierbar ist.

BRACKHAGE (Karlsruhe): Beispiele.

Mit Hilfe der im Vortrag von ROQUETTE gewonnenen Kriterien ergibt sich unmittelbar, daß die Wärmeleitungsgleichung hypoelliptisch ist, die Schrödingergleichung dagegen nicht. Weiter ist jeder Operator der Form $P = Q^{2k} + R$, wo Q ein beliebiges reelles Polynom vom Grad m und R ein positiv definites homogenes Polynom vom Grad $2km-2(k-1)$ ist, hypoelliptisch.

Es gilt der folgende Approximationssatz: Ist Ω beliebig, P vom lokalen Typ, $u \in \vartheta_{max}(P)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in \vartheta_{max}(P) \cap C^{\infty}(\Omega)$ mit $\|u-v\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$, $\|P(D)u-P(D)_v\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.

KNESER (München): Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten ohne Lösungen.

Sei $P(x,D)$ ein Differentialoperator vom Grade m mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten. Wir setzen $C = P\overline{P} - \overline{P}P$ ($\overline{P}$: konjugiert komplexe Koeffizienten) und bezeichnen mit P_m den Anteil von P vom Grade m, entsprechend C_{2m-1}. Wenn $P(x,D)u=f$ für alle $f \in C_*^{\infty}(\Omega)$ eine Distributionenlösung u besitzt, so muß $C_{2m-1}(x,\xi)$ dort verschwinden, wo $P(x,\xi)$ verschwindet. Mit Hilfe dieses Satzes erkennt man, daß das von Hans LEWY herrührende Beispiel $P(x,D) = -iD_1 + D_2 - 2(x_1+ix_3)D_3$ nicht für alle $f \in C_*^{\infty}(\Omega)$ eine Lösung besitzt.

Literatur:

L.HÖRMANDER: On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94, 161-248 (1955).

L.HÖRMANDER: Differential operators of principal type. Math.Ann. 14o, 124-146 (196o).

L.HÖRMANDER: Differential equations without solutions. Math.Ann. 14o, 169-173 (196o)

B.MALGRANGE: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. Ann.Inst.Fourier 6, 271-355 (1955)

L.SCHWARTZ: Théorie des Distributions I,II 2.Aufl. Paris 1957/59

F.TRÈVES: Thèse d'HÖRMANDER I,II. Séminaire BOURBAKI, Exposés 13o, 135, 2. Aufl. Paris 1959