Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

13

T a g u n g s b e r i c h t

Numerische Probleme in der Approximationstheorie
vom 22. - 25.6.1965

Leitung: Prof. Dr.Dr.h.c. L. Collatz (Hamburg)
und Prof. Dr. G. Meinardus (Clausthal-Zellerfeld)

Auf der letztjährigen Tagung (Juni 1964) über "Funktionalanalytische Methoden in der numerischen Mathematik", die ein breites Spektrum von Fragen behandelte, wurde der Plan gefaßt, in diesem Jahr auch eine Tagung über einen speziellen Problemkreis, nämlich den der Approximationstheorie, zu veranstalten.

In neuerer Zeit hat sich herausgestellt, daß die Approximationstheorie für eine große Reihe von Fragen der angewandten Mathematik zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden ist, so z.B. für die angenäherte Berechnung von Funktionen durch elektronische Rechenanlagen oder die näherungsweise Lösung von Operatorgleichungen. Dabei ist die Approximationstheorie eine selbständige Disziplin, die teilweise schon zu recht abgerundeten Ergebnissen geführt hat. Sie umfaßt Approximationsaufgaben von sehr verschiedenartigem Typus, von denen sich insbesondere die sogenannte Tschebyscheff-Approximation in letzter Zeit als bedeutsam erwiesen hat. Diese nahm daher auf der Tagung einen breiten Raum ein, obwohl auch andere Fragestellungen, wie z.B. die der Annäherung im Gauß'schen Sinne und mit L -Normen sowie allgemeine Banach- und Hilbert-Raum-Approximationen zur Sprache kamen.

Trotz der bisher erzielten Resultate ist noch ein großes Feld von Fragen offen. Es zeigte sich auf der Tagung insbesondere, daß durch Fragestellungen, die sich unmittelbar aus der numerischen Praxis ergeben, tiefliegende theoretische Probleme erwachsen können, von deren endgültiger Klärung man heute noch weit entfernt ist. Umgekehrt zeigt sich aber

auch, daß durch intensive theoretische Forschung Einsichten gewonnen werden, die wertvolle Rückschlüsse auf die Praxis zulassen. Auch diese Situation spiegelte sich in den Vorträgen wider.

Durch rege Diskussionen (ein Teil der Diskussionsbemerkungen ist jeweils im Anschluß an die Zusammenfassung der Vorträge wiedergegeben) wurde der dargebotene Stoff in mancherlei Hinsicht vertieft und ergänzt, so daß dadurch ein anregender wissenschaftlicher Kontakt entstand. Dank der herzlichen persönlichen Atmosphäre werden die Teilnehmer diese Tagung sicher in angenehmer Erinnerung behalten. Nicht zuletzt ist das der Betreuung durch die Leitung des Hauses zu verdanken, der hiermit noch ein besonders herzlicher Dank ausgesprochen werden soll.

T e i l n e h m e r

Ade, H.	Clausthal
Albrecht, Dr. J.	Hamburg
Ansorge, Dr. R.	Clausthal
Biermann, H.	Münster
Bredendiek, Frl. Dipl.-Math.	Hamburg
Bohl, Dr. E.	Hamburg
Descloux, Prof. Dr. J.	Lausanne
Collatz, Prof. Dr. L.	Hamburg
Ehrmann, Prof. Dr. H.	Clausthal
Elsner, L.	Hamburg
Geiger, C.	Clausthal
Gröbner, Prof. Dr. W.	Innsbruck
Hämmerlin, Dr. G.	Freiburg
Henze, D.	Bonn
Hilgers, H.	Bonn
Koch, Frau Linde	Lund / Schweden
Krabs, Dr. W.	Hamburg
Meinardus, Prof. Dr. G.	Clausthal
Merz, G.	Clausthal
Nitsche, Prof. Dr. J.	Hamburg
Ostrowski, Prof. Dr. A.	Certenago / Schweiz
Rajeswari, Frl. Dr.	Hamburg
Riesenkönig, Dr. W.	Valparaiso / Chile
Schäfke, Prof. Dr. F.W.	Köln
Schläpfer-Bieri, Dr. F.E.	Zürich
Schröder, Prof. Dr. J.	Köln
Schwedt, D.	Köln
Sippel, W.	Clausthal
Spieß, J.	Hamburg
Stoer, Dr. J.	München
Todd, Prof. Dr. J.	z.Zt. Wien
Taussky-Todd, Frau Prof. Dr.	z.Zt. Wien
Töpfer, Dr. H.J.	Berlin
Törnig, Dr. W.	Clausthal
Werner, Prof. Dr. H.	Münster
Wetterling, Dr. W.	Hamburg
Ziegler, Dipl.-Math. M.	Clausthal
Zassenhaus, Prof. Dr. H.	Columbus / USA

Vortragsauszüge

Prof. Dr. J. Todd, z.Zt. Wien: Optimal IAD Parameters.

The problem of determining the optimal IAD parameters for the "model problem" [Dirichlet problem for a square] reduces to finding

$$\min_{(r)} \max_{k' \leq x \leq 1} \left| \prod_{j=1}^{m} \frac{x-r_j}{x+r_j} \right|$$

where the integer m and the positive number k' are given. This was solved in the case when m is a power of 2 by Wachspress and by Gastinel. The first solution in the general case was given by W.B. Jordan. This lecture indicates a more motivated derivation of Jordans' formulas, based on methods due to Zolotareff. A differential equation for the extremal rational function

$$\prod_{j=1}^{m} |(x-r_j)/(x+r_j)|$$

is obtained and this is solved in terms of elliptic functions and the Jordan result is recovered by an application of the transformation $\tau \longrightarrow 4\tau$.

Diskussionsbemerkung: Herr Albrecht wirft die Frage nach einer Übertragung der Ergebnisse auf andere Differenzensterne und auf Rechteck-Bereiche auf. Er fragt, ob man mit ähnlichen Methoden den optimalen Parameter der Over-Relaxation bestimmen kann.

Prof.Dr. W. Gröbner, Innsbruck: Orthogonale Polynomsysteme, die gleichzeitig mit f(x) auch deren Ableitung f'(x) approximieren.

Es handelt sich darum, ein System von Polynomen $\{p_n(x)\}$ (n=0,1,2,...) zu konstruieren, welches die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^1 [p_n(x)p_m(x)+p_n'(x)\,p_m'(x)]dx=\delta_{nm}$$

erfüllt. Das Polynom $p_n(x)$ des Grades n ist dann die Lösung

des Minimalproblems

$$\int_0^1 [y^2+y'^2]dx=\min \qquad \text{mit der Nebenbedingung } y^{(n)}=c\neq 0,$$

(c Normierungskonstante). Nimmt man die Nebenbedingung mit einem Lagrangefaktor $2\lambda=2\lambda(x)$ in das Integral hinein, so folgt das Variationsproblem:

$$\Omega = \int_0^1 [y^2+y'^2+2\ (y^{(n)}-c)]dx=\text{stat.}$$

Variation und partielle Integration ergeben

$$\tfrac{1}{2}\delta\Omega = \int_0^1 [y-y''+(-1)^n\lambda^{(n)}]\,\delta y\,dx+[\lambda\,\delta y^{(n-1)}-\lambda'\delta y^{(n-2)}+-\dots$$

$$\dots+(-1)^{n-2}\lambda^{(n-2)}\delta y'+\left((-1)^{n-1}\lambda^{(n-1)}+y'\right)\delta y\,]_0^1 = 0$$

Aus der Eulerschen Differentialgleichung $y''-y=(-1)^n\lambda^{(n)}$ folgt, daß λ ein Polynom des Grades 2n ist, das die Randbedingungen

$$\lambda=\lambda'=\dots=\lambda^{(n-2)}=0,\ \lambda^{(n-1)}+\ {}^{(n+1)}+\lambda^{(n+3)}+\dots=0 \text{ für } x=0,1$$

erfüllen muß, also ist $\lambda=(x^2-x)^{n-1}(x^2+ax+b)$. Für die Koeffizienten a, b findet man

$$a=-1,\quad b=-\alpha_n=-\frac{\sum_2(n)}{\sum_1(n)}$$

mit $\sum_1(n)=\binom{n-1}{0}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n+1)!+\binom{n-1}{4}(n+3)!+\dots$

$$\sum_2(n)=\binom{n}{1}(n+1)!+\binom{n}{3}(n+3)!+\binom{n}{5}(n+5)!+\dots$$

Mit sehr großer Annäherung ist $\alpha_n=2n(2n-1)$. Das Polynomsystem wird durch die verallgemeinerte Rodriguesformel

$$p_n(x)=\gamma_n\,\frac{D^n}{1-D^2}\,[(x^2-x)^n-\alpha_n(x^2-x)^{n-1}],\qquad (n=1,2,\dots;p_o(x)=1)$$

und dem Normierungsfaktor $\gamma_n=\frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n(2n+1)}{n+2(2n+1)\ {}_n}}$

dargestellt. Einer gegebenen Funktion f(x) entspricht die

Entwicklung $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \int_0^1 [f(x)p_n(x) + f'(x)p_n'(x)]dx = f(x)p_n'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)[p_n(x) - p_n''(x)]dx$$

Verschiedene Verallgemeinerungen sind möglich.

Diskussionsbemerkung: In der Diskussion taucht die Frage auf, ob sich die von Gröbner angegebenen Orthogonalpolynome wie im klassischen Fall aus einer partiellen Differentialgleichung gewinnen lassen und ob es möglich ist, Rekursionsformeln herzuleiten (Meinardus, Spieß). Die verallgemeinerte Rodrigues-Formel legt die Vermutung nahe, daß die Gröbner'schen Polynome durch Entwicklung nach Legendre-Polynomen gewonnen werden können (Ostrowski, Schäfke).

Der Problemkreis läßt sich einordnen in die Frage nach der Struktur orthogonaler Polynomsysteme bezüglich eines verallgemeinerten

Skalarproduktes von der Form: $(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \int_a^b \mathfrak{z}^* \mathfrak{A}(x) \mathfrak{y}\, dx$,

$\mathfrak{y}^* = (y^{(a)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$, $\mathfrak{y}$ analog (Schäfke).

Es wäre wünschenswert, die analoge Fragestellung im Fall der Tschebyscheff-Approximation zu untersuchen (Collatz).

Prof.Dr.A. Ostrowski, Certenago/Schweiz: Über die Methode des steilsten Abstiegs.

Im Innern Ω der Niveaufläche $f(\xi) = c$ einer dort 2mal stetig differenzierbaren Funktion F des n-Dimensionalen Punktes ξ wird eine Punktfolge ξ(=1,2,...) definiert vermöge der Vorschrift $\xi_{\nu+1} = \xi_\nu - r\varphi_\nu$, wo φ ein Einheitsvektor ist, der der Bedingung $(\psi, \varphi_\nu) \geq \delta > 0$ genügt und $r_\nu = (1+\varepsilon_\nu)\frac{\delta}{\Lambda}\varkappa_\nu$ ist.

Dabei ergeben sich $\varkappa_\nu$ und φ_ν aus der Zerlegung grad $F(\xi_\nu) = \varkappa_\nu \varphi_\nu$, wo $\varkappa$ der Gradientenbetrag ist, während die ε_ν der Relation $|\varepsilon_\nu| \leq \varepsilon$ genügen, für ein festes ε mit $0 < \varepsilon < 1$. Λ ist eine obere Schranke für den maximalen

Eigenwert der symmetrischen Matrix $(F''_{x_\mu x_\nu})$ für alle ξ in Ω.

Es läßt sich zeigen, daß $F(\xi_\nu)$ gegen einen stationären Wert von $F(\xi)$ und $\xi_{\nu+1}-\xi_\nu$ gegen 0 konvergieren, während die Folge der ξ_ν selbst, wenn sie nicht konvergiert, nur ein zusammenhängendes Kontinuum von Häufungsstellen haben kann, in denen der gradF verschwindet. Konvergieren die ξ_ν gegen einen Punkt, in dem F ein reguläres Extremum hat, so ist die Konvergenz wenigstens "schwach linear", und an der Diskussion der Ellipse läßt sich zeigen, daß dies sich nicht allgemein verschärfen läßt. Im Falle (n=2), daß $F(\xi)=|f(x+iy)|^2$ ist, konvergiert die Folge ξ_ν immer, wenn $f(x+iy)$ in Ω regulär ist, und man erhält so ein stets konvergentes Verfahren zur numerischen Lösung algebraischer Gleichungen, wenn auch verschiedene Vorsichtsmaßnahmen nötig sind, um die Verwechslung zwischen den Nullstellen von $f(z)$ und $f'(z)$ zu vermeiden. Im Falle des analytischen $F(\xi)$ lassen sich die Aussagen über die Konvergenz von ξ_ν verschärfen.

Diskussionsbemerkung: In der Diskussion wurde die Reichweite der dargestellten Ergebnisse noch einmal deutlich herausgestellt.

Dr.F.E.Schläpfer-Bieri, Zürich: Die Phasenfunktion einer Tschebyscheff'schen Polynomapproximation.

Eine im Intervall $-1\leq x\leq +1$ gegebene analytische Funktion $f(x)$ sei durch ein n-gradiges Polynom $P_n(x)$ optimal im Tschebyscheff'schen Sinne approximiert. Nach der Einführung der Winkelvariablen $\varphi=\arccos x$, die im Intervall $0\leq\varphi\leq\pi$ variiert, definiert man eine Phasenfunktion $\varepsilon_n(\varphi)$ mit $\varepsilon_n(0)=\varepsilon_n(\pi)=0$ und eine Amplitude λ_n dergestalt, daß

$$f(\cos\varphi) = P_n(\cos\varphi) + \lambda_n \cos\left[(n+1)\varphi+\varepsilon_n(\varphi)\right]$$

erfüllt ist.

Nicht immer gibt es eine stetige Funktion $\varepsilon_n(\varphi)$, die die geforderten Eigenschaften besitzt. Falls aber die Fehlerfunktion $f(x)-P_n(x)$ sogenannte Normalform hat, kann man die Existenz der Phasenfunktion als analytische Funktion in einem die reelle φ-Achse enthaltenden Gebiet nachweisen.

Für gewisse f(x), z.B. für ganze Funktionen mit Ordnung ≤ 1 und für rationale Funktionen mit einfachem reellen dominanten Pol. gibt es für $n \longrightarrow \infty$ eine Grenzphase $\varepsilon(\varphi)$, gegen die $\varepsilon_n(\varphi)$ auf gewissen Folgen n_k gleichmäßig konvergiert.
Es ist gelungen, Algorithmen zu entwickeln, mit Hilfe derer man die Phasenfunktion bei gegebenem f(x) und n direkt berechnen kann. Auf diese Weise hat man vollkommen neuartige Methoden zur Lösung des Tschebyscheff'schen Approximationsproblems gewonnen.

Diskussionsbemerkung: Wünschenswert wären nachprüfbare Bedingungen für die Konvergenz des Verfahrens bei hinreichend kleinen Phasen. Vielleicht läßt sich die Konvergenzaussage unter allgemeinere Sätze subsummieren. Ein Vergleich mit anderen Verfahren wäre sehr interessant. (Collatz)
Vielfach besitzen analytische Funktionen mit gleichem Verhalten auf der (gemeinsamen) Regularitätsellipse asymptotisch die gleiche Phasenfunktion (Meinardus).

Prof.Dr.G. Meinardus, Clausthal: Asymptotische Aussagen bei rationalen Approximationen.

Es soll eine hinreichend oft differenzierbare Funktion durch rationale Funktionen von gegebenen Zähler- und Nennerhöchstgraden auf einem kompakten reellen Intervall im Tschebyscheff'schen Sinne approximiert werden. Dabei tritt die Frage auf, ob man a priori-Aussagen über die Größe

$$E_{m,n}(f) = \inf_{P_m, Q_n} \left\| f - \frac{P_m}{Q_n} \right\|$$

gewinnen kann. Bei festem Nenner $Q_n(x)$ folgen Aussagen über

$$E_m(f, Q_n) = \inf_{P_m} \left\| f - \frac{P_m}{Q_n} \right\|$$

auf Grund eines Monotonieprinzipes. Unter Heranziehung eines Ergebnisses von S.N. Bernstein und N.I. Achieser läßt sich eine obere Abschätzung für $E_m(f, Q_n)$ herleiten, falls $m \geq n$ ist. Weiter ergeben sich Bedingungen, denen die Funktion $Q_n(x)$ bei der besten rationalen Approximation genügen muß.

Dies gibt Anlaß zur Bildung von Ausgangsnäherungen für die numerische Konstruktion rationaler Approximationen. Es scheint, daß $Q_n(x)$ für hinreichend große Werte von $n+m$, $m \geq n$, im Falle analytischer Funktionen eng mit der Verteilung der Singularitäten, d.h. also meist auch eng mit den Nennern der klassischen Padé-Tafel in Verbindung steht.

<u>Diskussionsbemerkung:</u> Es liegt die Vermutung nahe, daß sich die Struktur der angegebenen linearen Unterräume in den zugehörigen Differentialgleichungen widerspiegelt (Ostrowski).

Prof.Dr.H.J. Zassenhaus, Columbus/USA: <u>Ein Algorithmus zur Auffindung einer Minimalbasis.</u>

Um die Basis einer die Ordnung $\mathfrak{o}=[\omega_1,\ldots,\omega_n]$ mit Diskriminante $d(\mathfrak{o})\neq 0$ ($d(\mathfrak{o})=\det(S(\omega_i\omega_k))$, wo S die Spur der regulären Darstellung ist) enthaltenden Maximalordnung vom Range n über $\mathbb{Z}$ zu berechnen, werden für die in den $d(\mathfrak{o})$ quadratisch aufgehenden Primteiler p der Reihe nach jeweils die (sukzessiv) reduzierten Spurradikale $\mathfrak{p}/p$ von $\mathfrak{o}/p$ durch Lösung gewisser explizit angebbarer Systeme linearer homogener Kongruenzen modulo p berechnet. Wenn $\mathfrak{p}_p$ bezüglich $\mathfrak{o}$ nicht invertierbar ist, dann besteht eine echte Einbettung von $\mathfrak{o}$ in die Rechtsordnung einer geeigneten Potenz von $\mathfrak{p}_p$, und nach endlich vielen Einbettungen wird eine Maximalordnung erhalten.

Prof.Dr.H.J. Zassenhaus, Columbus/USA: <u>Experimentelle Zahlentheorie im Unterricht.</u>

Es wird über einen im Herbstquartal des akademischen Jahres 1964/65 erstmalig vom Vortragenden an der Ohio State University, Columbus, Ohio, gegebenen Kurses über experimentelle Zahlentheorie berichtet. Die Hörer waren 6 Angestellte des lokalen Rechenzentrums und zugleich im begrifflichen Denken der modernen Mathematik noch nicht geschulte Studenten. Sie wurden dazu angeleitet, durch intelligente Auswertung von Zahlenrechnungen, die von einem IBM 7094 frisch ins Klassenzimmer geliefert wurden, sich die scharfen

Begriffsbildungen der modernen Theorien, die für erfolgreiche Experimente in der elementaren Zahlentheorie die Voraussetzung bilden, zu erarbeiten. In jeweils einer von 3 Wochenstunden wurden Experimente über: lineare diophantische Gleichungen, Primzahlhäufigkeiten in arithmetischen und Polynomprogressionen, Gauß'sche Methode zur Auffindung primitiver Kongruenzwurzeln gegebener Primzahlen, Cunningham-Artin'sche Häufigkeiten (und Verallgemeinerungen), quadratische Kongruenzlösungen, Auffindung irreduzibler Polynome über endlichen Körpern und Kettenbruchentwicklungen gemacht.

Diskussionsbemerkung: Die von Herrn Zassenhaus praktizierte Methode sollte auch in Deutschland auf breiterer Basis durchgeführt werden (Collatz).
Ein gewisser Einwand gegen die Methode ist die Kluft zwischen der Schwierigkeit der Probleme und den dargebotenen Beweismitteln (Ostrowski).

Prof.Dr.H. Werner, Münster: Rationale Interpolation und Tschebyscheff-Approximationen.

Es sollen die Konvergenzverhältnisse des Remes-Algorithmus für rationale Funktionen im Großen untersucht werden. Zunächst wird man fordern, daß die zu approximierende Funktion f(x) im Intervall I normal ist zu gegebenen Zähler- und Nennergraden (l,r). Normalität sichert gleichzeitig die stetige Abhängigkeit der T-Approximierenden von f(x), so daß kein großer Einfluß durch ungenaue numerische Darstellung von f(x) zu befürchten ist.
Zur unbeschränkten Ausführung der Iteration muß man (l,r)-Hypernormalität von f(x) verlangen. Diese besagt, daß für jede beliebige Folge von n+2(n=l+r) paarweise verschiedenen Punkten des Approximationsintervalles I eine nicht ausgeartete, diskrete, zwischen den Punkten stetige T-Approximation existiert.
Unter zusätzlichen Bedingungen kann man zeigen, daß für (l,r)-hypernormale Funktionen der Remes-Algorithmus eine Folge rationaler Funktionen liefert, der gleichmäßig gegen die T-Approximation konvergiert.
Für den Fall linearer Nenner ist die Klassifikation der hypernormalen Funktion vollständig durchgeführt worden.

Im allgemeinen Falle ($r > 1$) gelingt es, die Hypernormalität auf stetige rationale Interpolierbarkeit und die Voraussetzung, daß nur Pole ungerader Ordnung in I auftreten können, zurückzuführen.
Für den Fall $r=1$ erfüllen die monotonen Matrixfunktionen nach Löwner die genannten Voraussetzungen.

Diskussionsbemerkung: Herr Stoer wirft die Frage nach der Abhängigkeit der Hypernormalität vom Intervall auf. Interessant wäre eine Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Hypernormalität und Analytizitätseigenschaften der zu approximierenden Funktion im Großen (Meinardus).

Dr. W. Krabs, Hamburg: Dualität bei rationaler Approximation.

Dem Approximationsproblem wird ein duales Problem gegenübergestellt, von dem sich zeigen läßt, daß es stets lösbar ist. Dabei braucht das Approximations-Problem selber nicht lösbar zu sein. Ist das der Fall, so läßt sich das duale Problem verschärfen, und man kann ebenfalls die Lösbarkeit des verschärften Problems beweisen. Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß dann über eine Lösung des dualen Problems eine solche für das Ausgangsproblem gewonnen werden kann.
Schließlich wird ein Verfahren zur Lösung des (nicht verschärften) dualen Problems angegeben, das im Falle der Lösbarkeit des Approximations-Problems auch dieses zu lösen gestattet.

Diskussionsbemerkung: Herr Stoer deutet die Möglichkeit an, das duale Problem auf ein formal lineares umzuschreiben. Ist das angegebene Verfahren in endlich vielen Schritten durchführbar? (Nitsche)
Von großer praktischer Bedeutung wären untere Schranken für die Minimalabweichung im kontinuierlichen Fall (Collatz).

Dr. J. Stoer, München: Lineare Approximationsoperatoren.

Es wurde folgendes Resultat bewiesen: E sei ein Banachraum mit der Norm $p(x)$. Dann gibt es zu einem linearen Teilraum $L \subseteq E$ genau dann einen linearen Approximationsoperator T_L mit

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\min_{x \in L} p(x-b) = p(T_L b-b) \text{ für alle } b \in E,$$

wenn es einen linearen Teilraum M von E gibt mit

1) $L \oplus M = E$

2) $T_L(x_L+x_M)=x_L$ für alle $x_L \in L$, $x_M \in M$

3) $p(x_L+x_M)=p(x_M)$.

Dies benutzt man , um zu zeigen, daß die Norm p durch ein inneres Produkt erzeugt wird, wenn zu jedem 2-dimensionalen Teilraum L von E ein linearer Approximationsoperator T_L existiert, p strikt konvex und dim $E \geq 3$ ist.

Diskussionsbemerkung: Möglicherweise kann man auf die Voraussetzung der strikten Konvexität grundsätzlich nicht verzichten (Krabs).

Dr. H.J. Töpfer, Berlin: Tschebyscheff-Approximation und Austauschverfahren bei nichterfüllter HAARscher Bedingung.

Der Vortrag behandelt die Tschebyscheff'sche Approximationsaufgabe im Raume der auf einer kompakten Menge stetigen Funktionen, ohne die HAAR'sche Bedingung als erfüllt vorauszusetzen.
Ausgehend von dem durch E. Stiefel eingeführten Begriff der Referenz werden verallgemeinerte Referenzen definiert. Jede solche Referenz induziert eine Zerlegung des zur Approximation verwendeten Teilraumes in einen solchen Unterraum, für den bezüglich der Referenz die Haar'sche Bedingung erfüllt ist, und dessen Komplement.
Auf dieser Zerlegung beruht die entsprechende Verallgemeinerung des Austauschsatzes, die notwendig zu einer r e k u r s i v e n Definition des beschriebenen Austauschverfahrens führt.
Darüber hinaus gewährt der eingenommene Standpunkt Einblicke in das Eindeutigkeitsproblem.

Diskussionsbemerkung: Man kann ein analoges Verfahren auch mit Referenzen einer festen Länge durchführen und die Länge der Extremalreferenz an dem Konvergenzverhalten der zugehörigen Referenzpunkte ablesen (Krabs).

Prof.Dr.J. Descloux, Lausanne: Tentative de définition d'une approximation stricte.

Soient D l'ensemble des fonctions continues définies sur un domaine B et soient

$$\| f \| = \max_{x \in B} |f(x)|, \quad \| f \|_p = \Big(\int_B |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}};$$

on considère $g_1, g_2, \ldots, g_n, F \in D, E = \Big\{ \sum_i \alpha_i g_i \Big\}$; on définit

$$f \leq g \quad f, g \in E \text{ si } \exists\, P \text{ avec } \| F-f \|_p \leq \| F-g \|_p, \quad p > P.$$

Construction: $H_1 = E$; pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$D_k = \{ f \in E : \forall\, g \in H_k, \forall \varepsilon, \exists\, h \in S_{f,\varepsilon} \cap H_k, h \leq g \}$$

$$H_{k+1} = \{ \text{hyperplan de } E \text{ de dimension minimum} \supset D_k \}$$

où $S_{f,\varepsilon} = \{ g \in E : \| f-g \| < \varepsilon \}$

Théorème: Hypothèse: $\forall f, g \in E$, $f \leq g$ ou $g \leq f$

Thèse: 1) $\exists M$ avec $D_M = \{ f_s \}$; f_s est appellé approximation stricte.

2) f_s est une approximation de Tschebyscheff.

Diskussionsbemerkung: Das angegebene Beispiel vermittelt den Eindruck, als ob die strikte Approximation unter den besten Tschebyscheff-Approximationen in einem weiteren Sinne eine gute Annäherung darstellt (Werner).

Dr. W. Wetterling, Hamburg: Abschnittsweise rationale Tschebyscheff-Approximation und Newton-Iteration.

Bei der abschnittsweisen Tschebyscheff-Approximation wird das Grundintervall in Teilintervalle zerlegt; in jedem dieser Teilintervalle wird die Approximationsaufgabe gelöst, und überdies werden die Trennpunkte so gewählt, daß das Maximum über die Approximationsfehler in den einzelnen Teilintervallen möglichst klein wird. Unter einigen wenig einschränkenden Voraussetzungen sind durch diese Forderung die Trennstellen eindeutig bestimmt und die Approximationsfehler in allen Teilintervallen gleich.

Sind außerdem Alternantenbedingungen erfüllt, so ist die Lösung der Approximationsaufgabe durch ein nichtlineares Gleichungssystem bestimmt. Es wird vorgeschlagen, dieses nach Newton iterativ zu lösen. Das hierbei auftretende lineare Gleichungssystem mit einer Matrix von im allgemeinen schlechter Kondition kann statt durch ein Eliminationsverfahren durch mehrmalige Anwendung eines Interpolationsalgorithmus gelöst werden.

Diskussionsbemerkung: Unter Verwendung von Ergebnissen von Nitsche für kleine Intervalle läßt sich bei der Polynomapproximation zeigen, daß asymptotisch die besten Teilpunkte äquidistant liegen (Meinardus).
Es wäre wünschenswert, zu untersuchen, wann die beste Segmentapproximation mit rat. Funktionen stetig ausfällt (Collatz).

Dr. B. Brosowski, München: Über die Eindeutigkeit der konvexen Tschebyscheff-Approximationen.

Es werden Approximationen im Sinne von Tschebyscheff an stetige Funktionen durch asymptotisch konvexe Funktionenfamilien untersucht, die differenzierbar von endlich vielen reellen Parametern abhängen. Für diese Approximationen wird ein Satz hergeleitet, der als Spezialfälle die Sätze von A. HAAR und G.S. RUBINSTEIN aus der Theorie der linearen Approximationen und die vom Verfasser bewiesene Verallgemeinerung dieser Sätze auf rationale Approximationen (Numerische Mathematik, Vol. 7) enthält.

Der Vortrag wurde nicht gehalten. Der Verfasser war so freundlich, sein Manuskript zur Verfügung zu stellen.

W. Krabs (Hamburg)