MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 3/1969

SPEZIELLE FUNKTIONEN

16.2. bis 22.2.1969

Die erste und bisher letzte Tagung über Spezielle Funktionen ist in Oberwolfach 1959 veranstaltet worden. Leider ist sie trotz mancher Wünsche und Anregungen nicht der Beginn einer Reihe von Tagungen zu diesem Thema geworden.
In Köln haben sich nun um die Herren C. Meyer und F.W. Schäfke Arbeitskreise gebildet, in denen einerseits über spezielle Funktionen der Zahlentheorie und andererseits über Funktionen der mathematischen Physik gearbeitet wird. So lag der Gedanke nahe, die in den vergangenen Jahren veranstaltete Arbeitstagung Kölner Seminare in eine Fachtagung über Spezielle Funktionen umzuwandeln.
In diesem Rahmen fand die Tagung nun zum erstenmal statt. Leider konnte nur recht kurzfristig eingeladen werden. So konnten diesmal manche Interessenten, insbesondere aus dem Auslande, aus Termingründen nicht teilnehmen. Dennoch hat die Tagung ein erfreuliches Interesse gefunden und aufs neue deutlich gemacht, eine wie enge Verbindung in der Tat zwischen den mannigfachen Problemen der Zahlentheorie und den höheren speziellen Funktionen besteht. Es ist ja oft überraschend zu sehen, wie die anfangs rein arithmetischen Probleme ihre endgültige Erledigung durch Heranziehung aller analytischen Hilfsmittel, insbesondere der speziellen Funktionen finden. Aus diesen Gründen wird daran gedacht, diese Verbindung im Rahmen einer Tagung auch in den kommenden Jahren geeignet auszubauen und fortzuführen.
Es waren 37 Teilnehmer, davon 6 aus dem Auslande (Grossbritannien, Niederlande, Österreich, Türkei). Es wurden 19 zum Teil ausführliche Vorträge gehalten, und zwar 8 aus dem Themenkreise der speziellen Funktionen der Zahlentheorie und 11 aus dem

Gebiete der Funktionen der mathematischen Physik.
An arithmetisch-analytischen Themen wurden u.a. behandelt.
Die Werte von Zeta- und $\mathcal{L}$-Funktionen reell-quadratischer Zahlkörper für natürliche Argumente im Zusammenhang mit dem Transformationsverhalten Lambertscher Reihen bei Modulsubstitutionen. Verallgemeinerungen der Dedekindschen η-Funktion mit Anwendungen auf Integralperioden und Darstellungen der Modulgruppe. Satz von Heegner-Stark über einklassige imaginär-quadratische Zahlkörper im Zusammenhang mit der Schlaeflischen Modulfunktion und diophantische Gleichungen vom Geschlecht 1. Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen - Entwicklungskoeffizienten der Cotangente - auf imaginärquadratische Zahlkörper, als Entwicklungskoeffizienten der (normierten) Weierstrass'schen $\wp$-Funktion (Satz von Staudt und Clausen) nebst arithmetischen Anwendungen. Asymptotische Untersuchungen von individuellen Funktionen grosser Zahlen mittels Sattelpunktintegration. Ungleichungen für elliptische Funktionen und Integrale mit Anwendungen auf Turánsche Folgen und das arithmetisch-geometrische Mittel.

Für das Gebiet der Funktionen der mathematischen Physik standen im Vordergrund des Interesses Vorträge über die mathematischen Grundlagen, insbesondere eine algebraische Theorie der Separation, Methoden der Funktionalanalysis und der Theorie der Eigenwertprobleme, sowie die Fortentwicklung der Theorie der höheren speziellen Funktionen.

Teilnehmer:

F.M. Arscott, Surrey
G. Bach, Braunschweig
K. Barner, Karlsruhe
R. Bodendieck, Köln
B.L.J. Braaksma, Delft
K. Burde, Braunschweig
U. Dieter, Karlsruhe

Frl.F. Fehér, Köln
P. Flor, Wien
W. Forst, Köln
U. Halbritter, Köln
F. Halter-Koch, Köln
J. Kallies, Köln
K.-H. Kann, Köln

L. Koschmieder, Bonora-Jamir
H. Lemeij, Delft
H. Lang, Köln
R. Mennicken, Köln
C. Meyer, Köln
G. Müller, Köln
W. Neuhaus, Clausthal
H. Niemeyer, Hamburg
H.D. Niessen, Köln
K.J. Plewe, Köln
A. Sattler, Köln
F.W. Schäfke, Köln
R. Schertz, Köln
D. Schmidt, Köln
A. Schneider, Köln
B. Schoeneberg, Hamburg
A. Schönhage, Köln
St. Schottlaender, Clausthal
B.D. Sleeman, Dundee
H.S.V. de Snoo, Delft
H.-J. Stender, Köln
H. Wegener, Köln
M. Ziegler, Clausthal

Vortragsauszüge:

F.M. Arscott : Über Lamésche Funktionen

Man betrachtet ein orthogonales 3-dimensionales Koordinatensystem, bei dem die Normalflächen Kugeln und elliptische Kegel sind. Bei Separation der Laplace'schen Gleichung in diesem System erhält man die „Lamésche Differentialgleichung"

$$w''(z) + (h - \nu(\nu+1)\mathrm{sn}^2(z,k))w(z) = 0 .$$

Mit Hilfe dieser Koordinaten wird das aerodynamische Problem des sogenannten "Deltaflügels" behandelt. Hauptaufgabe ist die Bestimmung des Exponenten ν für die Entwicklung in der Umgebung der Spitze. Dazu ist eine Lösung der Laméschen Gleichung zu ermitteln, die die Randbedingungen $w(-k) = w(k) = w(k + 2ik') = 0$ erfüllt. Zu diesem Zweck konstruiert man eine Störungsreihe in $q = e^{-\pi K/K'}$, die sehr rasch konvergiert. Hiermit erhält man eine algebraische Gleichung für ν, die leicht lösbar ist und eine Näherung für ν liefert.

K. Barner: <u>Die Werte der Strahlklassen - L-Funktionen reell-quadratischer Zahlkörper für natürliches Argument</u>

<u>Satz:</u> Sei k ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante d. Sei χ ein eigentlicher Strahlklassencharakter zum Führer $\mathfrak{f}$ und $L(\chi,s)$ die zugehörige L-Reihe. $E_{\mathfrak{f}}^{+}$ bezeichne die Gruppe der total-positiven Einheiten $\equiv 1(\mathfrak{f})$ in k und $\chi((\vartheta)) = \chi(\vartheta)w(\vartheta)$ die kanonische Zerlegung des Idealklassencharakters $\chi(\mathfrak{a})$ in einen Restklassencharakter $\chi(\vartheta)$ mod $\mathfrak{f}$ und einen Vorzeichencharakter $w(\vartheta)$. Sei A eine Strahlklasse aus der Strahlklassengruppe $\mathfrak{R}_{\mathfrak{f}}$ nach $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus A und $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{d}$ die Differente von k bezeichnet. Dann ist vermöge

$$\psi(A,w,s) = \psi(\mathfrak{a},w,s) = N(\mathfrak{t})^{s} \sideset{}{'}\sum_{\substack{\vartheta\,\in\,\mathfrak{t}\\ \vartheta \bmod^{\times} E_{\mathfrak{f}}^{+}}} \frac{w(\vartheta)e^{2\pi i S(\vartheta)}}{|N(\vartheta)|^{s}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

eine analytische Strahklasseninvariante erklärt, welche mit $L(\chi,s)$ im Zusammenhang

$$L(\chi,s) = \frac{1}{4T(\chi)} \sum_{A\,\in\,\mathfrak{R}_{\mathfrak{f}}} \bar{\chi}(A)\,\psi(A,w,s)$$

steht, wo $T(\chi)$ eine nur von χ abhängige Gaußsche Summe bezeichnet. Hat nun $w(\vartheta)$ die spezielle Gestalt

$$w_{g}(\vartheta) = (N(\vartheta)/|N(\vartheta)|)^{g} \qquad (g = 0,1),$$

und ist $s > 1$ eine natürliche Zahl mit $s \equiv g (\mathrm{mod}\ 2)$, so gilt

$$\psi(A,w_{g},s) = \frac{(2\pi)^{2s}N(\mathfrak{b})^{s-1}}{(2s)!\, d^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{m=0}^{2s} (-1)^{m}\binom{2s}{m} S_{2s}^{(m)}(\delta,\gamma,u,v)\,.$$

$$\sum_{\mu=0}^{s-1} \binom{m-1}{\mu}\binom{2s-1-m}{s-1-\mu} S(\varepsilon_{\mathfrak{f}}^{2\mu+1-m})\,.$$

Darin ist $\mathfrak{t} = [\varrho_1, \varrho_2]$, $(\varrho_1) = \mathfrak{b}\mathfrak{t}$, $u = S(\varrho_1)$, $v = S(\varrho_2)$, $E_{\mathfrak{f}}^{+} = \{\varepsilon_{\mathfrak{f}}\}$ und

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{\mathfrak{f}}^{-1}\varrho_1\\ \varepsilon_{\mathfrak{f}}^{-1}\varrho_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varrho_1\\ \varrho_2\end{pmatrix}, \quad S_{2s}^{(m)}(\delta,\gamma,u,v) = \sum_{\mu \bmod \gamma} P_{m}\left(\delta\frac{\mu+u}{\gamma} - v\right)P_{2s-m}\left(\frac{\mu+u}{\gamma}\right),$$

$P_{2s}(x) = B_{2s}(x - [x])$, $B_{n}(x)$ n-tes Bernoullisches Polynom.

B.L.J. Braaksma : Umkehrsätze für gewisse Integraltransformationen

Man betrachtet die Differentialgleichung

$$y''(x) - \{\lambda^2 + q(x)\}y(x) = 0$$

worin $q(x)$ stetig und $q(x)-a \in L(0,\infty)$, $q(x)-b \in L(-\infty,0)$ ist. Man konstruiert zwei Lösungen $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$, die durch die folgenden Bedingungen

$$y_1(x,\lambda)\exp\sqrt{\lambda^2+a}\,x \to 1, \frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda)\exp\sqrt{\lambda^2+a}\,x\} \to 0 \quad \text{für}$$
$$x \to \infty, \operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2+a} \geq 0$$
$$y_2(x,\lambda)\exp-\sqrt{\lambda^2+b}\,x \to 1, \frac{d}{dx}\{y_2(x,\lambda)\exp-\sqrt{\lambda^2+b}\,x\} \to 0 \quad \text{für}$$
$$x \to -\infty, \operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2+b} \geq 0$$

charakterisiert sind.

Dann gilt das folgende Umkehrtheorem :

$$\int_{\lambda_1-i\infty}^{\lambda_1+i\infty} d\lambda \frac{\lambda}{W(\lambda)} y_2(x_0,\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)y_1(t,\lambda)dt = \frac{\pi i}{2}\{f(x_0-0) + f(x_0+0)\},$$
$$\int_{\lambda_1-i\infty}^{\lambda_1+i\infty} d\lambda \frac{\lambda}{W(\lambda)} y_1(x_0,\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)y_2(t,\lambda)dt = \frac{\pi i}{2}\{f(x_0-0) + f(x_0+0)\},$$

worin $W(\lambda)$ die Wronskische Determinante von $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ bezeichnet und $f(t)$ gewissen L_1-Bedingungen genügt. Beispiele für hypergeometrische Funktionen werden angegeben.

F. Fehér : Separation der zweidimensionalen Schwingungsgleichung

Mit Hilfe des von Dr. Niessen angegenen Separierbarkeitskriteriums (Darstellbarkeit der Koeffizienten als Stächeldeterminanten) wurde gezeigt, dass der Operator $L: = f\,(\Delta + k^2)$ (mit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} - \{0\}$ beliebig) separierbar ist genau dann, wenn für den (als definit vorausgesetzten) Fundamentaltensor gilt

$\exists_{i=1}^{2} A_i$ (Funktionen von $x^i, A_i > 0$) :

$$g_{12} = 0 \wedge g_{11}A_1 = g_{22}A_2 \wedge \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2}(A_1 k^2 g_{11}) = 0 .$$

Die Transformation

(T) $\quad x^i = T_i(y^i)$ mit $T_i' = \sqrt[+]{A_i(T_i)} \quad (i=1,2)$

führte auf die bei Morse-Feshbach auftretende Bedingung

$$g_{12}=0 \wedge g_{11}=g_{22} \wedge \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2}(k^2 g_{11}) = 0 \,. \qquad (S)$$

Diese Bedingung (S) wird erfüllt

1) im Falle $k^2=0$ genau dann, wenn $w:=\xi^1 + i\xi^2$ lokal-holomorphe Funktion von $z=x^1 + ix^2$ (bzw. $\tilde{z}=x^2+ ix^1$) ist; dabei sind ξ^1, ξ^2 kartesische Koordinaten.
2) im Falle $k^2 \neq 0$ genau für kartesische, parabolische, elliptische und Polarkoordinaten.

Daher ist L separierbar genau in den Koordinatensystemen (x^1,x^2), die 1) bzw. 2) erfüllen oder aus solchen durch eine Transformation (T) hervorgehen.

L. Koschmieder : Einige Ungleichungen mit elliptischen Funktionen und Integralen

Vortrag weist auf Ungleichungen der bezeichneten Art im jüngsten Schrifttum hin und beweist kurz eine davon. Er sucht dann das Vorzeichen zweireihiger aus elliptischen Funktionen gebildeter Determinanten, z.B.-in Gould's Verallgemeinerung Hankelcher Determinanten - bei natürlichen m,p,q und beliebigem x

$$\sigma(m,p,q;x) = \mathrm{sn}\, mx\; \mathrm{sn}(m+p+q)x - \mathrm{sn}(m+p)x\; \mathrm{sn}(m+q)x$$

und findet es zu -sgn (snpx snqx), unabhängig von m. (Ähnlich, wenn sn durch cn, - aber nicht, wenn sn durch dn ersetzt wird.) Anwendung auf die Sonderwerte: q=p; p=q=1 (Hankelsche $\mathcal{H}_m$); p=1, q=2 (aufsteigende) Determinante $\mathcal{A}_m$. Es wird gezeigt, daß die Moduln der Landenschen Transformation eine Turánsche Folge ($\mathcal{H}_m < 0$) und eine Forsythesche Folge ($\mathcal{A}_m < 0$) bilden. Dagegen erweisen sich die Hankelschen Determinanten der elliptischen Integrale erster Gattung als positiv.

H. Lang: Kummersche Kongruenzen im Gebiet der komplexen Multiplikation

Normiert man die Eisensteinschen Reihen

$$G_n(\omega_1,\omega_2) = \sideset{}{'}\sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} (n_1\omega_1+n_2\omega_2)^{-2n} \quad (n \geqq 2, \omega_1, \omega_2 \text{ komplex, } \mathrm{Im}(\tfrac{\omega_2}{\omega_1}) > 0),$$

die im wesentlichen die Entwicklungskoeffizienten der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2 liefern, mit einer passenden Potenz der Diskriminante

$$\Delta(\omega_1,\omega_2)= g_2^3(\omega_1,\omega_2)-27g_3^2(\omega_1,\omega_2)=(60G_2(\omega_1,\omega_2))^3-27(140G_3(\omega_1,\omega_2))^2$$

und einem Zahlfaktor, so erweisen sich die so normierten Entwicklungskoeffizienten

$$C_n(\omega) = \frac{(2n)!}{\sqrt[6]{\Delta(\omega_1,\omega_2)^n}} G_n(\omega_1,\omega_2)$$

als nur vom Periodenquotienten $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$ abhängig. Diese normierten Entwicklungskoeffizienten $C_n(\omega)$ werden für singuläre Moduln α aus einem imaginär-quadratischen Zahlkörper algebraische Zahlen, die analoge arithmetische Eigenschaften wie die Bernoullischen Zahlen B_n besitzen. Es zeigt sich, daß sich auch die Kummerschen Kongruenzen auf diese Zahlen $C_n(\alpha)$ übertragen lassen.

R. Mennicken : <u>Berechnung der charakteristischen Exponenten der Hill`schen Differentialgleichung</u>

Es wurden für die durch H. von Koch (vgl. etwa Acta Math. <u>10</u>) St. Bobr. (Math.Z.<u>10</u>) und L.W. Cohen (Bull.Amer.Math.Soc.<u>36</u>) untersuchten Determinanten unendlicher Matrizen Abschätzungen für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge der Abschnittsdeterminanten angegeben. Durch Anwendung dieser Abschätzungen wurden entsprechende Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit der die charakteristischen Exponenten der Hill`schen Differentialgleichung charakterisierenden Magnus-Hillschen Determinanten hergeleitet. Diese Abschätzungen zeigen, dass die Magnus-Hill`schen unendlichen Determinanten wesentlich schneller konvergieren als bisher angenommen wurde. Auf Grund dessen ist es sinnvoll, die charakteristischen Exponenten mittels Magnus-Hill`scher Determinanten zu berechnen. Mitgeteilt wurden geeignete Rekursionsverfahren zur Berechnung der endlicher Abschnittsdeterminanten. Diskutiert wurden die unter Benutzung dieser Verfahren in Jülich auf der 360/75 erzielten numerischen Ergebnisse (Literatur : R. Mennicken, On the Convergence of infinite Hill-type determinants, Journal Rat. Mech. Anal. <u>30</u>; R. Mennicken, D. Schmidt, J. Schwindt, On the determinantel method for calculating the characteristic exponents of Hill`s equation, erscheint in Kürze).

C. Meyer : Bemerkungen zum Satz von Heegner-Stark über die einklassigen imaginär-quadratischen Zahlkörper

Es wird eine begriffliche Darlegung der Heegnerschen Ideen gegeben, die dessen Beweis - der neulich von M. Deuring als stichhaltig nachgewiesen ist - nunmehr völlig durchsichtig machen. Es zeigt sich nämlich, dass die wahre Quelle des Originalbeweises eine Klassenzahlformel ist.
Sei dazu Ω ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit der Klassenzahl 1 . Man betrachte den Ringklassenkörper N/Ω vom Führer 2; hierfür ist $[N:\Omega] = 3$. In N ist nun ein einfach-reeller kubischer Zahlkörper K enthalten, um dessen Klassenzahl es sich gerade handelt. Es besteht die Klassenzahlformel

$$E^h = \frac{1}{2}\, f(\sqrt{d})^3 \quad ,$$

wo h die Klassenzahl, $E>1$ die Grundeinheit von K ist und allgemein $f(\tau)$ die Schläflische Modulfunktion bezeichnet, welche für d = Diskr. von Ω zu bilden ist. Demnach ist

$$\pi^3 \cong 2 \quad \text{in } K \text{ mit } \pi = f(\sqrt{d}) \in K\,(!) \, .$$

Für π besteht einerseits die alg. Gleichung $(*)$ $\pi^{24} - g\pi^{16} - 2^8 = 0$ mit $g = -\gamma_2(\frac{3+\sqrt{d}}{2})$ = nat. Zahl (!) , wo $\gamma_2(\tau) = \sqrt[3]{j(\tau)}$.
Andererseits hat man ganze irreduzible Gleichungen für π^4 und π^2 . Elimination zwischen $(*)$ und diesen Gleichungen liefert für Koeff. die diophantische Gleichung vom Geschlecht 1 : $y^2 = 2x(x^3-1)$, die nur endlich viele Lsgn. hat.

W. Neuhaus : Neuere asymptotische Entwicklungen für Spezielle Funktionen

Eine Reihe von Problemstellungen bei speziellen Funktionen, wie z.B. die asymptotische Bestimmung von Nullstellen für grosse Werte, führt darauf, einfache asymptotische Entwicklungen für Funktionen mit einem abhängigen Parameter für einen genügend weiten Gültigkeitsbereich herzuleiten. Für die Besselfunktion

$J_\nu(z)$ leistet dies die asymptotische Entwicklung nach Wicholson-Schöbe-Franz. Es wurden asymptotische Entwicklungen dieses Typs für die Klasse von speziellen Funktionen, die sich durch das Integral $\int_0^k e^{\nu t - f(t)z} dt$ ausdrücken lassen, durch folgende Entwicklung angegeben:

$$\int_0^k e^{\nu t - f(t)z} dt \approx \frac{e^{-a_0 z}}{(a_\varkappa z)^{1/\varkappa}} \left\{ A_\varkappa(q_\varkappa) - \frac{z a_{\lambda_0}}{(a_\varkappa z)^{1/\varkappa}} A_\varkappa^{(\lambda_0)}(q_\varkappa) +- \dots \right\}$$

mit $q_\varkappa = \dfrac{\nu - a_1 z}{(a_\varkappa z)^{1/\varkappa}}$, $A_\varkappa^{(\varrho)}(q_\varkappa) = \int_0^\infty e^{q_\varkappa \sigma - \sigma^\varkappa} \sigma^\varrho d\sigma$,

$f(t) = a_0 + a_1 t + a_\varkappa t^\varkappa + \sum_{m=0}^{\infty} a_{\lambda_m} t^{\lambda_m}$ und den Gültigkeitsbereichen: 1.) $|\arg(\nu - a_1 z)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$,

2.) $(\nu - a_1 z) = \sigma\left(|z|^{\frac{\lambda_0 + 1 - \varkappa}{\lambda_0}}\right)$

sowie der Bedingung $|\arg(a_\varkappa z)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Durch Spezialisierung von $f(t)$ gingen dann eine große Anzahl teilweise bekannter oder neuer asymptotischer Entwicklungen hervor. Als Beispiele werden die Funktionen $\Gamma(\nu, z)$, $\gamma(\nu, z)$, und $J_\nu(z)$ angegeben.

H. Niemeyer : Bernoullische Zahlen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern

Es werden in den neun einklassigen imaginär-quadratischen Körpern Ω Zahlen C_n nach der Methode von Herglotz untersucht, welche den Bernoullischen Zahlen analog sind, und es wird für sie ein dem v. Staudtschen Satz analoger Satz bewiesen. Diese Zahlen sind durch die Gleichung

$$\sum{}' \frac{1}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)^{2n}} = \frac{\sqrt[12]{\Delta(\omega_1,\omega_2)}^{\,2n}}{(2n)\,!} \cdot C_n \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \qquad (n = 2,3,\dots)$$

definiert, wo (ω_1, ω_2) eine gewisse Ganzheitsbasis von Ω bezeichnet und

$$\Delta(\omega_1,\omega_2) = g_2^3(\omega_1,\omega_2) - 27\, g_3^2(\omega_1,\omega_2)$$

gesetzt ist, hierbei sind g_2 und g_3 die Weierstrass`schen Invarianten. Die Summe erstreckt sich über all von Null verschiedenen ganzen Zahlen des Körpers Ω.

H.D. Niessen : Separierbare Operatoren

In Verallgemeinerung der z.B. bei der Schrödinger-Gleichung angewandten Methode der Separation der Variablen wurde eine rein algebraische Definition der Separierbarkeit eines Operators gegeben (vgl. M.Z., 94, p. 328-348) : Ein Operator heisst separierbar, wenn er sich als Determinante von Operatoren darstellen lässt, wobei die j-te Zeile auf Funktionen wirkt, die eine Menge R_j in einen Körper abbilden.
Es wurde gezeigt, dass sich wesentliche Eigenschaften der (üblichen) Methode der Separation der Variablen auf die oben gegebene übertragen. Ferner wurden neue Resultate über den Nullraum separierbarer Operatoren und über die Abgeschlossenheit der Menge der separierbaren Operatoren bzgl. Konvergenz (der Koeffizienten) auf Kompakta erhalten. Ausserdem stellt es sich heraus, dass z.B. die Schrödinger-Gleichung auch in gewissen nicht-orthogonalen Riemann`schen Räumen im obigen Sinne separierbar ist.

A. Sattler : Entwicklungen analytischer Funktionen nach verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen

Aus einem allgemeinen Satz über Biothogonalentwicklungen analytischer Funktionen nach Eigenlösungen linearer Differentialgleichungen (R. Mennicken - A. Sattler, Math. Z. 93,1-36 (1966)) werden einige Sätze über Entwicklungen nach verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen gewonnen.
Es seien $D = z\frac{d}{dz}$, $\mathfrak{R} = \{ z \mid 0 \leqq r_1 < |z| < r_2 \leqq \infty \}$, $\mathfrak{C}$ ein einfach geschlossener Weg um $z = 0$ in $\mathfrak{R}$; $f(z)$ sei eindeutig analytisch in $\mathfrak{R}$. Dann folgt u.a. der

Satz Ist $p < q$ und bq nicht ganz, so gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \, {}_{p+1}F_q (a_p + n; \alpha + \beta n; b_q + n; z),$$

$$c_n = \frac{1}{\alpha+\beta n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} f(z) \left\{ (\alpha E - \beta D) z^{-n} \, {}_{p+1}F_q (1 - a_p - n) - \alpha - \beta n; 1 - b_q - n; (-1)^{p+q} z) \right\} \frac{dz}{z}$$

Die Reihe konvergiert absolut gleichmässig in kompakten Teilmengen von $\mathfrak{X}$. Ist $p = q$, so ist $\mathfrak{X}$ durch ein komplizierteres Gebiet zu ersetzen.

A. Schneider : Singuläre Differentialgleichungssysteme und Umkehrformeln für Integraltransformationen

Für reelle S-hermitesche Differentialgleichungssysteme im Normalfall der Form :

(1) $C_1(x)y'(x) + D_1(x)y(x) = \lambda D_2(x)y(x)$: $Fy = \lambda G y$ $(x \in \{a,b\})$,

die rechtsdefinit und normal sind, werden im Raume

(2) $\mathcal{L} = \{u \mid u \text{ stetig dfb} \wedge \int_a^b (Su)^*(t)(Gu)(t)dt < \infty\}$

selbstadjungierte Resolventen R_λ definiert. Diese besitzen mit Greenschen Matrizen $G(t,x,\lambda)$ eine Darstellung :

(3) $(R_\lambda f)(x) = (f, G(x,\bar{\lambda})) := \int_a^b (SG(t,x,\bar{\lambda}))^*(Gf)(t)dt.$

R_λ erzeugt in einem Teilraum U eines Hilbertraumes H aus Äquivalenzklassen von Funktionen die Resolvente eines selbstadjungierten Operators A. Sei $E(\mu)$ die Spektralschar von A, P der orthogonale Projektor auf U. Für $f \in \mathcal{L}$ erhält man dann aus dem Spektralsatz die auf Kompakta gleichmässig konvergente Entwicklung :

(4) $(R_i f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x,\mu)\, d(R_i f, T(\mu)) + \omega(x)$

mit $D_2(x)\omega(x) \equiv 0$. $Y(x,\mu)$ ist eine Fundamentalmatrix von (1) mit $Y(x_0,\lambda) = E$, $x_0 \in \{a,b\}$ und $T(\mu)$ ist die Matrix

$$T(x,\mu) = \int_0^\mu Y(x,\vartheta)\,d\mathfrak{P}(\vartheta) .$$

Die Spektralverteilungsmatrix $\mathfrak{P}(\vartheta)$ erweist sich als Gramsche Matrix von $(A+iE)(E(\vartheta) - E(0))PG(x_0, \dot{\iota})$. 4) entspricht einem Integraltheorem, das in den klassischen Fällen durch Hintereinanderausführung entsprechender Umkehrformeln erhalten wird.

Dieter Schmidt : Über lineare Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten

Wir betrachten die lin. Dgl. k-ter Ordnung

(*) $\sum_{\varkappa=0}^{k} (\lambda_{-1,\varkappa} e^{ix} + \lambda_{0,\varkappa} + \lambda_{1,\varkappa} e^{-ix})\, y^{(\varkappa)}(x) = 0$

mit $\lambda_{0,k} = 1 + \lambda_{1,k}\lambda_{-1,k}$, $|\lambda_{1,k}\lambda_{-1,k}| < 1$ im Streifen

$$S_0 = \{x \in \mathbb{C} : |\lambda_{1,k}| < |e^{ix}| < |\lambda_{-1,k}|^{-1}\}.$$

Ist $\nu \in \mathbb{C}$ und y $(\neq 0)$ Lsg von (*) in S_0 mit $y(x+2\pi) = e^{2\pi i \nu} \cdot y(x)$, so heisst ν "charakteristischer Exponent der Dgl (*) in S_0 und y zugehörige Floquetsche Lsg". Es wurde eine einfache Charakterisierung der charakteristischen Exponenten in S_0 mittels unendlicher Determinanten vom Poincaré-Perronschen Typs gegeben und eine Methode zur Berechnung des charakteristischen Exponenten mittels dreigliedriger linearer Rekursionen mitgeteilt. (Vgl. hierzu : Untersuchungen üb. lineare Dgl mit sinusförmigen Koeffizienten; R. Mennicken und D. Schmidt, Archive for Rat. Mech. and Analysis, Vol. 31, No. 4, 1968, 304-321).

B. Schoeneberg: Verallgemeinerte Dedekindsche Funktionen.

Die Logarithmen $\psi_{g,h}(\tau;N)$, $(g,h) \not\equiv (0,0)(N)$ der Dedekindschen Funktionen $\eta_{g,h}(\tau;N)$, nämlich der Zähler der Kleinschen Funktionen $\sigma_{g,h}(\tau;N)$, verhalten sich bei Modulsubstitutionen S gemäß $\psi_{g,h}(S\tau) - \psi_{(g,h)S}(\tau) = \pi_{g,h}(S)$. In $\pi_{g,h}(S)$ stecken die verallgemeinerten Dedekindschen Summen. Für $S,T \in \Gamma(N)$ ist $\pi_{g,h}(ST) = \pi_{g,h}(S) + \pi_{g,h}(T)$ und $\frac{12N}{(N,6)} \cdot \pi_{g,h}(S)$ ganzes Vielfaches von $2\pi i$. Die $S \in \Gamma(N)$, für die $r \cdot \pi_{g,h}(S) = 2\pi i \cdot$(ganze Zahl) bei festem rationalen r ist, bilden einen Normalteiler in $\Gamma(N)$, der nicht immer eine Kongruenzgruppe ist. Die $\pi_{g,h}(S)$, $(g,h) \bmod N$, $S \in \Gamma(N)$, erzeugen einen Modul der additiven Charaktere der $\Gamma(N)$ vom Range $\sigma(N) - 1$, wobei $\sigma(N)$ die Anzahl der nach $\Gamma(N)$ inäquivalenten rationalen Punkte ist.

A. Schönhage : Eigenwertkopplung λ, h^2 bei der Mathieuschen Differentialgleichung

$y'' + (\lambda - 2\mu\cos(2x))y = 0$ hat π-periodische Lösungen $y = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{2inx}$ für gewisse Eigenwertpaare (λ, μ) $(\mu = h^2)$.
y ungerade z.B. kann mit $a_0 = 0$ auf $a_1 = 1$ normiert werden.
$g_n(\lambda,\mu) = \frac{(-\mu)^n}{(2^n n!)^2} a_{n+1}$ sind Polynome, die gegen eine ganze Funktion $g(\lambda,\mu)$ konvergieren.
λ, μ ist genau dann Eigenwertpaar, wenn $g(\lambda,\mu) = 0$ ist. Letztere implizite Gleichung hat Auflösungselemente $\lambda_n(\mu) = (2n)^2 + \gamma_{n1}\mu^2 + \gamma_{n2}\mu^4 + \dots$, deren Konvergenzradien ϱ_n und deren Verzweigungsstellen untersucht werden. Numerisch ergeben sich Anhaltspunkte für $\varrho_n \gtrsim c\, n^2$ und regelmässige Struktur der Riemannschen Fläche. Die bisherige Abschätzung $\varrho_n \gtrsim 2n-1$ wird zu $\varrho_n \gtrsim \delta \cdot n \cdot \lg n$ verschärft.

$$\mathcal{D}(\mu) = \prod_{1 \le k < n} \left(\frac{\lambda_n(\mu) - \lambda_k(\mu)}{(2n)^2 - (2k)^2} \right)^2$$ ist nahe $\mu = 0$ konvergent.

Die entsprechend normierten Diskriminanten $D_m(\mu)$ der Polynome $g_m(\lambda,\mu)$ konvergieren gegen $D(\mu)$; genauere Abschätzungen der $D(\mu)$ zeigen, dass $D(\mu)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\leqq \frac{3}{2}$ darstellt. Deren Nullstellen sind die einzig möglichen Verzweigungen der $\lambda_n(\mu)$.

H.-J. Stender: Zur Einheitentheorie in total-reellen kubischen Zahlkörpern.

Sei $f(x) = x(x+d_1)\dots(x+d_{n-1})-d$ mit $d, d_i \in \mathbb{N}, d_{i+1}-d_i \geq 3d$, $d \mid d_i, n \geq 3$.
Sei ω die Nullstelle von $f(x)$ mit $0 < \omega < 1$ und $K = \mathbb{Q}(\omega)$.

Es ist $(K:\mathbb{Q}) = n$ und nach Bernstein $S_\varepsilon = \{\varepsilon_0, \dots \varepsilon_{n-1}\}$ mit

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{für } d = 1 \\ \frac{d}{\omega^n} & \text{für } d > 1 \end{cases}, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} \frac{1}{\omega + d_i} & \text{für } d=1 \\ \frac{d}{(\omega+d_i)^n} & \text{für } d>1 \end{cases} \quad i=1,\dots n-1$$

ein System von n verschiedenen Einheiten in $R = \mathbb{Z}[\omega]$. Jedes (n-1)-gliedrige Teilsystem S'_ε von S_ε ist unabhängig.
Frage: Sind die S'_ε Systeme von Grundeinheiten in R (oder sogar K)?

Es wurde ein neues System $S_\eta = \{\eta_0, \eta_1, \dots \eta_{n-1}\}$ mit $\eta_0 = \varepsilon_0$, $\eta_i = \frac{\omega}{\omega + d_i}$ $(i=1,\dots n-1)$ von Einheiten in R angegeben, für das jedes (n-1)-gliedrige Teilsystem unabhängig ist.

Es gilt:

$d = 1$: $\langle S'_\eta \rangle = \langle S'_\varepsilon \rangle$

$d > 1$: $\langle S'_\varepsilon \rangle$ hat den Index n^{n-2} in $\langle S'_\eta \rangle$; die S'_ε sind also keine Grundeinheitensysteme in R (und K).

<u>$n = 3$:</u> $d = 1$: S'_ε sind Systeme von Grundeinheiten in R

$d > 1$: S'_η sind Systeme von Grundeinheiten in R.

H. Wegner: <u>Über das Maximum bei den Stirlingschen Zahlen 2. Art.</u>

Definition der Stirlingschen Zahlen 2. Art: $\sigma_n^m = \frac{1}{m!} \left[\Delta^m x^n\right]_{x=0}$

Geschlossene Darstellung: $\sigma_n^m = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n$

SATZ: Für $n \geq 3$ gilt: $\sigma_n^0 < \sigma_n^1 < \dots < \sigma_n^{M-1} \leq \sigma_n^M > \sigma_n^{M+1} > \dots \sigma_n^{n-1} > \sigma_n^n$

mit $M = M(n)$, für das gilt $0 \leq M(n+1) - M(n) \leq 1$

Problem: M(n) ist für große n annäherungsweise zu bestimmen.
Zunächst ist $\frac{n+1}{\log(n+1)} < M(n) < \frac{n}{\log n}(1+\varepsilon_0)$ mit $\varepsilon_0 = 0{,}543$ für alle $n \geq 100$.

Man betrachte die Differenz $\sigma_n^m - \sigma_n^{m-1}$ für $n \geq 100$ und für $\frac{n+1}{\log(n+1)} < m < \frac{n}{\log n}(1+\varepsilon_0)$.

Es ist $\sigma_n^m - \sigma_n^{m-1} = \frac{n!}{2\pi i(m-1)!} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{e^z-1}\right) \frac{(e^z-1)^m}{z^{n+1}}\, dz$, $a > 0$ beliebig.

Man wählt a speziell so, daß $\frac{ae^a}{e^a-1} = \frac{n+1}{m}$, d.h. $\frac{d}{dz}\left.\frac{(e^z-1)^m}{z^{n+1}}\right|_{z=a} = 0$, ist.

Dann wird $\sigma_n^m - \sigma_n^{m-1} = A\left[ae^a-(n+1)-a+\frac{a^2}{2}+R(n+1)\right]$, mit $|R(n+1)| \leq \varrho^{(n+1)}$

und $A > 0$. Dann wird

$$\sigma_n^m - \sigma_n^{m-1} \begin{cases} < Af_1(a) \\ > Af_2(a) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} f_1(a) = ae^a-a+\frac{1}{2}a^2-(n+1)+\varrho \\ f_2(a) = ae^a-a+\frac{1}{2}a^2-(n+1)-\varrho \end{array}$$

Sei a_i die eindeutig bestimmte Nullstelle von f_i, die positiv ist, dann gilt

SATZ: $\left[\frac{n+1}{a_2}(1-e^{-a_2})\right] \leq M(n) \leq \left[\frac{n+1}{a_1}(1-e^{-a_1})\right]$

Beispiel: $n = 500$ liefert $\varrho = 13$ und daraus folgt $105 \leq M(n) \leq 107$.

G. Wolf : <u>Additionstheoreme Mathieuscher Funktionen</u>

Betrachten wir die Transformationsgleichung

$$c_0 \cosh(z_0 \pm it_0) = e^{\pm i\alpha} c \cosh(z \pm it) + e^{\pm i\beta}\gamma \cosh(\zeta \pm i\tau)$$

zweier elliptischer Koordinatensysteme für komplexe Parameter und lösen diese in $\mathfrak{G}_a = \{(z,t) \mid \mathrm{Re}\, z \mp \mathrm{Im}\, t > A^\pm\}$ bzw. in $\mathfrak{G}_i = \{(z,t) \mid |\mathrm{Re}\, z \mp \mathrm{Im}\, t| < B^\pm\}$ nach z_0, t_0 auf (mit optimalen $A^\pm$ und $B^\pm$), so erhalten wir in $\mathfrak{G}_a$ das Theorem

$$M_\nu^{(j)}(z_0,h_0)\, me_\nu(t_0;h_0^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_{mn} M_m^{(1)}(\zeta;\hat{h})\, me_m(\tau;\hat{h}^2)\right\} M_{\nu+n}^{(j)}(z;h)\, me_{\nu+n}(t;h^2)$$

mit

$$K_{mn} = K_{mn}(\alpha,h^2;\beta,\hat{h}^2) = \frac{i^{n+m}}{2\pi}\int_0^{2\pi} me_{\nu+n}(-t+\alpha;h^2)\, me_\nu(t;h_0^2)\, me_m(-t+\beta;\hat{h}^2)\,dt$$

bzw. in $\mathfrak{G}_i$ unter der Voraussetzung

$$\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\left\{\min_{s\in[-1,+1]}\left|e^{\pm i\beta}\gamma\cosh(\zeta \pm i\tau + i\varphi) - e^{\pm i\alpha} c s\right|\right\} > |c_0|$$

$$M_\nu^{(j)}(z_0,h_0)\, me_\nu(t_0,h_0^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_{mn} M_{\nu+m}^{(j)}(\zeta,\hat{h})\, me_{\nu+m}(\tau;\hat{h}^2)\right\} M_n^{(1)}(z,h)\, me_n(t;h^2)$$

mit

$$L_{mn} = K_{nm}(\beta,\hat{h}^2,\alpha,h^2)$$

$(j=1,2,3,4;\ h_0 = \frac{1}{2}kc_0,\ h = \frac{1}{2}kc,\ \hat{h} = \frac{1}{2}k\gamma)$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R.Mennicken (Köln)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft