Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Tagungsbericht 3 / 1968

Arbeitsgemeinschaft über Modelltheorie

18. 2. 68 - 24. 2. 68

Teilnehmer:

W. Felscher, Freiburg
S. Görnemann, Hannover
J. Heine, Hannover
W. Heinermann, Hannover
K. Potthoff, Hannover
E.J. Thiele, Hannover

Die Leitung hatte E.J.Thiele.

Die Arbeitsgemeinschaft sollte ein im Wintersemester 67/68 an der Technischen Hochschule Hannover abgehaltenes Seminar über Modelltheorie vertiefen und ergänzen. Dabei ergaben sich zwei Hauptthemen:

1) Homogen-universelle Strukturen und deren Zusammenhang mit Ultraprodukten,
2) Der Satz von Morley über die Kategorizität von Theorien erster Stufe.

Ausserdem berichteten Herr Felscher und Frl. Görnemann über eigene Arbeiten.

Es sollte in der Tagungswoche ein bestimmter Teil der in den letzten Jahren erschienenen sehr umfangreichen Literatur zur Modelltheorie durchgearbeitet werden. Damit war in Vorlesungen und Seminaren in Hannover bereits begonnen worden; da aber die Intensität von Veranstaltungen während der Vorlesungszeit durch die diversen Verpflichtungen der Teilnehmer begrenzt wird, und da auch Klausurtagungen am Heimatort nicht leicht durchzuführen sind, war allgemein die Gelegenheit, eine Woche in Oberwolfach zu arbeiten, sehr begrüsst worden. Ich glaube, dass sich der Aufwand gelohnt hat. Vielleicht wäre eine Beschränkung auf eines der beiden Hauptthemen noch wirkungsvoller gewesen (dessen bin ich aber nicht sicher); jedenfalls würde ich es sehr begrüssen, wenn auch zukünftig gelegentlich solche Arbeitsgemeinschaften durchgeführt werden könnten.

Im folgenden werden die wichtigsten der vorgetragenen Resultate kurz zusammengefasst.

1)

Gegeben sei eine feste Klasse M von ähnlichen Strukturen erster Stufe. Ein Element A von M heisst homogen (bez. M), wenn jeder Monomorphismus eines Teilsystems von A aus M, das kleinere Mächtigkeit hat als A, in A hinein zu einem Automorphismus von A erweitert werden kann. - A heisst universell (bez. M), wenn jedes Element von M, dessen Mächtigkeit die von A nicht übertrifft, monomorph in A eingebettet werden kann.

Der (bereits in Hannover vorgetragene) Satz von Morley und Vaught besagt: Falls M eine Reihe von rein algebraisch-mengentheoretischen Bedingungen, u.a. Amalgamierungsbedingungen, erfüllt, existieren zu nahezu jeder unendlichen Mächtigkeit homogen-universelle Strukturen in M, und alle derartigen Strukturen gleicher Mächtigkeit sind isomorph.

Die Klasse aller Modelle einer vollständigen Theorie erfüllt die Morley-Vaughtschen Bedingungen, so dass es demnach in fast jeder unendlichen Mächtigkeit ein ausgezeichnetes Modell der Theorie gibt (vorgetragen von Herrn Heinermann).

Homogen-universelle Strukturen lassen sich auch charakterisieren als solche Strukturen, in denen alle Primfilter der zugehörigen Lindenbaum-Algebra der Ausdrücke mit höchstens einer freien Variablen durch Elemente repräsentiert werden können, also als saturierte Strukturen.
Von Keisler stammt der Satz, dass Ultraprodukte nach "guten" Ultrafiltern saturiert sind (Potthoff); dabei sind "gute Ultrafilter" durch rein mengentheoretische Eigenschaften charakterisiert. Die Existenz von guten Ultra-

filtern ist ebenfalls von Keisler bewiesen worden (Heine), so dass auf diese Weise ein anderer Beweis des Existenzsatzes von Morley-Vaught geführt werden kann.

Der Begriff der Saturiertheit lässt sich zu dem der k-Saturiertheit (k eine Kardinalzahl) verallgemeinern. Ist k die Kardinalzahl von A, so fällt die Saturiertheit mit der k-Saturiertheit von A zusammen.
Die speziellen Eigenschaften von k-saturierten Strukturen inspirierten Keisler zu folgendem Klassifizierungsversuch von Strukturen (Journal of Symbolic Logic, Band 32):

A voor B gdw für jeden Ultrafilter D gilt: wenn D-Prod B k-saturiert ist, so auch D-Prod A (für alle k).

(Mit D-Prod A wird die nach D reduzierte Ultrapotenz von A bezeichnet).
Keisler untersucht die Eigenschaften von voor, besonders die Existenz grösster und kleinster Elemente bez. voor. Die Relation voor kann als Kompliziertheitsmaass der den Strukturen entsprechenden Theorien betrachtet werden; z.B. sind endliche Strukturen oder Strukturen ohne eigentliche Relationen und Funktionen minimal bez. voor, die Arithmetik ist maximal. - In der Keislerschen Arbeit wird auch die Frage nach syntaktischen Charakterisierungen von voor und von minimalen und maximalen Theorien angegriffen. Die komplizierten Bedingungen, die Keisler zur Erzielung von Teilresultaten aufstellt, werden von ihm selbst als noch nicht befriedigend bezeichnet (Bericht: Frl. Görnemann).

2)
In der Modelltheorie erster Stufe ist der Begriff der Kategorizität eines Axiomensystems wenig sinnvoll, da wegen des satzes von Löwenheim-Skolem-Tarski Systeme, die überhaupt unendliche Modelle haben, Modelle jeder unendlichen Mächtigkeit haben. Sei k eine unendliche Kardinalzahl. Ein Axiomensystem heisst k-kategorisch, wenn je zwei seiner Modelle der Mächtigkeit k isomorph sind. Da alle bekannten Beispiele von Axiomensystemen in sämtlichen überabzählbaren Mächtigkeiten jeweils einheitliches Kategorizitätsverhalten zeigten, wurde die Vermutung ausgesprochen, dass jedes

(abzählbare) Axiomensystem, welches in einer überabzählbaren Mächtigkeit kategorisch ist, in jeder überabzählbaren Mächtigkeit kategorisch ist. Diese Vermutung wurde 1962 von Morley bewiesen. Die Grundzüge des langen und komplizierten Beweises wurden vorgetragen (Thiele).

Herr Felscher berichtete über einen neuen Beweis eines Satzes von Kochen zur Charakterisierung relativer elementarer Klassen.

Frl. Görnemann berichtete über die in ihrer Diplomarbeit herausgearbeiteten Zusammenhänge zwischen Kripke-Modellen und pseudo-booleschwertigen Modellen der intuitionistischen Logik.

E.-J. Thiele (Hannover)