Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach



# Tagungsbericht
## Arbeitstagung Professor Baer
## 3. bis 7. Januar 1967

Die meisten Diskussionsbeiträge bei der diesjährigen Januartagung beschäftigten sich mit den in diesem Kreise gepflegten Problemen aus der Geometrie, Gruppentheorie und Ringtheorie; davon hatten viele nicht die Form eines Vortrags, sondern wurden in kleineren Gruppen untersucht. Viele Anregungen kamen dabei von den auswärtigen Gästen, die wir erfreulicherweise begrüßen konnten und die zum Teil in Frankfurt erzielte Resultate bei ihren Untersuchungen benutzten, wie etwa J. Cofman die Resultate von H. Bender.

An auswärtigen Gästen waren anwesend:

C. und R. Ayoub, Pennsylvania State University, z.Zt. Frankfurt/M.
J. Cofman, London
T.O. Hawkes, Cambridge, England
M.L. Newell, London
T.G. Ostrom, Pullman, USA, z.Zt. Frankfurt/M.
Ch. Hering, Mainz
O.H. Kegel, z.Zt. Tübingen
H. Lüneburg, Mainz.

Aus Frankfurt waren gekommen:

B. Amberg,
R. Baer,
H. Bender,
D. Betten,
H.J. Birkenstock,
H.H. Brungs,
K. Faltings,
U. Felgner,
B. Fischer,
R. Göbel,
P. Gräbe,
H.J. Groh,
K.D. Günther,
J. Hausen,
H. Heineken,
G. Krause,
J. Maetzke,
U. Müller,
P. Plaumann,
C. Polley,
C. Ringel,
H. Salzmann,
A. Schleiermacher,
A. Schlette,
R. Schmidt,
U. Schoenwaelder.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge:

AMBERG, B.: Verallgemeinerte Minimaxgruppen

DEFINITION: Die Gruppe $G$ heißt verallgemeinerte Minimaxgruppe (kurz: m-Gruppe), wenn sie einen noetherschen Normalteiler $N$ besitzt mit artinscher Faktorgruppe $G/N$. $G$ heißt Poly-m-Gruppe, wenn es eine endliche, von 1 bis $G$ reichende Normalteilerfolge mit m-Faktoren gibt.

SATZ: Die folgenden Eigenschaften der Gruppe $G$ sind äquivalent:

(1) $G$ ist eine Poly-m-Gruppe.

(2) a. Abelsche Untergruppen von $G$ sind m-Gruppen.

b. Ist das epimorphe Bild $H$ von $G$ keine Poly-m-Gruppe, so gibt es einen Normalteiler $N \neq 1$ von $H$ mit: $H/C_H(N')$ ist eine Poly-m-Gruppe.

Anmerkung: Der Satz ist auch richtig, wenn man für $m$ eine der folgenden gruppentheoretischen Eigenschaften nimmt:

m = noethersch, artinsch, endlich, fast-polyzyklisch, artinsch und fast-abelsch.

AYOUB, Ch.: On a conjecture of Professor Baer

Let $J$ be a ring with 1 contained in the algebraic number field $K$, and let $0$ consist of the algebraic integers of $J$. The units of $J$, $J_K = Z \otimes F$, where $Z$ is finite, cyclic and $F$ is free abelian. $J/0$ is a torsion group and each non-zero p-component is infinite.

Professor Baer has proved that if $J/0$ has only a finite number of non-zero p-components, $J_*$ is finitely generated; and conjectured that the converse statement A is true. A proof of this was given.

An abelian group is minimax if it has a subgroup $B$ such that $B$ is noetherian and $A/B$ is artinian. We have:

THEOREM: Let $J$ be a ring with 1 contained in an algebraic number field, and let $0$ be the algebraic integers of $J$. Then the following are equivalent:

(1) $J/0$ has only a finite number of non-zero p-components

(2) The units of $J$ are finitely generated

(3) $J$ is a minimax group.

AYOUB, R.: Some remarks on class numbers

Let $K$ be an algebraic extension of $Q$ (the rationals) and $h$ its class number.

In case $K$ is an imaginary quadratic field of discriminant $-d$ Gauss conjectured and Heilbronn and Siegel proved that $h(-d) \to \infty$. Heilbronn and Linford proved that there exist at most 10 imaginary quadratic fields with $h = 1$. We show that if $d$ $-189$ and $h(-d) = 1$ then $L(\frac{1}{2}, \chi_d) \leqslant 0$. In connection with Hecke's conjecture that $L(s, \chi) \neq 0$ for $0 < s < 1$, we show that $\sum_{0 < -d \leq N} L(s, \chi_d) = c(s)N + o(N)$ uniformly in $s$ with $c(s) > 0$ and with $\frac{1}{2} < s < 1$.

Let $h(n)$ be the minimum class number of fields of degree $n$. If the class field tower conjecture were true then $\varliminf_{n \to \infty} h(n) = 1$. We quote Schafarevitch and Golod's result in particular that the field $Q(\sqrt{-3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19})$ cannot be imbedded in a field of class number 1. We nevertheless still make the conjecture that $\varliminf_{n \to \infty} h(n) = 1$.

BENDER, H.: Ein Spezialfall eines Satzes von P. Hall und G. Higman

Es wurde auf einen einfachen Beweis des folgenden Korollars (K) zu einem Satz von P. Hall und G. Higman hingewiesen:

(K): Sei $p$ eine Primzahl und $G$ eine endliche $p$-auflösbare Gruppe. Sei $V = O_{p',p}(G)$ und $V_p$ eine $p$-Sylowuntergruppe von $V$. Genügt das $p$-Element $a \in G$ der Bedingung

$$a^v \in C_G(a) \quad \text{für alle} \quad v \in V,$$

so gilt (i) oder (ii):

(i) $a^2 \in V$;

(ii) $a^3 \in V$ und $a$ operiert treu auf einer zur gewöhnlichen Quaternionengruppe isomorphen Untergruppe von $G/V$.

Der Beweis beruht auf der Beobachtung, daß (nach der üblichen Reduktion) j e d e s $p$-Element aus $G$ der Voraussetzung über $a$ genügt.

COFMAN, J.: Zweifache Transitivität in endlichen affinen Ebenen

Sei $A$ eine endliche affine Ebene der Ordnung $n$ und sei $\mathcal{O}$ eine Menge, bestehend aus $k$ affinen Punkten von $A$, mit der Eigenschaft, daß diese weder an einer Geraden noch an einem Oval liegen. Ist $G$ eine Kollineationsgruppe der Ebene $A$, die auf den Elementen der Menge $\mathcal{O}$ zweifach transitiv operiert, so gilt das Folgende:

a) Wenn $k > n$ und $G$ keine planaren Involutionen enthält, dann ist $A$ eine Translationsebene.

b) Wenn $k \leq n$ und $k \parallel n$ und $G$ eine auflösbare spezielle Kollineationsgruppe ist, dann bilden die Punkte aus $\mathcal{O}$ eine affine Unterebene $A_o$ der Ebene $A$. Die Ebene $A_o$ ist eine Translationsebene der Ordnung $\sqrt{k}$. Für $k = n$ ist $A$ eine strikte Semitranslationsebene in dem Sinne von Ostrom.

FALTINGS, K.: Automorphismengruppen endlicher abelscher p-Gruppen

Sei $\Gamma$ die Automorphismengruppe der endlichen abelschen p-Gruppe $A$, $A = \sum_{i=1}^{m} \circ\, \mathbb{Z}(p^i)^{\epsilon_i}$. Für jedes Paar vollinvarianter Untergruppen $U \subseteq V$ von $A$ sei $(V, U) = \{\alpha \in \Gamma \mid V(\alpha - 1) \subseteq U\}$; dann ist $\Gamma/(V, U)$ isomorph zu der von $\Gamma$ in $V/U$ induzierten Gruppe von Automorphismen. Sei $U \subseteq V \subseteq A$. Dann sind $U$ und $V$ ein Paar benachbarter vollinvarianter Untergruppen ($U \lessdot V$), falls $U$ und $V$ vollinvariant in $A$ sind und für jede vollinvariante Untergruppe $X \subseteq A$ aus $U \subseteq X \subseteq V$ $U = X$ oder $V = X$ folgt. Ferner sei für $X \subseteq A$ $X : p^k = \{a \in A \mid p^k a \in X\}$. Man kann nun zeigen, daß gilt: Ist $U \lessdot V$, so ist $\Gamma/(V, U) \cong$ Gruppe aller Automorphismen von $V/U$. Nach Shoda folgt hieraus für den maximalen p-Normalteiler $P$ von $\Gamma$:

$$P = \cap \{(V, U) \mid U \lessdot V \subseteq A\} = \cap \{(V, U) \mid U \lessdot V \subseteq 0 : p\}.$$

Sei $M \trianglelefteq \Gamma$ die Gruppe der Multiplikationen von $A$. Dann gilt für $0 \leq k < m$:

$$\tau_\Gamma (p^k A, 0) = \tau_\Gamma [(p^k A, 0) \cap P] = M[(A, p^k A) \cap (0 : p^k, 0)]$$

und für $0 < k < m$:

$$(*) \quad [(pA, 0) \cap P] \cap \tau_P [(p^k A, 0) \cap P] = (A, 0 : p \cap p^k A) \cap (pA + 0 : p^k, 0).$$

Für den Normalteiler $(pA, 0) \cap P$ von $\Gamma$ haben wir den Satz:

Ist $p \neq 2$, so sind alle Normalteiler vom Exponenten $p$ in $\Gamma$ in $(pA, 0) \cap P$ enthalten und $(pA, 0) \cap P$ ist der maximale Normalteiler vom Exponenten $p$ in $\Gamma$.

Da $\Gamma/(pA, 0) \cong$ Automorphismengruppe von $pA$ ist, sind die Gruppen $(p^k A, 0) \cap P$ durch Induktion in $\Gamma$ charakterisierbar, woraus man im Fall $m \geq 2$ aus (*) die Invarianten $\epsilon_i$ von A zurückerhält.

FELGNER, U.: Bemerkungen zur Axiomatischen Mengenlehre

Im ersten Teil des Vortrags wurde ein neues Axiomensystem $M_\omega$ in Standardformalisierung für die Mengenlehre vorgeführt, in dem Mengen (hier $\mathfrak{M}_1$-Objekte genannt) zu Klassen (hier: $\mathfrak{M}_2$-Objekte), Klassen zu Gesamtheiten ($\mathfrak{M}_3$-Objekten) etc... zusammengefaßt werden können. $M_\omega$ hat die (unendlich vielen) Grundbegriffe $\epsilon, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$

SATZ 1: Wenn ZF widerspruchsfrei ist, ist es auch $M_\omega$.

Im 2. Teil wurde die Verträglichkeit der verallgemeinerten "zweiten Kontinuumshypothese" von N. LUSIN (Fund. Math. 25) mit den Axiomen der NBG-Mengenlehre bewiesen:

SATZ 2: Wenn $\Lambda$ eine absolut-definierbare Ordinalzahl im Sinne von HAJNAL (Z. math. L. Gr. Math. 2) ist, dann ist $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\Lambda}$ mit dem GÖDELschen Axiomensystem (A) bis (E) verträglich.

Dies verallgemeinert ein Ergebnis von COHEN (Proc. Nat. Acad. Sci, 50, 51); der Beweis wurde jedoch syntaktisch geführt und ohne zusätzliche Voraussetzung der Existenz eines Standardmodells.

FISCHER, B.: Pronormale Untergruppen

SATZ: Sei U eine Untergruppe einer endlichen, auflösbaren Gruppe G. Dann enthält U genau eine Klasse konjugierter Untergruppen $M^U$, die maximal bezüglich der Eigenschaft sind, in G pronormal zu sein; ist U nicht pronormal in G, so folgt $N_G(M) \not\subseteq U$.

GÖBEL, R.: Abgeschlossene Gruppenklassen

Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{e}$ gruppentheoretische Eigenschaften.

Dann ist G eine $\mathfrak{e}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppe, wenn $G = 1$ ist oder für G gilt:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es existieren Untergruppen $A \supset B$, $U \supseteq C \supset D$ von $G$ mit:

(1) $B$ ist Normalteiler von $A$; $C, D$ sind Normalteiler von $U$; $C, A$ sind erreichbare Untergruppen von $G$

(2) $A/B$ ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Die von $U/D$ in $C/D$ induzierte Automorphismengruppe ist eine $\mathfrak{a}$-Gruppe.

SATZ: Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}$ untergruppenvererbliche, gruppentheoretische Eigenschaften. Ist $\mathfrak{r}$ eine residuelle, epimorphismenabgeschlossene Klasse von $\mathfrak{e}(\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})$-Gruppen, die unendlich-zyklische $\mathfrak{e}$-Gruppen und alle endlichen (nilpotenten) Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{t}}$-Gruppen enthält, so ist $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ oder $\mathfrak{e} = \mathfrak{u} = \mathfrak{a}$.

Dabei ist $G$ einer Hyper-$\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}$-Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von $G$ einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}$-Normalteiler besitzt, in dem von $G$ eine $\mathfrak{a}$-Automorphismengruppe induziert wird.

GRÄBE, P.: Periodizität der iterierten Ext-Kette

Für beliebige abelsche Gruppen $G, H$ definieren wir die iterierte Ext-Kette durch

$$E_o(G,H) = G, \quad E_{i+1}(G,H) = \mathrm{Ext}(E_i(G,H), H), \quad i \geq 0 .$$

$G$ heißt eine $H$-periodische Gruppe, wenn es ganze Zahlen $i, j$ gibt, derart daß $0 \leq i < j$ und

$$E_i(G,H) \approx E_j(G,H).$$

Eine Gruppenklasse $K$ heißt periodisch, wenn es eine Gruppe $H$ gibt, derart daß alle Gruppen $G$ aus $K$ $H$-periodisch sind. Eine periodische Klasse heißt maximal, wenn sie von keiner periodischen Klasse echt umfaßt wird.

SATZ: Für jede Primzahl $p$ ist die Klasse $K_p$ aller Gruppen $G$ derart, daß $r(G, p^i)$ endlich ist für alle $i$, eine maximale periodische Klasse. Diese $K_p$ sind die einzigen maximalen periodischen Klassen.

HAUSEN, J.: Über gewisse Klassen abelscher Gruppen

Definition: $\mathfrak{K}$ heißt $\mathfrak{A}$-Klasse, wenn $\mathfrak{K}$ eine Klasse abelscher Gruppen ist mit (1) $X \in \mathfrak{K} \Rightarrow |X| \leq \aleph_o$

(2) $X \in \mathfrak{K}$; $A \subseteq \mathrm{Aut}\, X$, $A$ abelsch $\Rightarrow A \in \mathfrak{K}$.

Definition: G heißt X-Gruppe, wenn G eine abelsche Erweiterung einer Minimax-Gruppe mit einer Torsionsgruppe ist, deren p-Komponenten alle endlich sind.

Definition: G abelsch; G heißt fast-torsionsfrei, wenn der Torsionsteil von G endlich ist.

SATZ: G abelsch

(1) G liegt in einer $\mathfrak{A}$-Klasse, die abgeschlossen ist bzgl. epimorpher Bilder, genau dann, wenn G endlich erzeugt ist.

(2) G liegt in einer $\mathfrak{A}$-Klasse, die abgeschlossen ist bzgl. fasttorsionsfreier epimorpher Bilder, genau dann, wenn G eine fasttorsionsfreie X-Gruppe ist.

(3) G liegt in einer $\mathfrak{A}$-Klasse, die abgeschlossen ist bzgl. reduzierter epimorpher Bilder und Untergruppen, genau dann, wenn G eine fasttorsionsfreie Minimax-Gruppe ist.

HAWKES, T.O.: Embedding of $\mathfrak{F}$-normalizers in $\mathfrak{F}$-covering subgroups

After giving a summary of definitions and basic results about the above conjugacy classes associated with a saturated formation $\mathfrak{F}$ (of finite soluble groups), we consider (A) the problem of how $\mathfrak{F}$-normalizers D are embedded in $\mathfrak{F}$-covering subgroups E, (B) criteria for their coincidence, and (C) how they transfer to proper subgroups. Among the results reported are the following:

THEOREM A: D is $\mathfrak{F}$-subnormal in E and when $G \in \underline{N}\,\underline{N}\,\underline{F}$, E is the $\mathfrak{F}$-subnormalizer of D.

THEOREM B: A D is also an E if and only if whenever $D \subset\cdot X \subseteq G$ we have D $\mathfrak{F}$-abnormal in X.

THEOREM C: If $H = G_r \subset\cdot G_{r-1} \subset\cdot \dots \subset\cdot G_o = G$ with $G_i F(G_{i-1}) = G_{i-1}$, $i = 1, \dots, r$, then $H \cap D$ and $H \cap E$ are respectively $\mathfrak{F}$-normalizer and $\mathfrak{F}$-covering subgroup of H for suitable D and E.

HEINEKEN, H.: Vektorräume mit mehreren antisymmetrischen Bilinearformen

Folgender Satz wurde bewiesen:

Ist $V$ ein Vektorraum der Dimension $2nk+1$ und sind $2n$ antisymmetrische Bilinearformen auf $V$ definiert, so existiert ein Unterraum der Dimension $k+1$ in $V$, auf dem alle $2n$ Bilinearformen trivial sind.

Für $n = 1$ war dieser Satz von Alperin bewiesen worden. Liegt eine ungerade Zahl von Bilinearformen vor, so kann man den Satz natürlich dadurch anwenden, daß man noch eine Bilinearform hinzudefiniert (etwa die überall triviale). Es ergibt sich dann etwa, daß vierdimensionale Vektorräume, die drei Bilinearformen besitzen, Unterräume der Dimension 1 besitzen, auf denen alle drei Bilinearformen trivial sind. Für einige Körper ist dies die bestmögliche Aussage, etwa daß der Körper des Vektorraums der der rationalen Zahlen ist. Ist der zugrundeliegende Körper jedoch endlich, so gibt es immer noch zweidimensionale Unterräume, auf denen alle Bilinearformen trivial sind. Daher gilt:
Ist $G^p = 1$, $G_3 = 1$, und $X\, o(Z(G)) = p^3$, $o(G) = p^7$, so existiert eine abelsche Untergruppe $U$ von $G$ der Ordnung $p^5$.

KRAUSE, G.: Das Herz eines Moduls

Ist $R$ ein Ring mit Eins, $M$ ein unitärer $R$-Linksmodul, so heißt ein Primideal $P$ des Ringes zu $M$ assoziiert, wenn es Linksannullator eines von einem Element des Moduls $M$ erzeugten Untermodul ist. Ist $P$ auch stets Linksannullator dieses Elements, so heißt $M$ ein $V$-Modul. Ist $R$ linksnoethersch, so sind für den $R$-Linksmodul $M$ folgende Aussagen äquivalent:

(a) $M$ ist ein $V$-Modul.

(b) 1. Alle zu $M$ assoziierten Primideale sind vollständig prim.

2. Zu jedem injektiven unzerlegbaren direkten Summanden $X$ der injektiven Hülle $E_R(M)$ von $M$ gibt es ein eindeutig bestimmtes assoziiertes Primideal $P$ mit $X \simeq E_R(R/P)$.

Für einen injektiven $V$-Modul $E$ ist dann das Herz von $E$ genau dann diskret direkte Summe der Rechtsannullatoren aller maximalen zu $E$ assoziierten Primideale, wenn aus der Maximalität des Linksannullators von $x \in E$ die Maximalität des Linksannullators von $Rx$ folgt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

LÜNEBURG, H.: Über einen Satz von H. Karzel

In diesem Vortrag wurde ein neuer Beweis des folgenden Satzes von Karzel (Hamb. Abh. 29 (1965), 118-136) gegeben: Es sei $G$ eine Gruppe und $\pi$ eine nichttriviale, normale Partition von $G$. Ferner sei $\pi(G)$ die Inzidenzstruktur, deren Punkte die Elemente von $G$ und deren Geraden die Rechtsrestklassen $Ux$ mit $U \in \pi$ und $x \in G$ sind. Ist dann $\pi(G)$ ein projektiver Raum, so ist entweder $\pi(G)$ eine involutorische Geometrie, d.h. $G^2 = 1$, oder es ist $\dim \pi(G) = 3$ und $\pi(G)$ ein elliptischer Gruppenraum.

Die wesentliche Idee bei diesem Beweis ist, die Abbildung $\sigma$, die durch $x^\sigma = x^{-1}$ definiert ist, systematisch heranzuziehen. $\sigma$ ist wegen der Normalität von $\pi$ eine Kollineation von $\pi(G)$, die den Punkt $1$ geradenweise festläßt. Ist $\sigma = 1$, so ist $G^2 = 1$. Ist $\sigma \neq 1$, so ist also $\sigma$ eine nichttriviale Zentralkollineation mit dem Zentrum $1$. Folglich läßt $\sigma$ eine Hyperebene $H$ punktweise fest. Aus der Definition von $\sigma$ folgt, daß im Falle $1 \in H$ gilt, daß $H = \{g \mid g \in G,\ g^2 = 1\}$ ist, und daß im Falle $1 \notin H$ gilt, daß $H = \{g \mid g \in G,\ g^2 = 1 \neq g\}$ ist. Mit Ideen, wie man sie in Bachmann AGS, S. 273 findet, zeigt man dann sehr rasch, daß $\dim \pi(G) = 3$ ist. Alles weitere dann wie üblich.

MÜLLER, U.: Rechtsnoethersche zyklische Metaidealringe

Definitionen: Ein Unterring $U$ eines Ringes $R$ heißt Metaideal, wenn Unterringe $U_i$ existieren, so, daß $U = U_1 \trianglelefteq U_2 \trianglelefteq \dots U_i \trianglelefteq U_{i+1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq U_\nu = R$. $U$ ist Subideal, wenn $U$ Mataideal und $\nu$ eine natürliche Zahl ist. Ein Ring heißt Metaidealring, wenn jeder Unterring Metaideal ist. Analog wird Subidealring definiert.

$R$ wird zyklischer Metaidealring genannt, wenn $\{r\}$, d.i. der von $r$ erzeugte Unterring, Metaideal ist für alle $r$ aus $R$.

Der Ring $R$ hat die Eigenschaft (E), wenn für alle $a, b$ aus $R$ eine natürliche Zahl $n = n(a,b)$ existiert, so, daß $a^n b \in \{a\}$ und $ba^n \in \{a\}$.

Es gilt der

SATZ: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(1) $R$ ist rechtsnoetherscher Metaidealring, d.h. $R$ genügt der Maximalbedingung für Rechtsideale.

(2) $R/ \cong Z/(m) \oplus K$, $m \in Z$ = Ring der ganzen Zahlen und $K \triangleright I \cong kZ$, $k \in Z$

mit $K/I = Z/(n) \oplus N$, $n \in Z$, N nilpotenter rechtsnoetherscher Ring, dabei ist $(m, n) = 1$ und $m \cdot n$ ein Teiler von k.

(3) R ist endlich erzeugter Metaidealring.

(4) R ist Subidealring, $R^+$ genügt der Maximalbedingung für Untergruppen.

(5) R ist rechtsnoetherscher zyklischer Metaidealring.

(6) R ist rechtsnoetherscher Ring mit der Eigenschaft (E).

NEWELL, M.L.: On a theorem of Malcev

It was shown by Malcev, that a locally nilpotent group, whose torsionfree abelian subgroups have finite rank, is an extension of a torsion group by a torsionfree nilpotent group of finite rank. If a class X of groups forms a variety, we say the group G is X-hypercentral if every epimorphic image $H \neq 1$ of G contains a normal subgroup $N \neq 1$ of H, such that the automorphism group induced by H in N is a locally finite X-group. As a generalization of Malcev's theorem we prove the

THEOREM: If G is a locally X-hypercentral group, whose torsionfree abelian subgroups have finite rank, then G/T is an extension of a torsion-free nilpotent group of finite rank by an X-group; where T is the product of all torsion normal subgroups of G.

COROLLARY 1: If X is contained in the variety of soluble groups of length n, then G/T possesses two normal subgroups M and N such that M is of finite rank and of finite index in G/T, the quotient group M/N is abelian and N is nilpotent.

As a second corollary we listed some varieties X for which G/T is in fact an X-hypercentral group.

OSTROM, T.G.: Planes of order n with collineation groups of order $n^2$

Let $\pi$ be a plane of order n admitting a group $\Gamma$ of collineations where

(1) $\Gamma$ is of order $n^2$,

(2) $\Gamma$ contains a normal subgroup H which acts as a (P, l)-transitive group for some P, l, $P \in l$,

(3) $\Gamma = G \otimes H$ for some G.

Then $\pi$ may be represented as an affine plane with l chosen as the line at infinity. Each affine point is represented as an ordered pair (x, y), $x \in G$, $y \in H$. Each line may be represented by an equation x = constant or $y = f(x-a)+b$, $a \in G$, $b \in H$ where f is a function from G to H such that

the mapping $x \to -f(x)+f(x+u)$ is one-to-one for each $u \neq 0$. Conversely, any pair of groups G and H admitting such a "planar function" can be used to define a plane satisfying (1), (2) and (3).

PLAUMANN, P.: Topologische Gruppen vom verallgemeinerten Range 1

Für eine lokal kompakte Gruppe G sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. G ist das semidirekte Produkt einer zusammenhängenden abelschen Gruppe mit dem Automorphismus -1.
2. a) Es gibt eine Involution z in G mit total unzusammenhängendem Zentralisator, so daß G von $z^G$ erzeugt wird.
   b) Der Zentralisator der zusammenhängenden Komponente $G_o$ der Eins ist in $G_o$ enthalten.

SCHMIDT, R.: Modularität und Vertauschbarkeit in endlichen Gruppen

Ist M ein Quasinormalteiler der Gruppe G, dann ist M modular in G im Sinne der folgenden

DEFINITION: M ist modular in G, wenn M mit jeder Untergruppe U von G ein modulares Paar von Untergruppen von G bildet, d.h. wenn gilt:

$$(U \cup M) \cap V = (U \cap V) \cup M \quad \text{für alle } V \subseteq G \text{ mit } M \subseteq V \text{ und}$$
$$(U \cup M) \cap V = U \cup (M \cap V) \quad \text{für alle } V \subseteq G \text{ mit } U \subseteq V.$$

Es wurde gezeigt, daß in endlichen Gruppen für diese modularen Untergruppen ähnliche Sätze wie für Quasinormalteiler gelten.

Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt:

SATZ 1: Ist M modular in G, dann ist M mit jeder Untergruppe U von G vertauschbar, die zu o(M) teilerfremde Ordnung hat.

SATZ 2: Ist M modular in G und G einfach, dann ist M = G oder M = 1.

SATZ 3: Ist M modular in G, dann ist $M/M_G$ auflösbar. (Dabei ist $M_G$ das Herz von M in G, also $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x$.)

Haupthilfsmittel beim Beweis dieser Sätze war das folgende

LEMMA: Sei M eine maximale modulare Untergruppe von G. Dann ist

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

entweder $M \lhd G$ oder es existiert ein Normalteiler $N$ von $G$ mit $N \subset M$ und $[G:N] = pq$, $p, q$ Primzahlen.

STRAMBACH, K.: Topologische Ebenen

Unter einer SALZMANN-Ebene versteht man eine Geometrie $E$, deren Punktmenge $\mathfrak{P}$ zur gewöhnlichen reellen affinen Ebene homöomorph ist und deren Geraden abgeschlossene zur reellen Zahlengeraden homöomorphe Teilmengen von $\mathfrak{P}$ sind, so daß durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht.

SATZ 1: Eine Salzmann-Ebene $E$ ist genau dann die klassische hyperbolische Ebene, wenn sie eine (abstrakt) einfache Kollineationsgruppe positiver Dimension zuläßt.

SATZ 2: Eine Salzmann-Ebene $E$ ist genau dann die reelle affine Ebene, wenn sie eine zusammenhängende auflösbare nicht-abelsche Kollineationsgruppe zuläßt, die kompakte Untergruppen $\neq 1$ besitzt.

K. Heineken

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft