Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 /01151

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 28/1968

Geometrie

22.9. bis 28.9.1968

Die diesjährige Geometrietagung in Oberwolfach fand wiederum unter der Leitung von Professor Dr. K.H. Weise (Kiel) und Professor Dr. K. Leichtweiß (Berlin) statt. Wie in jedem Jahr war die Zahl der Teilnehmer, besonders der ausländischen Gäste, erfreulich groß und das Vortragsangebot sehr reichhaltig. Neben vielen anderen interessanten und anregenden Themen fanden Fragen der Differentialgeometrie im Großen und Probleme der projektiven Geometrie sowie der Konvexgeometrie lebhaftes Interesse.

Teilnehmer:

G.Aumann, München
C.Banica, Bukarest
M.Barner, Freiburg
W.Benz, Bochum
S.Bilinski, Zagreb
W.Burau, Hamburg
U.Brechtken-Manderscheid, Dortmund
U.Casati, Zürich
E.T.Davies, Southampton
W.Degen, Stuttgart
K.Doden, Kiel
P.Dombrowsi, Bonn
A.Duma, Bukarest
G.Ewald, Bochum
U.Feldmann, Darmstadt
D.Ferus, Köln
K.Fladt, Freiburg
H.Frank, Oberwolfach
O.Giering, Stuttgart
L.Godeaux, Liège
K.P.Grotemeyer, Berlin
V.Havel, Brno
E.Heil, Darmstadt
W.Henke, Köln
F.Hohenberg, Graz
J.Hoschek, Darmstadt
R.Jürgensen, Kiel
H.Karcher, Berlin
G.Kastner, Darmstadt
P.Kirsche, Freiburg
W.Klingenberg, Bonn
W.Krautwald, Darmstadt
N.H.Kuiper, Bennekom
H.Kunle, Karlsruhe
D.Laugwitz, Darmstadt

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

K.Leichtweiß, Berlin
H.Lenz, München
R.Lingenberg, Darmstadt
Ch.Lubbert, Darmstadt
J.Mallmann, Freiburg
E.Martensen, Darmstadt
M.Matsumoto, Kyoto
G.Ringel, Berlin
R.Sauer, München
B.Schlender, Hannover
K.A.Schmitt, Bochum
R.Schneider, Bochum
U.Simon, Berlin
N.Stephanidis, Berlin
A.Švec, Prag
H.Viesel, Karlsruhe
W.Vogel, Hannover
K.Voss, Zürich
R.Walter, Freiburg
D.Wegner, Berlin
Weinstein, Cambridge/Mass.
K.H.Weise, Kiel
T.Zamfirescu, Bochum

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Vortragsauszüge

HOHENBERG, F.: "Einige Figuren der erweiterten Oktaedergruppe und der erweiterten Ikosaedergruppe"

Diese Gruppen erzeugen aus einer Geraden g allgemeiner Lage eine Figur G von 48 bzw. 120 Geraden, mit insgesamt 216 bzw. 900 Schnittpunkten, die sich auf 9 bzw. 15 "Schnittpolyeder" der Gruppe verteilen, und ebensoviel Verbindungsebenen, die "Hüllpolyeder" bilden. Interessanter als der allgemeine Fall sind Sonderfälle, die sich aus besonderen Lagen von g ergeben.

g sei zum Beispiel Gemeinlot zweier kreuzender Oktaederkanten. G enthält dann 24 Geraden mit 3 Schnitt- und 2 Hüllpolyedern. G ist ein Teil der Diagonalfigur einer Kummerschen Konfiguration.

Beim Ikosaeder und Dodekaeder bilden die Gemeinlote kreuzender Kanten je vier Figuren G. G enthält 270 oder 330 oder 60 Schnittpunkte, 5 oder 6 oder 1 Schnittpolyeder, sowie zwei Arten von Hüllpolyedern.

Alle auftretenden Polyeder sind halbregulär, mehrere Archimedisch.

Als Teilfiguren, die je eine Diedergruppe gestatten, ergeben sich regelmäßige Prismen, ferner regelmäßige unebene Polygone, beim Oktaeder Vierecke und Sechsecke, beim Ikosaeder und Dodekaeder Zehnecke 2. Art und Sechsecke.

RINGEL, G.: "Beweis der Heawood'schen Vermutung"

Es sei F_p die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlechte p. Eine Landkarte auf F_p heißt mit m Farben zulässig färbbar, wenn jedem Land eine der m Farben so zugeordnet werden kann, daß je

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

zwei (längs mindestens einer Kante) benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten. Es gibt eine kleinste Zahl $\chi(F_p)$ derart, daß jede Landkarte auf F_p mit $\chi(F_p)$ Farben zulässig gefärbt werden kann. $\chi(F_p)$ heißt die chromatische Zahl von F_p. Für $\chi(F_p)$ bewies P.J. Heawood 1890 die Ungleichung

$$(1) \qquad \chi(F_p) \leq \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] \text{ für alle } p \geq 1.$$

Die Aussage, daß in (1) stets das Gleichheitszeichen gilt, heißt die Heawood'sche Vermutung.

In den bisherigen Versuchen (Heffter, Ringel, Gustin, Terry, Welch, Youngs) wurde diese Vermutung für gewisse Klassen von Geschlechtszahlen p bewiesen. Im Herbst 1967 begannen J.W.T. Youngs und Ringel, gemeinsam an der Lösung des Problems in den noch ungelösten Fällen zu arbeiten, nämlich in der Hauptsache für diejenigen p, für die die rechte Seite von (1) kongruent 2, 8 oder 11 (mod 12) ist. Sie konnten bis März 1968 den Beweis für alle noch ausstehenden Fälle erbringen. Somit ist in (1) das Gleichheitszeichen für alle $p \geq 1$ bewiesen.

BILINSKI, St.: "Ein analytisches Modell der projektiven Liniengeometrie"

Da im dreidimensionalen projektiven Raume die Gerade in Bezug auf die projektive Dualität eine zentrale Stelle einnimmt, wird die Liniengeometrie in diesem Raum einfacher und harmonischer aufgebaut als in Räumen anderer Dimensionen. Deswegen wird zunächst ein analytisches Modell im Raume P^3 gegeben, wozu der Begriff der Ptolemäischen Matrix eingeführt wird. Dabei wird die Ptolemäische Matrix als jene

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

schiefsymmetrische Matrix erklärt, welche den Rang zwei hat. Eine Gerade des Raumes P^3 kann als Strahl p oder als Achse q aufgefaßt werden, wobei p und q Ptolemäische Matrizen sind, und p und q sollen als dieselbe Gerade betrachtet werden dann und nur dann, wenn pq eine Nullmatrix ist. Es werden weiter die abgeleiteten Begriffe des Punktes und der Ebene in diesem Modell definiert und alle Fälle der Inzidenzrelationen erklärt. Für das gewonnene Modell wird dann die Isomorphie mit dem projektiven Raume bewiesen. Es wird ein Ausblick auf eine mögliche Verallgemeinerung in mehrdimensionalen Räumen gegeben.

WALTER, R.: "Zur Projektivkinematik einparametriger Ebenenscharen"

Im Sinne der projektiven Kinematik werden einparametrige Abbildungsscharen, die mit einer Ebenenschar des projektiven dreidimensionalen Raumes verknüpft sind, untersucht. Die projektiven unter diesen Bewegungen werden in einer Klasse beliebiger, hinreichend regulärer Abbildungsscharen charakterisiert. Zusammen mit einer Klassifikation der Bahntangentengesamtheit führt dies zu einer vollständigen Aufzählung der projektiven Bewegungsflächen $\mathscr{C}(u,t)$ mit ebenen u-Kurven. Wichtige Hilfsmittel sind die Normalformen für die infinitesimale Kollineation. Sie werden herangezogen, um angepaßte Bezugssysteme zu konstruieren, integralfreie Darstellungen für spezielle Bewegungsklassen anzugeben und weitergehende geometrische Aufschlüsse zu gewinnen. Teilweise werden hierdurch Resultate von BARNER und ÖZKAN über Zentralbewegungen verallgemeinert. Als Anwendungen resultieren Beziehungen zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen und der Kegelschnittsflächen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

FRANK, H.: "Projektive Kinematik in der Ebene"

Es wird eine selbständige projektive Kinematik in der Ebene entwickelt. Dazu werden einparametrige Scharen projektiver Abbildungen betrachtet, die als projektive Bewegungen bezeichnet werden. Für jede projektive Bewegung läßt sich eine Darstellung derart angeben, daß ihre infinitesimale Abbildung, die jedem Punkte einen Punkt seiner Bahntangente zuordnet, eine von sechs Normalformen im Reellen annimmt. Mit Hilfe der daraus folgenden Typeneinteilung nach Normalformen der infinitesimalen Abbildungen lassen sich Eigenschaften der projektiven Bewegungen in erster und höherer Differentiationsordnung herleiten. Insbesondere ergeben sich Kegelschnittsnetze, die invariant mit der Tangentenkongruenz verbunden sind, und Lagebeziehungen der Wendepunktskurven und der Kurven der Spitzen der Geradenhüllkurven zu den Polbahnen einer Bewegung.

SAUER, R.: "Beiträge zu einer finiten Flächentheorie"

Es gibt Begriffe und Sätze der Flächentheorie, denen "analoge" elementargeometrische Beziehungen an polyedrischen Gebilden (Netze mit Dreiecks- oder Vierecksmaschen) gegenübergestellt werden können, und solche, die sich erst beim Grenzübergang von solchen Gebilden zu "hinreichend glatten" Flächen ergeben. Die Begriffe und Sätze der ersten Art fassen wir zusammen unter der Bezeichnung "Finite Flächentheorie". Beispiele: geodätische Krümmung; Gauss-sches Krümmungsmaß und Integralsatz von Gauss und Bonnet; Verbiegungen von Flächen, bei denen ein Kurvennetz

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

konjugiert bleibt; infinitesimale Verbiegungen von Flächen; Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes. Ein Buch über "Finite Flächentheorie" befindet sich in Vorbereitung. Der Vortrag soll eine Vorschau auf dieses Buch geben.

DAVIES, E.T.: "Geometry of the Tangent Bundle"

Some relations are given between structures defined on a differentiable manifold M and corresponding structures which can be induced on the tangent bundle TM. There exists a natural derivational mapping of the algebra of tensor fields of M into the algebra of tensor fields of TM. This is called the complete lift. Another mapping called the vertical lift is used in the definition of the complete lift. If ∇ is a connection defined in M a third lift can be defined depending on the connection. Corresponding to the connection in M there are lifted connections in TM. By regarding the tangent bundle as a particular case of a manifold in which are defined two complementary distributions, one of which is integrable (the fibres), further relations between M and TM can be deduced.

MATSUMOTO, M.: "On associated non-linear connections"

Professor Dr. W. Barthel porposed the abstract definition of homogeneous non-linear connection N in the tangent bundle T(M), and developed the beautiful theory of holonomy group of N. The purpose of this address is to give a notion of an associated non-linear connection N^a, by using a notion of an F-Connection Γ_F in the bundle of linear frame L(M). The F-connection Γ_F

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

is a set of distributions Γ_f, $f \in F$, on $L(M)$, corresponding to every elements f of a real vector space F, and satisfying certain conditions which are similar to the one satisfied by an ordinary connection. Then, N^a will be obtained from Γ_F by the way, by means of which a linear connection on $T(M)$ is derived from the one on $L(M)$.

GODEAUX, L.: "Variétés algébriques non rationalles dépourvues de variété canonique"

On considère une variété algébrique de S_{2n+1} intersection de n+1 hyperquadriques et on suppose qu'elle est transformée en soi par une homographie biaxiale harmonique H dont les axes ont n-2 et n+2 dimensions. H détermine sur la variété une involution ayant une courbe de pointe unis. On démontre que si n est pair, une variété image de l'involution est privée de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

BURAU, W.: "Über Hyperflächen mit projektiver Erzeugung in koordinatenfreier Behandlung"

In der klassischen Literatur sind folgende projektive Erzeugungen bekannt: Die der Kegelschnitte und Quadriken nach Steiner, verschiedene Erzeugungen von Kurven und Flächen 3.Grades nach Graßmann, Schroeter, August usw., ferner gibt es auch Erzeugungen rationaler Normkurven. Überall handelt es sich darum, Gebilde höheren Grades durch solche niederen Grades aufzubauen. Nun ist eine Hyperfläche h-ten Grades f^h_{n-1} des X_n als hyperebener Schnitt P_{m-1}

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

der Veroneseschen V_n^h des P_m definiert. Bettet man nun diese V_n^h als Diagonalmenge in einer Produktmannigfaltigkeit $V_n^a \times V_n^b$ $(a+b=h)$ ein, so erfaßt man durch gewisse Hyperebenen in dem Raum der Produktmenge eine f_{n-1}^h mitsamt einer projektiven Erzeugung derselben durch Büschel von Hyperflächen a-ten und b-ten Grades. Dies soll an einfachen Beispielen erläutert werden.

HEIL, E.: "Über Scheitelsätze"

Der 4-Scheitelsatz ist bekanntlich ein Satz der Möbiusgeometrie. Zeichnet man einen geeigneten Punkt einer geschlossenen Kurve als unendlich-fernen Punkt aus, so kann man die Kurve als Kurve der endlichen euklidischen Ebene relativ einfach auf Scheitel untersuchen. So gelingen Beweise des 4- und 2n-Scheitelsatzes, und auch für Kurven mit bis zu 3 Doppelpunkten kann man je nach dem Typ der Kurve als Mindestanzahl der Scheitel 2,4 oder 6 angeben, z.B. hat die ebene Kleeblattschlinge mindestens 6 Scheitel.

KUIPER, N.H.: "Hilbert manifolds"

A separable paracompact smooth manifold X modelled on Hilbert space H can have the following properties:

O: X is diffeomorphic to an open set in H

M: There exists a nondegenerate C^∞-function $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, with minimum, which fullfills condition C of Smale-Palais with respect to some complete Riemannian metric

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

P: X is diffeomorphic with $X \times H$ (X is then called Palais-stable).

Theorem I. $\begin{cases} O \Longrightarrow M & \text{(Nicole Moulis)} \\ M \Longrightarrow P \Longrightarrow O & \text{(Kuiper, Burghelea)} \end{cases}$

Theorem II. If X and Y are homotopy equivalent open subsets of H, then they are diffeomorphic.

KLINGENBERG, W.: "Kurze geschlossene Geodätische"

Sei M eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit, einfach zusammenhängend und so, daß die riemannsche **Krümmung** K der Bedingung

$$\frac{1}{4} < K \leq 1$$

genügt. Man weiß, daß M dann homöomorph zur Sphäre ist. Wir zeigen, daß es auf M wenigstens n einfach geschlossene Geodätische mit einer Länge $< 4\pi$ und $\geq 2\pi$ gibt. Falls $n-1 \neq 2^h$, so gibt es sogar $(n+1)$ solche. Wenn man die Werte der Krümmung etwas einschränkt, dann gibt es im allgemeinen sogar $n(n+1)/2$ solche "kurzen" geschlossenen Geodätischen, aber nicht notwendig mehr, wie geeignete Beispiele von Ellipsoiden zeigen.

KARCHER, H.: "Über die Länge der Fallinien der Energiefunktion im Raum $H_1(S_1,M)$.

$H_1(S_1,M)$ ist die Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeit der geschlossenen absolut stetigen Kurven auf M mit quadratintegrierbarer Ableitung. Die kritischen Punkte der Energiefunktion $E(f) = \int(\dot{f},\dot{f})dt$ sind die geschlossenen Geodätischen auf M (vgl. den Vortrag von

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Prof. Klingenberg). Im Fall $M = R^N$ können die Fallinien von E explizit angegeben werden:

$$\varphi(s)(t) = \sum \exp(-4\pi^2 n^2 s/(1+4\pi^2 n^2))(b_n \cos 2\pi nt + c_n \sin 2\pi nt)$$

Allgemeiner, falls der Krümmungstensor in einer Röhre um eine geschlossene Geodätische g verschwindet, hängt die explizite Lösung noch von der Parallelverschiebung einmal um g herum ab. In beiden Fällen kann die Länge der Fallinie berechnet und einfach nach oben abgeschätzt werden. Falls M kompakt ist, so gibt es eine Zahl $e > 0$, so daß in $E^{-1}([0,e])$ gilt $\|\text{grad } E(f)\|^2 \geq \frac{1}{5} E(f)$. Dies hat für die Länge der Fallinien $L^2(\varphi) \leq 20E(f)$ zur Folge. Daher ist $E^{-1}(0)$ Deformationsretrakt von $E^{-1}([0,e])$.

DOMBROWSKI, P.: "Absolute und relative Krümmungsgrößen algebraischer (singularitätenfreier) Untermannigfaltigkeiten in $P^m(\mathbb{C})$, $(m \in \{2,3,\ldots\})$.

(i) Gegeben seien k homogene Polynome $\psi_1, \ldots, \psi_k$ des $\mathbb{C}^{m+1}$, $(1 \leq k < m)$. Sei $G := \{p \in \mathbb{C}_o^{m+1} := \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{o\} \mid d_p\psi_1, \ldots, d_p\psi_k$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig$\} \neq \emptyset$ und $M := \{p \in G \mid \psi_1(p) = \ldots = \psi_k(p) = o\}$, also M $(m+1-k)$-$\dim_{\mathbb{C}}$ holomorphe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}_o^{m+1}$. Ist $\pi : \mathbb{C}_o^{m+1} \longrightarrow P^m(\mathbb{C})$ die kanonische Projektion, so ist bekanntlich $\tilde{M} := \pi(M)$ eine holomorphe $(m-k)$-$\dim_{\mathbb{C}}$ Untermannigfaltigkeit von $P^m(\mathbb{C})$, (nämlich der singularitätenfreie Teil der "durch $\psi_1 = \ldots = \psi_m = o$ definierten" algebraischen Varietät). Ferner gilt $M = \pi^{-1}(\tilde{M})$, d.h. M ist der "Kegel über $\tilde{M}$" in $\mathbb{C}_o^{m+1}$.

(ii) $P^m(\mathbb{C})$ ist bezüglich des Realteils $\mathcal{R}e\langle\ldots,\ldots\rangle^F$ der (hermiteschen) FUBINI-STUDY-Metrik $\langle\ldots,\ldots\rangle^F$ auf $P^m(\mathbb{C})$ eine $2m$-$\dim_{\mathbb{R}}$ riemannsche Mannigfaltigkeit, $\mathbb{C}^{m+1}$ aber bezüglich des Realteils $\mathcal{R}e\langle\ldots,\ldots\rangle$ der kanonischen hermiteschen Metrik auf $\mathbb{C}^{m+1}$,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

$(\langle v,w\rangle = \sum_{j=0}^{m} v_j\bar{w}_j)$, eine $2(m+1)$-$\dim_{\mathbb{R}}$ riemannsche Mannigfaltigkeit.

(iii) Es wurde gezeigt, daß die zweite Fundamentalform $\tilde{l}$, die riemannsche Schnittkrümmung $\tilde{\varkappa}$ und holomorphe Schnittkrümmung $\tilde{\varkappa}_{hol}$ der riemannschen Untermannigfaltigkeit $\tilde{M}$ von $(P^m(\mathbb{C}), \mathcal{R}e\langle\ldots,\ldots\rangle^F)$, (vgl. (i),(ii)), bzw. aus den entsprechenden Funktionen l, $\varkappa$, $\varkappa_{hol}$ der riemannschen Untermannigfaltigkeit M von $(\mathbb{C}^{m+1}, \mathcal{R}e\langle\ldots,\ldots\rangle)$, (vgl. (i),(ii)), berechnet werden können. Letztere Funktionen $l, \varkappa, \varkappa_{hol}$ können aber (vgl. Vortrag: Geometrie-Tagung in Oberwolfach, 1966) mittels erster und zweiter partieller Ableitungen von $\Psi_1,\ldots,\Psi_k$ explizit berechnet werden. Somit erhält man explizite Formeln auch für die zweite Fundamentalform $\tilde{l}$, die riemannsche und holomorphe Schnittkrümmung $\tilde{\varkappa}$ und $\tilde{\varkappa}_{hol}$ der riemannschen Untermannigfaltigkeit $\tilde{M}$ von $(P^m(\mathbb{C}), \mathcal{R}e\langle\ldots,\ldots\rangle^F)$ mittels erster und zweiter partieller Ableitungen der $\tilde{M}$ definierenden homogenen Polynome $\Psi_1,\ldots,\Psi_k$.

Als Beispiel sei das Resultat über die holomorphe Schnittkrümmung $\varkappa_{hol}$ angeführt: Sei $\tilde{p} \in P^m(\mathbb{C})$ und $\tilde{\sigma}$ ein 1-$\dim_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $T_{\tilde{p}}(P^m(\mathbb{C}))$. Wähle dann, (dies ist stets möglich), $p \in \mathbb{C}^{m+1}$ und $v \in T_p\mathbb{C}^{m+1}$ mit $\pi(p) = \tilde{p}$, $\pi_*(v) \in \sigma$, $\langle p,p\rangle = \langle v,v\rangle = 1$ und $\langle p,v\rangle = 0$. Bezeichnet $(\Psi_{\iota\varkappa}(p))_{\iota,\varkappa=1,\ldots,k}$ die Inverse der positiv definiten hermiteschen Matrix

$$\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial\Psi_\iota}{\partial z_j}\,\overline{\frac{\partial\Psi_\varkappa}{\partial z_j}}(p)\right)_{\iota,\varkappa=1,\ldots,k}, \quad \text{(vgl.(i))},$$

so gilt:

$$\tilde{\varkappa}(\tilde{\sigma}) = 4 - 2\sum_{\iota,\varkappa=1}^{k} \Psi_{\iota\varkappa}(p)\left(\sum_{r,s=0}^{m} \frac{\partial^2\Psi_\iota}{\partial z_r\,\partial z_s}(p)v_rv_s\right)\overline{\left(\sum_{r,s=0}^{m} \frac{\partial^2\Psi_\varkappa}{\partial z_r\,\partial z_s}(p)v_rv_s\right)}$$

$$\leqq 4 .$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

FERUS, D.: "Hyperflächen in 3-dim. elliptischen Raumformen"

Für Immersionen $f: M \longrightarrow \tilde{M}$ der kompakten, zusammenhängenden Fläche M in die dreidimensionale elliptische Raumform $\tilde{M}$ sei $\tau(f) := \frac{1}{2\pi}\int_M |G| \varkappa$, wobei G die Gaußsche Krümmung von f bezeichnet. Es wird gezeigt (vgl. Problem 15 in KUIPER, Der Satz von Gauß-Bonnet.. Jahresberichte der DMV, 69 (1967), 77-88): Ist $M \neq$ Projektive Ebene, Kleinsche Flasche, so gilt:

(i) $\inf\{\tau(f) \mid f: M \longrightarrow \tilde{M} \text{ Immersion}\} = \frac{1}{2}\{|\chi(M)| - \chi(M)\}$

(ii) Das inf wird genau dann angenommen, wenn M mit der durch f induzierten Metrik isometrisch zu einer 2-Sphäre konstanter Krümmung ist.

SCHNEIDER, R.: "Kennzeichnungen der Zentralsymmetrie konvexer Körper"

Für einen konvexen Körper K im euklidischen Raum E^n ($n \geq 3$) sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig mit der Zentralsymmetrie des Körpers K:

1) Es gibt einen Punkt $p \in E^n$ derart, daß jede Hyperebene durch p

a) das Volumen von K halbiert (Verallgemeinerung eines Satzes von Funk) oder

b) die Oberfläche von K halbiert (ein von Grünbaum erwähntes Problem) oder

c) die Totalkrümmung der Randfläche von K halbiert.

2) Jede Schattengrenze (bei Parallelbeleuchtung) von K halbiert die Oberfläche von K (Verallgemeinerung eines Satzes von Kubota).

Diese und verwandte Sätze folgen im wesentlichen aus einem Eindeutigkeitssatz für eine gewisse Integralgleichung: dieser Eindeutigkeitssatz wird in allgemeiner Form (die auch andere, z.T. bekannte, Anwendungen in der Theorie der konvexen Körper gestattet) mit Hilfe von Hyperkugelfunktionen bewiesen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

HAVEL, V.: "Halbkanonische Spezialisierung von begleitenden Bezugssystemen"

Bericht über eine neue Methode der Kanonisierung von begleitenden Bezugssystemen einer Mannigfaltigkeit bezüglich eines Systems von Untermannigfaltigkeiten (welche anholonom sein können).

ŠVEC, A.: "Submanifolds of Klein spaces"

Let $\pi : E \longrightarrow X$ be a C^∞ vector bundle, $J^m(X) \longrightarrow X$ its jet prolongation, $R^k \subset J^k(E)$ a formally integrable differential equation. Let $X_1 \subset X$ be a submanifold and $E_1 = E|X_1$ the restriction of E to X_1. Define the bundle morphism $\eta^m : J^m(E)|X_1 \longrightarrow J^m(E_1)$ as follows: if $p \in J^m(E)|X_1$, $x = \pi(p) \in X_1$, there is a local section s of E such that $j^m_x(s) = p$; set $\eta^m = j^m_x(s|X_1)$. Define $S^{k+l}_{(k+l)} = \eta^{k+l}(R^{k+l})$, R^{k+l} being the l-th prolongation of R^k; $l \geq 0$.

$S^{k+l}_{(k+l)}$ does not need to be a differential equation, nevertheless it is possible to define its prolongations $S^{k+l+p}_{(k+l)}$, $p \geq 0$, in a natural way.

Let $y \in X_1$ be a fixed point. A <u>formal solution</u> of R^k at y is the sequence $\{s^q\}$ such that $s^q \in R^q(y)$ and $\pi(s^{q+1}) = s^q$ for each $q = 1,2,\ldots$ A <u>formal initial condition</u> at the point y with respect to X_1 is a sequence $\{r^q\}$ such that $r^q \in J^q(E_1)(y)$ and $\pi(r^{q+1}) = r^q$ for each $q = 1,2,\ldots$ The formal solution $\{s^q\}$ <u>goes through</u> the formal initial condition $\{r^q\}$ if $\eta^q(s^q) = r^q$ for each $q = 1,2,\ldots$ The formal initial condition $\{r^q\}$ is <u>m-admissible</u> if $r^{m+p} \in S^{m+p}_{(m)}(y)$ for each $p \geq 0$.

Theorem. Consider the situation described above. There exists a $k_0 \geq k$ such that through each m-admissible, $m \geq k_0$, formal initial condition at y with respect to X_1 there goes a formal solution of R^k.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Now, let X be a vector space and X a continuous pseudogroup acting on it such that it is given by a linear differential equation R^k on the vector bundle $pr_1: X \times X \longrightarrow X$. Let $X_1 \subset X$ be a submanifold and $f: X_1 \longrightarrow X$ a mapping. f is called a <u>deformation</u> of order m if there is, for each point $x \in X_1$, a mapping $\gamma_x \in \Gamma$ defined on the neighbourhood of x such that $j^m_x(f) = j^m_x(\gamma_x|X_1)$. f is said to be a <u>formal equivalence</u> at the point $y \in X_1$ if there is a sequence $\{s^q: U^q \longrightarrow X\}$ of mappings of the neighbourhoods U^q of y such that $s^q \in \Gamma$, $j^q_y(s^{q+1}) = j^q_y(s^q)$, $j^q_y(f) = j^q_y(s^q|X_1)$.

The preceding theorem yields

Theorem. Consider X, Γ, X_1 and $y \in X_1$ as above. Then there is an integer $k_o \geq k$ with the following property: if $f: X_1 \longrightarrow X$ is a deformation of order $m \geq k_o$ then it is a formal equivalence at the point y.

SIMON, U.: "Einsteinsche Hyperflächen in Riemann-Räumen konstanter Krümmung"

I. Sei M_n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^r, $r \geq 3$, V_{n+1} ein Riemann-Raum konstanter Krümmung K_o, $x: M_n \longrightarrow V_{n+1}$ eine C^r-Immersion; sind (g_{ik}),(B_{ik}) die Tensoren der ersten bzw. zweiten Fundamentalform und ist $e_{jk} = B_j{}^r B_{rk}$ (verallgemeinerte "dritte" Fundamentalform), so gilt für den Ricci-Tensor

$$R_{jk} + (n-1)Rg_{jk} = e[e_{jk} - nH_1B_{jk} + (n-1)H_2g_{jk}] \underset{\text{Def}}{=:} E_{jk}$$

mit $e = \text{sign}\,\|g_{ik}\|$, R = Skalarkrümmung der Metrik, H_r = r-te normierte elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Also gilt:

1. Der Tensor E_{jk} ist eindeutig durch die Metrik bestimmt.
2. $x(M_n)$ Einsteinsche Hyperfläche $\Longleftrightarrow E_{jk} = 0$.

Einfache Folgerungen:

a) Da jeder zweidimensionale Riemannraum Einsteinsch ist, ist für $n = 2$ stets $E_{jk} \equiv 0$.

b) $n > 2$. $x(M_n)$ Einsteinsch $\Longleftrightarrow$ jeder Punkt von $x(M_n)$ ist Nabel.

II. Für $n > 2$ gibt es noch eine allgemeinere Relation zwischen den 3 Grundformen

$$\alpha\, g_{ik} + \beta\, B_{ik} + \gamma\, e_{ik} = 0$$

mit $\alpha = (n-1)H_2 - H_1 N$, $\beta = -nH_1 + N$, $\gamma = 1$, $N = \frac{n-2}{2}\,\frac{H_3 - H_1 H_2}{H_2 - H_1^{\,2}}$.

Ein nichttriviales Beispiel einer Fläche, die dieser allgemeinen Relation ($N = 0$) genügt:

$x = (\sin u^1 \cos u^2,\ \sin u^1 \sin u^2,\ \cos u^1 \cos u^3,\ \cos u^1)\quad 0 < u^1 < \frac{\pi}{2}$.

III. Untersuchung der Flächen mit $B_{ij\|k} \equiv 0$ $(n \geq 2)$ im E_{n+1}.

Solche Flächen sind entweder

a) Sphären, b) Hyperflächen, deren Hauptkrümmungen in jedem Punkt genau zwei Werte annehmen

$K_{i_1} = \dots = K_{i_p} = \lambda_1 = \text{const} \neq 0,\quad K_{i_{p+1}} = \dots = K_{i_n} = 0$ oder

c) Hyperebenen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

VOSS, K.: "Das Gale-Diagramm symmetrischer Polyeder"

Die Gale-Abbildung Γ ordnet jedem n-tupel von Punkten $(x_1,\ldots,x_n) = X$ eines d-dimensionalen affinen Raumes oder von Vektoren eines q-dimensionalen Vektorraumes $(q = d+1)$ ein n-tupel $\overline{X} = (\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$ von Vektoren in einem Raum U der Dimension $p = n-q$ zu; X und $\overline{X}$ sind dabei nur bis auf lineare Äquivalenz festgelegt. Im Anschluß an einen Vortrag von G.Ewald auf der Geometrie-Tagung 1967 in Oberwolfach wird eine Definition von Γ gegeben, aus der sich die Eigenschaften leicht ablesen lassen, speziell für den Fall, daß X Eckensystem eines konvexen Polyeders ist. Γ kann als Abbildung $G_{n,q} \longrightarrow G_{n,p}$ von Grassmann-Mannigfaltigkeiten aufgefaßt werden. Die Gruppe G affiner Symmetrien von X gestattet eine Darstellung in U, bei der die $\overline{x}_i$ analog wie die x_i permutiert werden. Die Darstellung braucht aber nicht treu zu sein. Im Falle $G = \mathbb{Z}_2$ werden die Dimensionen der Symmetrieachse und der Spiegelungsrichtungen in U bestimmt.

SCHMITT, K.-A.: "Beziehungen vom Euler-Typus zwischen Quermaß-integralen konvexer Polyeder"

Die <u>Quermaßintegrale</u> $W_o(K)$ einer konvexen Menge K im euklidischen Raum E_d sind rekursiv definiert durch folgende Beziehungen: Im Falle $d = 1$ sei für eine Strecke K der Länge s

$W_o(K) = V(K) = s$, $W_1(K) = \omega_1 = 2$.

Im Falle $d > 1$ sei für konvexes K: $W_o(K) = V(K)$ (Volumen),

$W_\nu(K) = \frac{1}{d\omega_{d-1}} \int W'_{\nu-1}(K,u)du$, $(\nu = 1,\ldots,k)$, wobei $W'_{\nu-1}(k,u)$ das $(\nu-1)$-dimensionale Quermaßintegral der Projektion von K auf die Hyperebene der Normalrichtung u darstellt und das Integral über die (d-1)-Einheitssphäre erstreckt wird. ω_j ist das Volumen der j-dimensionalen Einheitskugel.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

<u>Satz:</u> Ist P ein d-dimensionales konvexes Polyeder und F_i^j $(i = 1,\ldots,f_j(P))$ seine j-dimensionalen Seiten ($j = 0,\ldots,d-1$), so gilt

$$(1 - (-1)^{\nu})W_{\nu}(P) = \sum_{j=d-\nu}^{d-1} (-1)^{j+\nu-d} \sum_{i=1}^{f_j(P)} W_{\nu}(F_i^j).$$

Für $\nu = d$ ist dies die Eulersche Polyedergleichung (bis auf einen konstanten Faktor), und für $\nu = d-1$ wurde sie von G.C. Shephard bewiesen

LENZ, H.: "Zur Euler'schen Charakteristik"

H. Hadwiger hat (Crelle 194, 1955; Math.Z. 1959) eine elementare Einführung der Euler'schen Charakteristik χ in $\mathbb{R}^n$ gegeben. Seine Konstruktion ist auch auf nichtabgeschlossene und (mit einem Korrekturglied) auf unbeschränkte Punktmengen anwendbar. Ist O_d konvex und offen in der d-dimensionalen affinen Hülle, so ist $\chi O_d = (-1)^{d-1}$. Danach ist der Beweis der Euler-Schläfli'schen Formel trivial. Zum Zweck der Fortsetzung auf größere Mengenklassen wird definiert: Ist $\mathcal{C}$ eine Mengenklasse, so bezeichnet Mod $\mathcal{C}$ ["Mengenmodul"] die Klasse aller Mengen X, deren charakteristische Funktion δ_X von den δ_C, $C \in \mathcal{C}$ linear abhängt. Ist $\mathcal{C}$ durchschnittsabgeschlossen, so ist Mod $\mathcal{C}$ ein Mengenkörper. Die Hadwiger'sche Definition ist daher eindeutig fortsetzbar auf den von den konvexen Körpern erzeugten Mengenkörper. Eine universelle Fortsetzung kann nicht translationsinvariant sein.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

BRECHTKEN- MANDERSCHEID, U.: "Zur Differenzierbarkeit von Extremalflächen bei Variationsproblemen mehrfacher Integrale"

E sei eine orientierte Fréchet-Fläche, deren Parameterdarstellung $x: T \longrightarrow R^n$ auf dem Rand ∂T des zur Kreisscheibe homöomorphen Definitionsgebietes T Darstellung einer vorgegebenen Jordan-Kurve ist. Das Variationsproblem lautet

$$J(x,T) = \inf \liminf_{\substack{x_m^i \in C^1 \\ x_m \to x \text{ glm.}}} \int_T F\left(x_m^i(t), \frac{\partial x_m^i}{\partial t^1}, \frac{\partial x_m^i}{\partial t^2}\right) dt^1 dt^2 = \min, \quad i = 1,\dots,n$$

wobei $F(x,X_1,X_2)$ für $x \in G \subset R^n$, $X_1,X_2 \in R^n$ definiert ist, $F(x,X_1,X_2) \geq 0$, wobei "=" $\leftrightarrow$ X_1 und X_2 linear abhängig, $F(x, \lambda_1^\varrho X_\varrho, \lambda_2^\varrho X_\varrho) = \det(\lambda_\sigma^\varrho) F(x,X_1,X_2)$, falls $\det(\lambda_\sigma^\varrho) > 0$, die partiellen Ableitungen nach x^i, X^i existieren, falls $X_1 \wedge X_2 \neq 0$. Weiterhin muß die von F über den Graßmannkegel G_2^n induzierte Funktion $f(x, X_1 \wedge X_2) := F(x,X_1,X_2)$ schwach streng konvex (im Sinne von Busemann-Ewald-Shephard) sein, d.h. streng konvex auf den konvexen Teilmengen des Definitionsbereichs. Für dies Variationsproblem wird gezeigt, daß im Falle $n = 3$ eine ausgezeichnete Extremale in einem gewissen Teilgebiet fast überall eine Tangentialebene besitzt. Bei beliebigem n gilt, daß die Menge der Punkte der Extremalen in dem bestimmten Teilgebiet, deren Tangentialkegel keine Ebene enthält, das Lebesguesche Maß 0 hat.

MARTENSEN, E.: "Zur Dimensionsabhängigkeit der Grundlösungen der Beltramischen Differentialgleichung"

In der Potentialtheorie Riemannscher Räume mit nicht notwendig positiv definiter Metrik spielt die BELTRAMIsche Differentialgleichung

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

die Rolle der Laplaceschen im euklidischen. Seit Hadamard weiß man, daß im Falle gerader Dimension entweder keine oder unendlich viele Grundlösungen von dem im euklidischen auftretenden Typ existieren, während eine solche Lösung für ungerade Dimensionen eindeutig bestimmt ist. Die hierzu bekannten Beweise, die wesentlich auf dem geodätischen Abstand beruhen, sind recht kompliziert und langwierig. Dem wird ein kurzer, elementarer Eindeutigkeitsbeweis für den Fall ungerader Dimension gegenübergestellt, der zugleich die grundsätzliche Dimensionsabhängigkeit des Problems erkennen läßt.

LINGENBERG, R.: "Zum Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie"

Der Hauptsatz lautet: Sind $\Pi(V,K)$ und $\Pi(V',K')$ projektive Koordinatenräume über Rechtsvektorräumen (V,K) bzw. (V',K') über Schiefkörpern K bzw. K', so gilt: $\Pi(V,K)$ und $\Pi(V',K')$ sind genau dann isomorph, wenn (V,K) und (V',K') isomorph sind. Jeder Isomorphismus von (V,K) auf (V',K') induziert einen Isomorphismus (d.h. eine Kollineation) von $\Pi(V,K)$ auf $\Pi(V',K')$. Jede Kollineation von $\Pi(V,K)$ auf $\Pi(V',K')$ wird durch einen Isomorphismus von (V,K) auf (V',K') induziert.

Es wird über eine Beweisvariante berichtet, die den Gedanken von Schwan-Artin zur Einführung von Koordinaten in projektiven Räumen konsequent fortsetzt und Verallgemeinerungen von Lüneburg verwendet.

K.Doden, Kiel

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©