Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 14/68

Arbeitstagung über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme

27. bis 31. Mai 1968

Die Arbeitstagung über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme, die unter der Leitung von E. Heinz (Göttingen) und S. Hildebrandt (Mainz) im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach durchgeführt wurde, diente dem Zweck, einerseits neuere Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie zu besprechen und andererseits diese Theorie auf die Probleme der Minimalflächen (Plateausches Problem) und der Flächen konstanter mittlerer Krümmung anzuwenden.

In der allgemeinen Theorie stützte man sich dabei insbesondere auf die Arbeiten von C.B. Morrey (vgl. dessen Buch: Multiple Integrals in the Calculus of Variations), während man bei der Behandlung des Plateauschen Problems zum Teil ältere Arbeiten von R. Courant, M. Morse und C. Tompkins (nach Caurants Buch: Dirichlet's Comformal Mapping, and Minimal Surfaces), zum anderen aber neue Resultate von E. Heinz und S. Hildebrandt aus den letzten Jahren heranzog. Im ganzen wurden acht Vorträge gehalten. Die Teilnehmer stellten eine Liste von offenen Problemen aus dem abgehandelten Problemkreis zusammen, die am Ende dieses Berichtes zu finden ist.

Die Vorträge lassen sich in vier Problemkreise gliedern.

In den beiden ersten Vorträgen referierten F. Tomi und E. Heinz über die Lösung des verallgemeinerten Plateauschen Problems für

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Flächen konstanter mittlerer Krümmung. (E. Heinz, Math. Ann. 127 (1954) und H. Werner, Math. Ann. 133 (1957)). F. Tomi widmete sich der Lösung des Dirichletschen Problems für die nichtlineare Differentialgleichung $\Delta \mathfrak{x} = 2H(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)$, und E. Heinz benutzte diese Ergebnisse, um das Plateausche Problem für Flächen konstanter mittlerer Krümmung zu lösen.

Zwei weitere Vorträge waren der Theorie der instabilen Minimalflächen gewidmet. Dabei referierte E. Heinz über die Courantsche Methode zur Behandlung instabiler Minimalflächen mit polygonaler Berandung und konnte zeigen, daß eine Übertragung dieser Methode auf instabile Flächen konstanter mittlerer Krümmung möglich ist. W. Jaeger behandelte die instabilen Minimalflächen mit Hilfe der von M. Morse und C. Tompkins (Ann. of Math. 40 (1939)) entwickelten Methode.

S. Hildebrandt widmete sich in einem Vortrag allgemeinen Regularitätssätzen für schwache Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme. S. Hildebrandt konnte zeigen, daß sich seine eigenen Regularitätssätze für das Randverhalten von Minimalflächen auf Flächen konstanter mittlerer Krümmung übertragen lassen.

In den beiden letzten Vorträgen referierten F.P. Harth und K. Goldhorn über die Lösung des Plateauschen Problems in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dabei demonstrierte F.P. Harth den von C.B. Morrey angegebenen Beweis des Satzes von Lichtenstein über die konforme Abbildung von Flächen. Diesen Satz benutzte K. Goldhorn im letzten Vortrag, um die Existenz einer Lösung des Plateauschen Problems für Flächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu beweisen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

Brüll, U., Mainz
Frehse, J., Frankfurt
Gassen, H., Mainz
Giesecke, B., Konstanz
Goldhorn, K., Mainz
Gornik, K., Mainz
Harth, F.P., Mainz
Heinz, E., Göttingen
Hildebrandt, S., Mainz
Halder, E., Mainz
Jäger, W., Göttingen
Kaul, H., Mainz
Köckler, N., Mainz
Nitsche, J.C.C., Minneapolis
Oswald, E., Mainz
Schmidt, B., Mainz
Staude, U., Mainz
Steffen, K., Mainz
Tomi, F., Göttingen
Werner, H., Münster
Zens, D., Mainz

Vortragsauszüge

TOMI, F.: Das Dirichletsche Problem für die Gleichung $\Delta \mathfrak{r} = 2H(\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v)$

Nach E. Heinz ("Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung", Math.Ann. 127 (1954)) und H. Werner ("Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung", Math.Ann. 133 (1957)) wurden Bedingungen angegeben, unter denen das Dirichletproblem für das nichtlineare System $\Delta \mathfrak{r} = 2H(\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v)$ lösbar ist. Dem Beweis war die Leray-Schaudersche Theorie des Abbildungsgrades zugrunde gelegt.

HEINZ, E.: Lösung des verallgemeinerten Plateauschen Problems für Flächen konstanter mittlerer Krümmung

(Literatur: E. Heinz, Math.Ann. 127 (1954)). Sei Γ eine rektifizierbare Jordankurve im $\mathbb{R}^3$, die in der Einheitskugel $|\mathfrak{r}| \leq 1$ enthalten

ist. Dann gibt es eine Vektorfunktion $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$, $(B = \{(u,v): u^2+v^2 < 1\}$ mit $\Delta \mathfrak{x} = 2H(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)$; $H < 1/2$, $\mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2$, $\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v = 0$, so daß $\mathfrak{x}: \partial B \to \Gamma$ topologisch ist. Der Beweis benutzt eine auf H. Werner (Math. Ann. 133 (1957)) zurückgehende Vereinfachung.

HEINZ, E.: Instabile Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Polygon im $\mathbb{R}^3$, das in der Einheitskugel $|\mathfrak{x}| \leq 1$ enthalten ist. Außerdem berande $\mathfrak{P}$ zwei verschiedene Flächen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ konstanter mittlerer Krümmung H mit $|H| < 1/2$, die isolierte Minima des Funktionals

$$E(\mathfrak{x}) = \iint\limits_{|w|<1} (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2 + \frac{4}{3} H(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v))\, du\, dv$$

liefern. Dann gibt es eine instabile Fläche $\mathfrak{x}_3$ konstanter mittlerer Krümmung H, für die $E(\mathfrak{x}_3) > \mathrm{Max}\,(E(\mathfrak{x}_1), E(\mathfrak{x}_2))$ gilt. Der Satz stellt eine Verallgemeinerung eines Resultates von Morse-Tompkins und Courant dar. Die Beweismethode schließt sich an das Buch "Dirichlet's principle" von R. Courant an.

HILDEBRANDT, S.: Über das Randverhalten von Minimalflächen und Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Es wurde bewiesen: Ist $\mathfrak{x}$ eine von einer Jordankurve Γ berandete Minimalfläche, $\mathfrak{x}(u,v)$ definiert auf $\bar{B} = \{w = u+iv: |w| \leq 1\}$, so gilt:

$\mathfrak{x} \in C^{s+\alpha}(\bar{B})$ bzw. $\mathfrak{x} \in C^{\infty}(\bar{B})$ bzw. $\mathfrak{x} \in C^{\omega}(\bar{B})$, $s \geq 4$, $0 < \alpha < 1$, wenn $\Gamma \in C^{s+\alpha}$ bzw. $\Gamma \in C^{\infty}$ bzw. $\Gamma \in C^{\omega}$.

Letzteres Resultat wurde bereits von H. Lewy (1950) im Falle $\Gamma \in C^{\omega}$ auf andere Weise bewiesen, die anderen Ergebnisse sind neu. Die Übertragung auf Flächen konstanter mittlerer Krümmung, die

$$E(\mathfrak{x}) = \iint_B \{\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2 + \frac{4}{3} H\, \mathfrak{x}\cdot(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\}\, du\, dv$$

zu einem Minimum in der Klasse $\mathfrak{C}(\Gamma)$ der Vergleichsflächen machen, ist ebenfalls gelungen, bis auf einen Punkt, nämlich zu zeigen, daß $\inf\limits_{\mathfrak{z}\in\mathfrak{C}(\Gamma)} E(\mathfrak{z}) = \inf\limits_{\mathfrak{z}\in\mathfrak{C}(\Gamma)} \mathfrak{G}(\mathfrak{z})$, wobei

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{z}) = \iint_B \{ 2\sqrt{\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2 - (\mathfrak{x}_u\cdot\mathfrak{x}_v)^2} + \frac{4}{3} H\, \mathfrak{x}\cdot(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\}\, du\, dv$$

ist.

JÄGER, W.: Instabile Minimalflächen (nach Morse-Tompkins)

Sei M ein metrischer Raum und f eine reellwertige Funktion auf M. Die Morse-Theorie gibt Bedingungen für M und f an, unter denen sich Sätze über die Existenz und den Typ kritischer Punkte von f ableiten lassen. Sei j eine Jordankurve im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, dann läßt sich ein Paar (M, f) finden, so daß die Axiome von Morse erfüllt sind und den kritischen Punkten von f Lösungen des zu j gehörigen Plateauschen Problems für Minimalflächen entsprechen. Aus der Morse-Theorie ergeben sich Aussagen über die Existenz instabiler Minimalflächen, die von j berandet werden. (Morse-Tompkins, Ann. of Math. 40 (1939)).

HILDEBRANDT, S.: Differenzierbarkeit schwacher Lösungen zweidimensionaler regulärer Variationsprobleme

Nach C.B. Morrey (vgl. "Multiple integrals in the calculus of variations", Springer 1966) wird gezeigt, daß schwache Lösungen $z \in H_1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, G beschränkt, $z = (z^1, \ldots, z^N) = z(x)$, $x = (x^1, x^2)$, von $\int_G f(x, z, \nabla z)\,dx \to \min$ unter geeigneten, aber

ziemlich schwachen Voraussetzungen an den Integranden regulär sind. Als Beweismittel werden Lichtensteins Differenzenmethode, ein "Dirichlet growth theorem", das Hölderstetigkeit liefert, und verschiedene Integralabschätzungen verwendet.

HARTH, F.P.: Der Satz von Lichtenstein über die konforme Abbildung von Flächen

Nach C.B. Morrey ("Multiple integrals in the calculus of variations", § 9.3) wurde gezeigt, daß zu einer regulären Parameterdarstellung einer Fläche über einem k-fach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ eine konforme Darstellung der Fläche über einem k-fach zusammenhängenden Gebiet B existiert, das von k Kreisen berandet wird. Zum Beweis werden im wesentlichen Hilfsmittel und Methoden von Courant (vgl. "Dirichlet's principle") verwendet.

GOLDHORN, K.: Das Plateausche Problem für Minimalflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Nach C.B. Morrey ("Multiple integrals in the calculus of variations", § 9.4) wurde gezeigt, daß das Plateausche Problem für k-fach zusammenhängende Flächen in einer homogenen regulären Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ durch einen Minimalvektor z gelöst wird, der auf dem Abschluß eines k-fach zusammenhängenden Kreisgebiets $B \subset \mathbb{R}^2$ stetig ist und dieselben Regularitätseigenschaften wie die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ hat. Der Beweis benutzt Methoden von Courant, Silverman und Regularitätssätze von Morrey.

OFFENE FRAGEN

Im Laufe der Diskussion über die angeschnittenen Fragen wurde folgende Liste von offenen Problemen aus dem abgehandelten Problemkreis zusammengestellt (vgl. auch den Ergebnisbericht von J.C.C. Nitsche, Bull.Amer.Math.Soc. 71 (1965), 195-270):

(1) Übertragung des Beweises von H. Lewy über die Analytizität von Minimalflächen bei analytischer Berandung auf Flächen konstanter mittlerer Krümmung.

(2) Sei $\mathfrak{r}$ eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung und sei $\mathfrak{r}_u^2(z_o) \neq o$. Frage: Ist die Einschränkung von $\mathfrak{r}$ auf den Kreis $B_r(z_o)$, r hinreichend klein, eine Fläche, die das Funktional

$$E(\mathfrak{z}) = \iint\limits_{B_r(z_o)} \{ \mathfrak{z}_u^2 + \mathfrak{z}_v^2 + \frac{4}{3} H \mathfrak{z} \cdot (\mathfrak{z}_u \times \mathfrak{z}_v) \} \, du \, dv$$

unter allen Flächen $\mathfrak{z}$,it der Berandung $\mathfrak{r}(\partial B_r(z_o))$ zu einem Minimum macht?

(3) S. Sasaki (Japan.J.Math. 29 (1959), 118-125) bewies folgende Abschätzung für die Verzweigungspunkte einer Minimalfläche

$$(*) \quad 2\pi \sum_{\alpha} \mu_\alpha + \pi \sum_{\beta} \nu_\beta + \iint\limits_{\mathfrak{F}} |K| \, du \leq \oint\limits_{\Gamma} \mathfrak{k} \, ds$$

wo K die Gaußsche Krümmung der Fläche $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{k}$ die Krümmung der Randkurve Γ, μ_α die Ordnung der Verzweigungspunkte in B (= Definitionsbereich der Fläche) und ν_β die Ordnung der Verzweigungspunkte auf ∂B ist.

Frage: Gibt es eine ähnliche Formel für Flächen konstanter mittlerer Krümmung?

(4) Man verschärfe die Formel (*) von Sasaki.

(5) Man zeige, daß für gewisse Klassen von Randkurven Γ (z.B. Γ nicht verknotet) Minimalflächen bzw. Flächen konstanter mittlerer Krümmung H existieren, die von Γ berandet werden,

so daß keine Verzweigungspunkte (d.h. $\mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2 = o$) auftreten.

(6) T. Rado bewies, daß eine Kurve Γ, die eine sternförmige Projektion hat, eine Minimalfläche ohne Verzweigungspunkte berandet.

Man übertrage den Beweis von Rado auf Flächen konstanter mittlerer Krümmung.

(7) Man beweise die Eindeutigkeit bzw. gebe eine Anzahlabschätzung für die Lösungen des Plateauschen Problems für Flächen konstanter mittlerer Krümmung, oder wenigstens für Minimalflächen.

(8) Man beweise die eindeutige Lösbarkeit des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{x} &= 2H(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v), \quad H \text{ fest, in } B \\ \mathfrak{x} &= \mathfrak{y} \qquad\qquad\qquad \text{auf } \partial B \qquad (**) \end{aligned}$$

bei beliebigem stetigem $\mathfrak{y}$ mit $|\mathfrak{y}| \leq 1$, $|H| < \frac{1}{2}$, $|\mathfrak{x}| \leq 1$.

(9) Frage: Gibt es höchstens zwei Lösungen des Randwertproblems (**)?

(10) Man beweise die Existenz von zwei Lösungen des Problems (**).

(11) Frage: Gibt es allgemeinere Resultate zu den Problemen (8) - (10) für allgemeinere Systeme?

(12) Man leite eine isoperimetrische Ungleichung für Flächen konstanter mittlerer Krümmung her.

(13) Gilt der Existenzsatz von E. Heinz auch für Flächen konstanter mittlerer Krümmung H mit $|H| > \frac{1}{2}$?

(14) Behandlung des freien Randwertproblems für Flächen mit H = const., insbesondere: Existenzbeweis und Untersuchung des Randverhaltens, d.h. Regularität der Schnittkurve.

(15) Sei Γ ein Jordanbogen mit Endpunkten P_1, P_2, deren Abstand 1 beträgt. P_1 und P_2 seien durch einen Faden $\mathfrak{C}$ der Länge > 1

verbunden. Man betrachte das Plateauproblem für die Klasse aller Flächen, die von der Kurve Γ und dem "frei beweglichen" Bogen $\mathfrak{S}$ berandet werden. Man zeige, daß eine Lösung dieses Problems auf dem "freien" Bogen analytische Berandung hat, d.h. der freie Teil des Fadens ist für eine eingespannte Minimalfläche eine analytische Kurve.

(16) Übertragung der Resultate von Heinz und Courant (freies Randwertproblem) auf Kapillaritätsprobleme, z.B. Existenz (und Stabilität) von Tropfen mit fester oder freier Berandung. (vgl. Encyklopädieartikel von Minkowski).

(17) a) Sind die Minima des Dirichletintegrals isoliert, d.h. welche Bedingungen müssen an die Randkurve gestellt werden, um Isoliertheit zu sichern? Wie verhält es sich mit der Existenz von Blöcken von Minimalflächen?

b) Läßt sich die Nichtisoliertheit durch kleine Variation der Randkurve aufheben?

(18) Nähere Untersuchung von Courant's Funktion $\Phi(t)$, insbesondere Regularität, etwa $\Phi(t) \in C^2$, bei instabilen Minimalflächen.

K. Goldhorn (Mainz)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft