Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

B E R I C H T

Arbeitstagung des Frankfurter Seminars
Leitung: Professor Dr. R. Baer
17. bis 21.6.1965

Im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach fand eine der bereits traditionellen Arbeitstagungen unter Leitung von Herrn Professor Dr. R. Baer statt. Außer seinen Frankfurter Mitarbeitern und Schülern nahmen folgende Gäste teil:

Dr. P.M. Cohn (London)
Dr. S.K. Jain (Neu Delhi)
Dr. H. Lüneburg (Mainz)
Prof.Dr. Levin (Rutgers Univ., New Brunswick/USA)
Prof.Dr. O. Nagai (Havard Univ., Boston)
Dr. Rose (Cambridge)
Prof.Dr. H. Simon (Miami)
Prof.Dr. H. Zassenhaus (Columbus, Ohio)

Aus Frankfurt nahmen teil:

Prof.Dr. R. Baer
B. Amberg
H. Bender
H.J. Birkenstock
Frl. R. Blödner
Y. Chen
Frl. Dr. J. Cofman
Dr. P. Dembowski
K. Faltings
Dr. B. Fischer
R. Göbel
J. Groh
P. Grosse
K.D. Günther
Dr. H. Heineken
Dr. O.H. Kegel
Dr. K.M. Kronstein
W. Liebert
Dr. H. Mäurer
Dr. G. Michler
M. Newell
P. Plaumann
Dr. H. Salzmann
Frl. A. Schlette
R. Schmidt
U. Schoenwaelder
K. Strambach
H. Walter
J. Wiederhold
R. Wille
D. Wölk

Die Vorträge befaßten sich mit Fragen aus den im Frankfurter Seminar gepflegten Gebieten der Grundlagen der Geometrie, der abstrakten Gruppen und der Ringtheorie. Daß hierbei zahlreiche Überlappungen auftraten, zeigen die folgenden Kurzberichte, die von den Vortragenden jeweils selbst verfaßt wurden:

Bender, H.: Nichtexistenz transitiver Erweiterungen gewisser Permutationsgruppen.

Die Gruppe G besitze eine Klasse M konjugierter 2-Sylowuntergruppen, von denen je zwei trivialen Durchschnitt haben, und es sei $|M|>1$. G wird als Operatorgruppe auf M angesehen. Es wurde gezeigt: G läßt sich höchstens dann transitiv erweitern, wenn eine 2-Sylowuntergruppe S aus M eine Untergruppe A enthält, so daß $|S:A| \leq 2$ und A entweder zyklisch oder die Prüfergruppe $Z(2^{\infty})$ ist.
Liegen alle 2-Sylowuntergruppen von G in M und ist G eine Torsionsgruppe, dann enthält S entweder nur eine Involution oder $|S| = 4$. Von folgendem Satz wurde wesentlich Gebrauch gemacht: Besitzt eine 2-Gruppe einen involutorischen Automorphismus, der höchstens zwei Elemente festläßt, dann enthält sie eine entweder zyklische oder zu $Z(2^{\infty})$ isomorphe Untergruppe, deren Index höchstens gleich 2 ist.

Chen, Y.: Berührmenge und Lie-Geometrie.

Wie man die projektive Geometrie durch Inzidenz-Struktur mit Schließungssätzen charakterisiert, wird nun die Liegeometrie analog behandelt. Hier haben wir eine symmetrische und reflexive Berührrelation und eine Berührmenge (dabei verlangt man (0) Es gibt mindestens zwei nicht identische aber sich berührende Elemente; es gibt zwei nicht berührende Elemente. (1) Berühren sich zwei von drei vorgegebenen Elementen, so existiert ein Element, das alle drei berührt). Eine derartige Lie-Berührmenge wird definiert, derart, daß unter der klassisch erklärten Berührrelation ihr Modell die Menge aller geordneten Paare von Ebenenschnitten beliebiger konvexen Flächen eines n+1-dim. reellen Vektorraumes und den durch die Schnitte bestimmten Seiten ist. Wir benötigen weitere Axiome, um den Lieraum über einem euklidischen Körper zu kennzeichnen. An Stelle des Satzes von

Miquel kann man die scharfe Transitivität der Berührgruppe auf den T-Figuren setzen.

Cofman, J.: Über eine Vermutung von Hughes.

Hughes hat die folgende Vermutung gegeben: Sei π eine endliche projektive Ebene mit der Eigenschaft:
(E) π besitzt eine Fixgerade g und eine Kollineationsgruppe Δ, die auf den Punkten der Geraden g eine zweifach transitive Permutationsgruppe induziert. Dann ist π eine Translationsebene.
Die Untersuchung von projektiven Ebenen mit der Eigenschaft (E) hat die folgenden Resultate gegeben:
Satz 1: Sei π eine projektive Ebene ungerader Ordnung $n \not\equiv 1 \bmod 8$, die die Eigenschaft (E) besitzt. Dann ist n eine Primzahlpotenz.
Satz 2: Sei π eine projektive Ebene, die die Eigenschaft (E) besitzt und deren Ordnung n entweder eine Primzahl ist, oder die Form hat: $n \equiv 1 \bmod 8$ und dabei $q \,\|\, n-1$ für jeden Primteiler $q \neq 2$ der Zahl $n-1$. Dann ist π desarguessch.

Cohn, P.M.: A presentation of the GL_2 for certain rings.

A set of relations in $GL_2(R)$ (for any ring R) is written down, which for certain rings such as local rings, constitutes a complete set of defining relations. With the help of this presentation it is shown that for the integers of an imaginary quadratic extension of the rationals there are invertible matrices which cannot be written as a product of elementary matrices, unless the field is Euclidean.

Dembowski, P.: Zu einem Satz von Lüneburg.

Beweis des folgenden Satzes: Hat die endliche projektive Ebene $\mathcal{E}$ der Ordnung $q^2 = 2^{2(2m+1)}$, $m > 0$ eine zur Suzuki-Gruppe $Sz(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe Γ, so gibt es einen Punkt oder eine Gerade, die bei Γ festbleibt, und alle Involutionen von Γ sind Elationen von $\mathcal{E}$. Beim Beweis wird folgender Hilfssatz benutzt: Ein Γ-Punkt-Transitivitätsgebiet der Länge $q^2 + 1$ besteht entweder aus den Punkten einer Geraden oder aus denen eines Ovals von $\mathcal{E}$.

Fischer, B.: Frobeniusautomorphismen endlicher Gruppen.

Sei G eine endliche Gruppe, die von einer Klasse D konjugierter Elemente erzeugt wird; die Ordnung der Elemente von D sei größer als 2. Dann operiert d genau dann als Frobeniusautomorphismus auf der Kommutatorgruppe von G, wenn zwei verschiedene Elemente von D stets eine Frobeniusgruppe erzeugen.

Grosse, P.: Some remarks on the n-adic topology in abelian groups.

Es sei Z = unendlich zyklische Gr; $\overline{A}$ der topologische Abschluß von A in der n-adischen Topologie. Es ist $\overline{A} \simeq \mathrm{Hom}(A,\overline{Z}) \rightleftarrows A$ torsionsfrei, reduziert und $[A:pA]$ endlich für jede Primzahl p. Weiter gilt für diese Gruppen A:

$$\overline{A\alpha} = \mathrm{Hom}[\mathrm{Hom}(A,\overline{Z}),\overline{Z}] = \overline{A}\alpha$$

wobei α der durch $a\sigma = \sigma a^{\alpha}$, $a \in A$, $\sigma \in \mathrm{Hom}(A,\overline{Z})$ def. Isomorphismus von A in $\mathrm{Hom}[\mathrm{Hom}(A,\overline{Z}),\overline{Z}]$ ist.

Heineken, H.: Groups with commutator period.

Let $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$, $x^{(n)} \circ y = x \circ (x^{(n-1)} \circ y)$,. Groups satisfying a condition of the form $x^{(n+m)} \circ y = x^{(m)} \circ y$ are considered. In finite soluble groups the quotient group modulo the Fitting group is of exponent n (if n is even) or 2n (if n is odd), and other structure properties are obtained. For (infinite) hyperabelian groups many of the results can be taken over with usual modifications, and torsion free abelian quotients are hypercentral, if they are finitely generated.

Jain, S.K.: On a class of rings having a one-sided ideal with a polynomial constraint.

Let R be a primitive ring and I be a non-zero one-sided ideal with J-pivotal monomial. It is shown that then R has non-zero socle. A consequence of this result is that if R has at most a finite no. of orthogonal idempotents and I satisfies some PI then R also satisfies a polynomial identity. The hypothesis is necessary as is shown by an example due to S.A. Amitsur. Further it is also shown that a prime ring R satisfies a polynomial identity if and only if R is right quotient simple

and there exists some non-zero one-sided ideal with a quasi-standard identity. A few other related results concerning pivotal monomials are also discussed.
(Tis work is in collaboration with L.P. Belluce).

Kegel, O.H.: Subnormalities.

A group G is called a t-(resp. T-)group if every subnormal (resp. ascendent) subgroup of G is normal in G.
Theorem 1: A normal t-(resp. T-)subgroup of the group G normalizes every subnormal (resp. ascendent) subgroup S of G such that either $S/S\cap N$ or $N/S\cap N$ is perfect.
Theorem 2: If the free abelian normal subgroup A of G is such that no normal subgroup of G different from 1 contained in A has smaller rank than A, then for every ascendent subgroup **S** of G there is a positive integer n(S) such that $A^{n(S)}$ normalizes S.
Now let C be the class of groups such that every epimorphic image $H \neq 1$ of G contains a normal subgroup $N \neq 1$ which is either finite, or finitely generated and abelian, or a perfect T-group.
Theorem 3: For every $G \in C$, the set of ascendent subgroups of G is a lattice.

Kronstein, K.: Computation of the Schur index.

Let F be an algebraic number field, and K the completion of F at a finite prime $\mathfrak{q} | q \neq 2$. Let r be the relative degree of K and $1 \neq p^{\Lambda} \| (q^r - 1)$, where p is a prime, and $p \neq q$.
Let G be a finite group with a cyclic normal selfcentralizing subgroup C, and for which G/C is a p-group which may be identified with the Galois group of $K(\mu)/K$, where μ is a $|C|$-th root of unity. Then there are u, w in G such that $G = \langle u,w\rangle C$; u centralizes C_q, $\mathrm{ord}_C u = p^e$, $u^{p^e} = \alpha \in C_p$; $w^{-1}xw = x^{q^r}$ for x in C_q and $\mathrm{ord}_C w$ is the order of w as an automorphism of C_q.
Also $uw = \gamma wu$, where $\gamma \in C_p$. The Schur index of the faithful irreducible representations of G with respect to K is then $\mathrm{ord}(\alpha^{p^{\Lambda-e}} \gamma^t)$, where $t(q^r - 1)/p^{\Lambda} \equiv 1 \bmod \mathrm{ord}_C w$.

- [illegible] -

[illegible]

[illegible] group [illegible]

[illegible] (2) [illegible]

[illegible] group [illegible]

[illegible]

Lüneburg, H.: Einige Bemerkungen zu den 2-fachtransitiven Ree-Gruppen.

Es wurde gezeigt, daß zu jeder Ree-Gruppe G der Ordnung $(q^3+1)\, q^3(q-1)$ ein 2- $(q^3+1,\ q+1,\ 1)$ Blockplan gehört, der sich nicht in eine projektive Ebene $\mathcal{E}$ der Ordnung q^2 einbetten läßt, derart, daß G von einer Kollineationsgruppe von $\mathcal{E}$ induziert wird.

Mäurer, H.: Laguerre- und Blaschkemodell der ebenen Laguerre-Geometrie.

Sei K ein pythagoreischer Körper und ω eine Anordnung von K. Es wurde das Laguerremodell $L(K,\omega)$ definiert und gezeigt, daß es zum sogenannten Blaschkemodell isomorph ist. Insbesondere folgt hieraus $L(K,\omega) \cong L(K,\omega')$ für Anordnungen ω, ω' von K.
Um das Laguerremodell in einer abstrakt gegebenen Laguerre-Geometrie L zu rekonstruieren, wurde mittels eines involutorischen Automorphismus τ von L eine Insidenzstruktur $A_{(\tau)}$ und eine Kreisebene $M_{(\tau)}$ definiert und untersucht, wann $A_{(\tau)}$ eine affine Ebene bzw. wann $M_{(\tau)}$ eine Möbiusebene ist. Es zeigt sich, daß τ hierzu eine spezielle Laguerre-Inversion sein muß und daß der L zugrunde liegende Körper pythagoreisch ist.

Plaumann, P.: Fast-abelsche topologische Gruppen.

Mit DG wird die abgeschlossene Hülle der Kommutatorgruppe einer topologischen Gruppe G bezeichnet. Folgender Satz wurde bewiesen:
Satz: Sei G eine lokal kompakte, zusammenhängende Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) 1. DG ist kompakt.
    2. Es gibt eine zusammenhängende abelsche Untergruppe A von G, so daß der Raum G/A kompakt ist.

(b) $G/(\mathfrak{z}G)_0$ ist kompakt

(c) $G/\mathfrak{z}G$ ist kompakt

(d) $G/(\mathcal{N}_G H)_0$ ist kompakt für alle (abgeschlossenen) Untergruppen H von G

(e) $G/(\mathcal{N}_G H)_0$ ist kompakt für alle (abgeschlossenen) abelschen Untergruppen von G

(f) 1. gG ist kompakt für alle $g \in G$ [G ist FC-Gruppe]
2. $G/\mathfrak{N}_G E$ ist kompakt für alle Untergruppen E von $\mathfrak{Z}_2 G$, die zu R isomorph sind.

Salzmann, H.: Polaritäten von Moulton-Ebenen.

Sind u und v zwei verschiedene Punkte der ausgezeichneten Geraden W einer Moulton-Ebene $\mathbb{P}$, ist o der ausgezeichnete Punkt von $\mathbb{P}$, und ist $p \in ov$, $o \neq p \neq v$, und L eine Gerade durch v mit $p \notin L \neq W$, so existiert genau eine Polarität π von $\mathbb{P}$ mit den absoluten Punkten u,v und $o^{\pi} = W$, $p^{\pi} = L$. Alle Polaritäten sind untereinander konjugiert und werden von äußeren Automorphismen der kleinen projektiven Gruppe induziert.

Simon, H.: Über einen Satz von Malcev und Baer.

Def.: Die Gruppe G heißt "fast-noethersch", falls jede abelsche Untergruppe von G endlich erzeugt ist.
Satz von Malcev-Baer: Fast-noethersche, auflösbare Gruppen G sind noethersch.
Def.: G heißt "fast-auflösbar", falls jedes hom. Bild $H \neq 1$ von G einen Normalteiler $1 \neq N \trianglelefteq H$ mit endlichem N' enthält.
Satz 1: Fast-noethersche, fast-auflösbare Gruppen G sind noethersch.
Satz 2: Fast-auflösbare Automorphismengruppen fast-auflösbarer, fast-noetherscher Gruppen sind noethersch.

Wille, R.: Topologische geometrische Verbände.

Ein Verband heißt geometrisch, wenn er atomistisch und nach oben stetig ist. Die Stetigkeit werde folgendermaßen verallgemeinert: Ein vollständiger Verband heißt statisch, wenn mit $\{x_\alpha\}$ und $\{y_\beta\}$ auch $\{x_\alpha \vee y_\beta\}$ ein stetiger Turm ist (ein Turm $\{x_\alpha\}$ ist stetig, wenn $a \wedge \bigvee x_\alpha = \bigvee (a \wedge x_\alpha)$ für alle $a \in V$). Es gilt der

Satz: Folgende Strukturen kann man miteinander identifizieren:
(1) die atomistischen statischen Verbände mit den klassisch topologischen geometrischen Verbänden
(2) die atomistischen statischen halbmodularen Verbände mit den klassisch topologischen matroiden Verbänden

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(3) die atomistischen vollständigen modularen Verbände mit den klassisch topologischen projektiven Verbänden

(4) die atomistischen vollständigen distributiven Verbände mit den T_1-topologischen Räumen.

Zassenhaus, H.J.: <u>On the Cartan subgroups of a finite group.</u>

(Report on joint work of Surinder Sehgal and H.Z.) Guided by the analogy to the Cartan subgroups of continuous groups and experimentation we define the <u>Cartan</u> subgroups of a finite group $\mathfrak{G}$ as subgroups $\mathfrak{L}$ with the following 4 properties 1) $\mathfrak{L}$ is nilpotent, 2) there exists a solvable subgroup $\mathscr{L}$ of $\mathfrak{G}$ containing $\mathfrak{L}$ such that $\langle L^{N(\mathfrak{L})}\rangle \Lambda' \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ (where $\Lambda' \mathfrak{G}$ is the intersection of the maximal normal subgroups of $\mathfrak{G}$), 3) is maximal satisfying 1),2),;4) for every normal subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$ the subgroup $\mathfrak{L}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ satisfies 1)-3). The existence of a characteristic series of conjugate Cartan subgroups of a given finite group $\mathfrak{G}$ is proven under the hypothesis that it is established already for those subfactorgroups $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{G}$ for which there is a normal subgroup $\mathfrak{D}/\mathfrak{B}$ with nilpotent factor group such that $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ are normal in $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{D}/\mathfrak{B}$ is the direct product of groups that are isomorphic to a fixed non-abelian simple group $\mathfrak{Z}$. Mr. Sehgal presently is verifying the hypothesis for the known finite simple non-abelian groups $\mathfrak{Z}$. If G is solvable, then Cartan subgroups and Carter subgroups are identical, otherwise never.

[illegible]

[illegible]

[illegible] (e.g. [illegible]

[illegible] group of finite [illegible]

[illegible] normal automor[illegible]

[illegible]

[illegible] groups and [illegible] groups are [illegible]