11

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht
"Grundlagen der Geometrie"
7. bis 11. Juni 1965

Einmal im Jahr findet im Math. Forschungsinstitut, Oberwolfach, eine Tagung über die "Grundlagen der Geometrie" statt. In diesem Jahr stand sie unter der Leitung von Prof. Dr. F. Bachmann (Kiel) Prof. Dr. H. Freudenthal (Utrecht) und Prof. Dr. E. Sperner (Hamburg).

Tagungsteilnehmer:

Artmann, B., Dr., Gießen
Bachmann, F. Prof. Dr., Kiel
Benz, W., Dr., Frankfurt
Bilinski, St., Prof. Dr., Zagreb
Bollow, H., Prof. Dr., Darmstadt
Freudenthal, H., Prof. Dr., Utrecht
Götzky, M., Dr., Kiel
Glock, E., Dr. Gießen
Goldenbaum, D., Darmstadt
Junkers, W., Bonn
Karzel, H., Prof. Dr., Hamburg
Kinder, H., Kiel
Lenz, H., Prof. Dr., München
Lingenberg, R., Prof. Dr., Darmstadt
Lüneburg, H. Dr., Mainz
Mäurer, H., Dr., Frankfurt
Meißner, H. Dr., Hamburg
Misfeld, J., Dr., Hamburg
Müller, H., München
Nolte, W., München
Pejas, E., Dr., Kiel
Petkantschin, B., Prof. Dr., Sofia
Salzmann, H., Prof. Dr., Frankfurt

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

"Grundlagen der Geometrie"

7. bis 11. April 1965

Einmal im Jahr findet am Math. Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über die "Grundlagen der Geometrie" statt. In diesem Jahr stand sie unter der Leitung von Prof. Dr. F. Bachmann (Kiel), Prof. Dr. H. Freudenthal (Utrecht) und Prof. Dr. E. Sperner (Hamburg).

Tagungsteilnehmer:

Artmann, B., Dr., Gießen
Bachmann, F., Prof. Dr., Kiel
Benz, W., Dr., Frankfurt
Bilinski, St., Prof. Dr., Zagreb
Bolley, H., Prof. Dr., Darmstadt
Freudenthal, H., Prof. Dr., Utrecht
Götzky, M., Dr., Kiel
Glock, E., Dr., Gießen
Goldenbaum, D., Darmstadt
Junkers, W., Bonn
Karzel, H., Prof. Dr., Hamburg
Kinder, H., Kiel
Lenz, H., Prof. Dr., München
Lingenberg, R., Prof. Dr., Darmstadt
Lüneburg, H., Dr., Mainz
Maurer, H., Dr., Frankfurt
Meißner, H., Dr., Hamburg
Misfeld, J., Dr., Hamburg
Müller, H., [illegible]
Nolte, W., München
Pejas, E., Dr., Kiel
Petkantschin, B., Prof. Dr., Sofia
Salzmann, H., Prof. Dr., Frankfurt

Sperner, E., Prof. Dr., Hamburg

Vietzthum, K., Dr., München

Wolff, H., Dr., Kiel

Diese 26 Teilnehmer kamen von 11 Universitäten aus dem In- und Ausland. Die Tagung war verregnet, aber erfolgreich. Dafür sorgte das reichhaltige Programm mit 22 Vorträgen aus verschiedenen Gebieten der Grundlagen der Goemetrie. Gerade das regnerische Wetter machte wieder einmal die Vorteile des Lorenzenhofs als Tagungsort deutlich, da die Tagungsteilnehmer dort im Institut selbst untergebracht sind. Wie auf den früheren Tagungen wurden die durch die gemeinsame Unterbringung günstigen Kontaktmöglichkeiten rege ausgenutzt. Die lebhaften Diskussionen, die sich den meisten Vorträgen anschlossen, setzten sich in den Räumen des Hauses oft bis spät in die Nacht fort. Wie nützlich solche Tagungen mit ihren Möglichkeiten gegenseitiger Information und Anregung sind, wurde bereits im ersten Vortrag deutlich, den Prof. Dr. H. Lenz (München) über "Hilbertsche und Spernersche Anordnung" hielt, als er sich auf Spernersche und Junkersche Arbeiten, sowie auf Anregungen von Pejas bezog, die vielen Teilnehmern aus früheren Tagungen bekannt waren.

Neben den 22 Vorträgen, die auf der Tagung gehalten wurden, gab Prof. Dr. H. Freudenthal noch einen Bericht über "I. M. Jaglon und B. A. Rosenfeld, Projektive Metrik". Prof. Dr. I. M. Jaglon, der den Bericht ursprünglich selber geben wollte, schickte später einen Kurzbericht aus Moskau, der unter die Vortragsauszüge eingeordnet ist.

Vortragsauszüge

Artmann, B: Nichtdesarguessche komplementierte modulare Verbände.

Ein komplementierter modularer Verband L heißt ein ebener Verband, wenn er einen normierten Rahmen (vgl. etwa Maeda, Kontinuierliche Geometrien) der Länge 3 besitzt. Der Rahmen bestehe aus den Elementen $a_o, a_1, a_2, c_{o1}, c_{o2}, c_{12}$. Ein Automorphismus ω von L heißt (a_i, A_o)-Automorphismus $(i = 1, 2;\ A_o = a_1 \cup a_2)$, wenn $x^\omega = x$ für $x \leq A_o$ oder $x \geq a_1$. L heißt (a_i, A_o)-transitiv, wenn die Gruppe der (a_i, A_o)-Automorphismen transitiv auf der Menge der Relativkomplemente L_{oi} von a_i in $a_i \cup a_o$ ist $(i = 1, 2)$. Mit $L_{o1} = K$ als Koordinationsbereich und einer, wie in projektiven Ebenen eingeführten, ternären Verknüpfung T gelten ähnliche Sätze über den Zusam-

menhang zwischen algebraischen Eigenschaften von (K, T) und den Transitivitäten der Automorphismengruppen wie in projektiven Ebenen. Einen Einblick in die Struktur der ebenen Verbände gibt der Satz:

Sei L ein (a_1, A_0)-transitiver ebener Verband. Dann ist L subdirektes Produkt projektiver Ebenen genau dann, wenn alle idempotenten Elemente von (K, .) im Zentrum von (K, .) liegen.

Bachmann, F.: Zur Geometrie der abelschen Gruppen

Zu einer abelschen Gruppe V wird die Dieder-Erweiterung G gebildet und P = G-V als homogener Punktraum bezüglich V aufgefaßt. In P werden n-Ecke betrachtet. Es werden spezielle Klassen von n-Ecken und verschiedene "Derivationen" eines n-Ecks (Abbildungen der Menge aller n-Ecke in sich) definiert und ihre Beziehungen untereinander studiert. Hilfsmittel sind eine Relation Isobar für n-tupel aus P und die Abbildungen von P in P, die, geeignet verknüpft, eine abelsche Gruppe bilden.

Benz, W.: Die Gruppen der Lie-Transformationen in der ebenen Geometrie von Lie

Es sei $\mathfrak{R}$ die Gruppe der Lie-Transformationen der ebenen Lie-Geometrie über dem Körper K. Die folgenden Sätze wurden angegeben:

Ist -1 kein Quadrat in K, so wird $\mathfrak{R}$ erzeugt durch die Gruppe $\Omega\Gamma(\mathfrak{k})$ der Laguerre-Transformationen der ebenen Laguerre-Geometrie über K - hier definiert vermöge der parabolischen Kongruenz $\Gamma(\mathfrak{k})$ - mitsamt einer speziellen Lie-Transformation λ, die sich als Spiegelung an einer elliptischen Kongruenz darstellen läßt. Es gehört λ zum Zentralisator $Z(\eta)$ einer Spiegelung η an einer hyperbolischen Kongruenz. Weiterhin wird die Transitivität von $\mathfrak{R}$ auf den Lie-Thomsen-Figuren behauptet. - Die Frage der Fortsetzbarkeit von Zykelverwandtschaften zu Lie-Transformationen im Bereich von Geometrien (K, L), $L \supset K$ ein geeigneter lokaler Ring, wurde untersucht.

Bilinski, S.: Zur Begründung der Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene

Um eine analytische Begründung der Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene zu geben, geht man von einem Begriff des "allgemeinen Polygons" π aus, das als eine endliche Menge mit einer binären Relation erklärt ist. Für die allgemeinen Polygone werden dann die Operationen der Addition und Subtraktion definiert. Diese allgemeinen Begriffe werden auf "ebene Polygone" angewen-

det, für welche man dann den Begriff des Inhalts axiomatisch einführt. Die Frage wird für die hyperbolische Ebene spezialisiert. In dieser gibt man dann eine Invariante $S(\pi)$ an, für welche man zeigt, daß sie den gestellten Bedingungen genügt. Aus der analytischen Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks leitet man einige Formeln der elementaren hyperbolischen Planimetrie ab.

<u>Bollow, B.:</u> Die orthogonalen Gruppen vom Rang 1

Ist K ein Körper und f eine symmetrische Bilinearform mit Rang $(f) = 1$, so gibt es genau eine Gruppe $O_3^+(K, f)$. Sie wird bei Char. $(K) \neq 2$ nicht von den Spiegelungen erzeugt.

Für Char. $(K) = 2$ gibt es genau eine Gruppe $O_3(K, Q)$ mit Rang$(Q) = 1$; Q ist quasilinear.

Die projektiv-metrische Koordinatenebene über dem Körper K mit der metrischen Form f vom Rang 1 ist eine duale Translationsebene.

<u>Glock, E.:</u> Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Mazurkiewicz

Es wird ein allgemeiner mentheoretischer Schnittsatz angegeben, aus dem man folgenden geometrischen Satz herleiten kann, welcher die Feststellung von Mazurkiewicz (1914), daß eine Punktmenge existiert, die jede Gerade in genau 2 Punkten schneidet, verallgemeinert:

Gegeben ein affiner oder projektiver Raum der Dimension $n (< \infty)$ mit unendlicher Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. Bei festem $m (1 \leq m < n)$ sei jedem m-dimensionalen linearen Unterraum L eine Kardinalzahl q_L mit $m+1 \leq q_L \leq \mathfrak{m}$ zugeordnet. Dann existiert eine Punktmenge M mit $|M \cap L| = q_L$ für alle L.

<u>Götzky, M.:</u> Relationen in unitären Gruppen

Es sei $U_n(K, f_\alpha)$ eine unitäre Gruppe der Dimension n über einem Schiefkörper K. f_α sei eine hermitesche Form (mit Antiautomorphismus α von K) vom Rang n mit $\alpha \neq 1$ oder Index$(f_\alpha) \leq 1$. Bekanntlich besitzt $U_n(K, f_\alpha)$ in der Menge der Quasispiegelungen und Transvektionen σ_i ein Erzeugendensystem. Man kann nun alle gültigen Relationen $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m = 1$ betrachten. Einer jeden solchen Relation läßt sich eine Dimension $k \leq n$ (vgl. S. Becken, Spiegelungsrelationen in orthogonalen Gruppen, J. r. a. Math. 210 (1962)) zuordnen. (Diese Zuordnung geschieht nicht eindeutig, ist $k \leq n-1$, so soll eine k-dimensionale Relation auch $k+1$-dimensional heißen). Es wurde fol-

gender Satz bewiesen: Ist Char. K $\neq$ 2, so bilden die zweidimensionalen Relationen ein definierendes System für alle Relationen. Ist Char. K = 2, so bilden die dreidimensionalen Relationen ein definierendes Relationensystem.

Goldenbaum, D.: Über Konstruierbarkeitsfragen in Hilbert-Ebenen

In einer Hilbert-Ebene sind alle von den Axiomen der metrischen Ebene geforderten Konstruktionen mit Lineal (nur zum Verbinden von Punkten), Rechtwinkelmaß und Streckenabtrager lösbar, so daß von zwei Punkten ausgehend durch iterierte Anwendung dieser Instrumente die kleinste metrische Ebene K(A, B) entsteht. In ihr kann der Gebrauch des Streckenabtragers auf die Strecke A, B eingeschränkt werden. Für hyperbolische Hilbert-Ebenen wurde dann eine algebraische Charakterisierung der Idealebene von K(A, b) für B = (0, 0, 1) und A = (a, 0, 1) gegeben und für den Fall, daß a algebraisch über dem rationalen Zahlkörper ist, gezeigt, daß K(A, B) durch die Formwerte seiner Punkte und Geraden eindeutig bestimmt ist. Dabei ergab sich, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, in einer hyperbolischen Hilbert-Ebene zu zwei Punkten den Mittelpunkt und durch einen Punkt zu einer Geraden die hyperbolischen Parallelen mit obigen Instrumenten zu konstruieren.

Jaglom, I. M.: Projektive Metriken.

Dieser Vortrag, dessen vollständiger Inhalt in der Zeitschrift "Uspechi matematitscheskich nauk", Bd. XIX, Nr. 5 (119) (1964) veröffentlicht wurde, ist der allgemeinen Theorie der Räume mit der Cayley-Kleinschen projektiven Metrik gewidmet. Diese Räume, die man durch Grenzübergänge aus klassischen nichteuklidischen Räumen erhält, beschreibt man als reelle projektive Räume P_n, in denen ein quadratischer Kegel Q_o mit einem ebenen Gipfel, der den Raum P_{n-m_o-1} darstellt, gegeben ist; in diesem Raum ist ein quadratischer Kegel Q_1 mit einem ebenen Gipfel P_{n-m_1-1} gegeben usw. bis zum Kegel Q_{r-1} mit dem ebenen Gipfel $P_{n-m_{r-1}-1}$ und der nichtausgearteten Quadrik Q_r in diesem Gipfel. Dieser Raum erhält das Symbol ${}^{1_o 1_1 \dots 1_r}S_n^{m_o m_1 \dots m_{r-1}}$, wobei 1_a (a = o, ., . . . , r) der Index des Kegels (oder der Quadrik) Q_a ist. Man bestimmt die Entfernungen und die Winkel in

${}^{l_0 l_1 \dots l_r}S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$, erhält die Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen in diesem Raum und die metrischen Invarianten der Ebenenpaare und der Quadriken. Man bestimmt die Zyklen, die den euklidischen Sphären ähnlich sind, und beschreibt das Analogon der Möbius- und Laguerregruppen. Man zeigt Anwendungen der komplexen Zahlen auf die Liniengeometrie des ${}^{l_0 \dots l_r}S_n^{m_0 \dots m_{r-1}}$.

Junkers, W.: Mehrwertige Ordnungsfunktionen auf freien Ebenen

In seiner Dissertation ("Ordnungsfunktionen in freien Ebenen", Abh. math. Seminar Univ. Hamburg 24, S. 239-263 (1960)) gab J. Joussen auf konstruktivem Wege eine vollständige Übersicht über die regulären (d.h. der Geradenrelation genügenden) 2-wertigen (=Spernerschen) Ordnungsfunktionen auf einer beliebig vorgegebenen freien Ebene. Alle Ergebnisse dieser Abhandlung lassen sich vom Bereich der 2-wertigen auf den Bereich der mehrwertigen Ordnungsfunktionen ausdehnen, sofern nur die Einschränkung gemacht wird, daß die jeweils zugrunde gelegte Bildgruppe der zu bestimmenden Ordnungsfunktionen kommutativ sei. Eine Folgerung aus den verallgemeinerten Ergebnissen ist der Satz: Zu jeder kommutativen Gruppe A und jedem Element W aus A mit $W^2 = 1$ gibt es eine projektive Ebene F und dazu eine reguläre A-Ordnungsfunktion auf F, die A als genaue Bildgruppe und W zum Fundamentalwert hat.

Kinder, H.: Eine gemeinsame Kennzeichnung der orthogonalen und der projektiv-orthogonalen Gruppen vom Index 0 im Rahmen einer Begründung der n-dimensionalen absoluten Geometrie

Das Axiomensystem $\mathfrak{A}_n$ der n-dimensionalen absoluten Geometrie $(n \geq 2)$ lautet: Gegeben sei eine Menge $\mathfrak{G}$ (Bewegungen), eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ (Hyperebenenspiegelungen a, b, c...) und eine Verknüpfung . von $\mathfrak{G}$.

Grundaxiom: $\mathfrak{G}$, . ist eine Gruppe, $\mathfrak{S}$ Erzeugendensystem aus involutorischen Elementen.

Axiom F_n: Zu $a_1, \dots, a_{n-1}, A$ gibt es a mit $a | a_1, \dots, a_{n-1}, A$. (Punktspiegelungen A, B, ... sind definiert als involutorische Produkte $a_1 \dots a_n$ mit $a_1 | \dots | a_n$).

Axiom E_n: Zu $a_1, \dots, a_{n-2}, A, B$ mit $a_1 | \dots | a_{n-2} | A, B$ ex. $a | a_1, \dots, a_{n-2}$, A, B .

Axiom $1\text{-}E_n$: $a_1|\ldots|a_{n-2}|a,b|A,B \longrightarrow a = b \vee A = B$.

Axiom S_n^1: $a_1|\ldots|a_{n-2}, A|a,b,c$ und $a_{n-2} \neq A \longrightarrow ab = dc$.

Axiom S_n^0: $a_1|\ldots|a_{n-1}|a,b,c \longrightarrow ab = dc$.

Axiom M_n: Es gibt $a_1,\ldots,a_n$ mit $a_1|\ldots|a_n$.

Axiom A_n: Zu $a_1,\ldots,a_n$ mit $a_1|\ldots|a_n$ gibt es $a|a_1,\ldots,a_{n-1}$ mit $a \neq xa_n$.

Begründungstheorem: Jedes $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ ist Untergruppe einer $P0_{n+1}(K,F)$ mit Char. $K \neq 2$ und Rang $F = n+1$, Index 0 oder 1, oder Rang $F = n$, Index 0. Ferner wird ein Axiomensystem $\mathfrak{S}^*_n$ angegeben, dem genau die $0_{n+1}(K,F)$ und die $P0_{n+1}(K,F)$ vom Rang $n+1$ und Index 0 genügen.

Lenz, H.: Über Hilbertsche und Spernersche Anordnung

Eine Idee von Herrn Pejas über die Modelle der Hilbertschen Inzidenzaxiome und Anordnungsaxiome II, 1 und II, 4 wurde weiter verfolgt. Falls Einbettung in einen affinen Raum möglich ist, wird die Zwischenrelation durch eine beliebige Untergruppe Γ von K^* (dem Koordinatenkörper ohne 0) bestimmt. C liegt zwischen A und B, wenn und nur wenn das Verhältnis $AC:BC$ nicht in Γ liegt. Man erhält die Modelle als konvexe (Def. wie üblich) Teilmengen des affinen Raumes, die ein Dreieck enthalten. Von besonderem Interesse sind diejenigen Untergruppen Γ, die selbst konvex sind. Genau dann sind die Mengen, die aus zwei Punkten A, B, die durch Hinzunahme der dazwischen liegenden Punkte entstehen, konvex. Für den Fall, daß -1 und 2 nicht in Γ liegen, konnten alle konvexen Untergruppen $\neq \{1\}$ angegeben werden. Es sind die Einheitengruppen zu einem Bewertungsring. In den Fällen $-1 \in \Gamma$ und $-1 \notin \Gamma$, $2 \in \Gamma$ gelingen bisher nur Teilaussagen. Die behandelten Fragen hängen eng mit den Untersuchungen von Herrn Junkers über mehrwertige Ordnungsfunktionen zusammen.

Lüneburg, H.: Über die Struktursätze der projektiven Geometrie

Für die folgenden beiden Sätze wurden neue Beweise gegeben:

Satz 1. Ist S ein desarguesscher projektiver Raum vom Range größer oder gleich 3, so gibt es einen und bis auf umkehrbare semilineare Abbildungen nur einen Rechtsvektorraum V, so daß der Unterraumverband L(S) und der Verband L(V) der linearen Unterräume von V isomorph sind.

Satz 2. Sind S und S' zwei desarguessche projektive Räume vom Range

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

größer oder gleich 3 und ist a ein Isomorphismus von S auf S', so gibt es eine semilineare Abbildung des S zugrunde liegenden Vektorraumes auf den S' zugrunde liegenden Vektorraum, durch die a induziert wird.

Mäurer, H.: Laguerre- und Blaschke-Modelle der ebenen Laguerre-Geometrie

Sei K ein pythagoreischer Körper und w eine Anordnung von K. Es wurde das Laguerre-Modell L(K, w) definiert und gezeigt, daß es zum sogenannten Blaschkemodell isomorph ist. Insbesondere folgt hieraus $L(K, w) \cong L(K, w')$, wenn w und w' Anordnungen von K sind. Um das Laguerre-Modell in einer abstrakt gegebenen Laguerre-Geometrie zu konstruieren, wurde mittels eines involutorischen Automorphismus i von L eine Inzidenzstruktur A(i) und eine Kreisebene M(i) definiert und untersucht, wann A(i) eine affine Ebene bzw., wann M(i) eine Möbiusebene ist. Es zeigt sich, daß i hierzu eine spezielle Laguerre-Inversion sein muß und daß der L zugrunde liegende Körper pythagoreisch ist.

Meißner, H.: Der geschlitzte Gruppenraum

Ein geschlitzter Raum (Abk.: GR) ist ein dreidim. proj. Raum, aus dem eine Gerade und die damit inzidierenden Punkte und Ebenen entfernt sind. (Die Bildmenge der kinemat. Abb. von Blaschke u. Grünwald ist ein GR). 9 Grundaxiome beschreiben die Gemeinsamkeiten des 3-dim. proj., des 3-dim. affin. Raumes und des GR. Zusatzaxiome kennzeichnen dann die betr. einzelnen Räume. - Jeder Gruppe G mit einem Erz.System E aus involutor. Elementen lassen sich zwei geom. Strukt. (Gruppenebene (G, E) und Gruppenraum E(G)) zuordnen, wenn für G der Dreispieg.satz gilt und Geraden in (G.E) mit 1 Punkt mind. 2 versch. weitere Punkte besitzen. - Ergebnisse: (1) In jedem E(G) gelten die 9 Grundaxiome. (2) Ist (G, E) affin, so gilt: (a) "(G, E) ist regulär $\Longleftrightarrow$ (G, E) ist euklid. Ebene" und (b) "(G, E) ist nicht regulär $\Longleftrightarrow$ (G, E) ist singuläre Lotkerngeometrie". (3) E(G) ist ein GR $\Longleftrightarrow$ (G, E) ist affin.

Misfeld, J.: Bericht über topologische Inzidenzgruppen

Die Struktur projektiver Inzidenzgruppen läßt sich durch normale Fastkörper beschreiben (H. Karzel). Er zeigte ferner, daß diese Aussage auch bei Hinzunahme einer topologischen Struktur richtig bleibt, daß also die topologischen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Inzidenzgruppen durch topologische normale Fastkörper beschrieben werden. Somit können die Resultate von Tits und Kalscheuer über topologische Fastkörper angewendet werden. Es ergibt sich, daß jeder schwachtopologische, lokalkompakte und nicht vollständig unzusammenhängende Fastkörper zu einer topologischen Inzidenzgruppe G führt mit $G \cong Q/R$, C/R oder R/R (Q = Quaternionenschiefkörper). Ob sich alle schwach-topologischen, lokalkompakten und nicht vollständig unzusammenhängenden Inzidenzgruppen so beschreiben lassen, ist noch ungelöst; ebenso die damit zusammenhängende Frage, wann ein topologisch normaler Fastkörper ein topologischer Fastkörper ist.

Müller, H.: Eine Begründung der ebenen absoluten Geometrie aus Bewegungsaxiomen

1. Teil. Es wird ein bewegungsgeometrisches Axiomensystem der nicht elliptischen metrischen Ebenen mit "Punkt" als Grundbegriff angegeben, das dem Bachmannschen Axiomensystem (Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff) äquivalent ist.

1. Teil. Das Axiomensystem des ersten Teiles wird so abgeändert, daß auch Punkte auftreten können, an denen keine Punktspiegelungen existieren. Mit Ergebnissen von Lingenberg wird gezeigt, daß auch dann die Einbettung in eine projektiv-metrische Ebene möglich ist.

Nolte, W.: Zur Begründung der absoluten Geometrie des Raumes

Es wird ein gruppentheoretisches Axiomensystem für die absolute Geometrie des Raumes angegeben, in welchem neben einem Reichhaltigkeitsaxiom der Satz von den drei Ebenenspiegelungen und der Satz von den vier Ebenenspiegelungen sowie die Existenz eines eigentlichen Bündels (das ist ein mit je zwei anderen Bündeln verbindbares Bündel) gefordert wird. Ferner soll es keine vier Erzeugenden geben, so daß das Produkt je zweier davon involutorisch ist (Axiom $\neg$ PT). Für dieses Axiomensystem kann eine Einbettung des zugehörigen Gruppenraumes in einen projektiv-metrischen Raum durchgeführt werden.

Das angegebene Axiomensystem ist unter der Voraussetzung von $\neg$ PT allgemeiner als das von Ahrens für die absolute Geometrie des Raumes (Math. Zeitschr. 1959) angegebene Axiomensystem.

Pejas, W.: Eine Einbettbarkeitsfrage für Hilbert-Ebenen

Eine Hilbert-Ebene (d.h. eine Ebene, die den Hilbertschen Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiomen genügt) heißt vollständig, wenn ihre Bewegungsgruppe mit der Bewegungsgruppe ihrer Idealebene identisch ist. Es werden Beispiele von Hilbert-Ebenen angegeben, die sich nicht durch Hinzunahme von Idealpunkten zu einer vollständigen Hilbert-Ebene erweitern lassen.

Petkantschin, B.: Über die Herleitung der trigonometrischen Grundformeln in der Lobatschewskij-Bolyaischen Geometrie

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck in der hyperbolischen Geometrie mit $\sphericalangle ABC = \pi : 2$, $\sphericalangle BAC = x$, $|AB| = y$. Bei der rein planimetrischen Begründung der hyperbolischen Trigonometrie ohne Heranziehung irgendwelcher Kurven in der Ebene spielt eine fundamentale Rolle die Tatsache, daß die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{y \to +0} \frac{|CB|}{y} = s(x) \quad (x \text{ fixiert}), \qquad \lim_{y \to +0} \frac{|AC|}{y} = c(x) \quad (x \text{ fixiert})$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{|CB|}{x} = k(y) \quad (y \text{ fixiert}).$$

Es zeigt sich, daß die Existenz dieser Grenzwerte leicht aus einfachen Eigenschaften der konvexen Funktionen folgt.

Salzmann, H.: Topologische Geometrien

Sei E der topologische Raum der Punkte der euklidischen Ebene. Eine abgeschlossene, zur Zahlengeraden homöomorphe Teilmenge von E heiße Kurve. Ist L ein Kurvensystem in E, derart, daß durch je zwei verschiedene Punkte von E genau eine Kurve aus L geht, so wird (E, L) als ebene topologische Geometrie bezeichnet. In L gibt es eine natürliche Topologie, so daß Verbinden und Schneiden (soweit definiert) stetig sind. Kollineationen ebener topologischer Geometrien sind von selbst stetig, sie bilden eine höchstens 6-dimensionale Liegruppe Γ (bezüglich der kompakt-offenen Topologie): $\dim \Gamma = 6$ tritt nur bei der reellen affinen Ebene auf, $\dim \Gamma = 5$ kommt nicht vor, die ebenen Geometrien mit 3- und 4-dimensionaler Gruppe werden klassifiziert.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vitzthum, K.: Über verallgemeinerte MOULTON-Konstruktionen

Die von PIERCE angegebenen nichtdesarguesschen $M_\Phi(F)$-Ebenen sind im endlichen Fall vollständig klassifizierbar. Sie sind stets vom LENZschen Typ IV b.

Unendliche $M_\Phi(F)$-Ebenen können höchstens zu den Klassen II, III, IV b gehören.

Nimmt man Φ als "ordnungsumkehrend" an, so erhält man eine Ebene ohne Existenz- und Eindeutigkeitsaxiome.

Wolff, H.: Spiegelungsrelationen in orthogonalen Gruppen

Sei $V = V_n(K, f)$ ein n-dimensionaler metrischer Vektorraum über einem Körper K von Charakteristik $\neq 2$, mit einer symmetrischen Bilinearform f; dabei darf die Dimension ρ des Radikals von V beliebig sein, nur der Trivialfall $\rho = n$ sei ausgeschlossen. Die Spiegelungen σ an den (n-1)-dimensionalen regulären Teilräumen von V werden, wie üblich, Symmetrien von V genannt. Die Symmetrien von V erzeugen bekanntlich die das Radikal von V vektorweise festlassende Untergruppe der orthogonalen Gruppe von V.

In Zusammenarbeit mit J. AHRENS, Hull, und A. DRESS, Kiel, wird bewiesen: *Jede Relation $\sigma_1, \ldots, \sigma_k = 1$ zwischen Symmetrien ist Folgerelation 2- oder 4-stelliger solcher Relationen.* Aus dem Beweis ergibt sich, daß der für $\rho = o$ von S. BECKEN (J. Reine Angew. Math. 210, 1962) bewiesene Satz genau dann gilt, wenn $\rho \leq 1$ ist, Bei $\rho \geq 2$ gibt es 4-stellige dreidimensionale Relationen, die sich nicht auf zweidimensionale zurückführen lassen.