MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 6 /1969

Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik

9.3. bis 15.3.1969

Diese Tagung findet etwa einmal im Jahr statt. Sie stand diesmal unter der Leitung von Professor Dr. W. Vogel. Die große Zahl der Teilnehmer und Vorträge zeigt das große und noch wachsende Interesse an diesem Gebiet der Mathematik. Die Auswahl der Themen bekundet das hohe Niveau, auf dem sich die Wahrscheinlichkeitstheorie und die mathematische Statistik in Deutschland wieder bewegt, wohingegen in den Anwendungen der angelsächsische Standard wohl noch allein führend ist.

Die Zahl der Teilnehmer betrug 58; von den 21 ausländischen Gästen kamen 8 aus Ländern des Ostblocks. Es wurden 32 Vorträge gehalten. Sie entfielen auf folgende Gebiete: Axiomatische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, Maßtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Stochastische Prozesse, Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Physik, Technik und Oekonometrie, Statistik, wobei besonders die Testtheorie im Mittelpunkt des Interesses stand und Informationstheorie.

Teilnehmer:

K. Abt, Arlesheim (Schweiz)
E. Sparre Andersen, Kopenhagen
L. Arnold, Stuttgart
U. Augustin, Erlangen
Ch. Bandelow, Bochum
V. Baumann, Köln

H.H. Bock, Freiburg
R. Borges, Gießen
K. Behnen, Münster
St. L. Braun, Sheffield
L.C.A. Corsten, Wageningen (Holland)
U. Dieter, Karlsruhe
W. Eberl, Wien
W. Eberl, Düsseldorf
F. Eicker, Düsseldorf
G. Elfving, Helsinki
J. Fabius, Leiden
F. Ferschl, Bonn
W. Fieger, Karlsruhe
K.-W. Gaede, Darmstadt
P. Gänßler, Köln
F. Gebhardt, Darmstadt
F. Göbel, Enschede (Holland)
J. Hajek, Prag
O. Hans, Prag
F. Hering, Bonn
H. Heyer, Erlangen
P. Huber, Zürich
H.P. Kinder, München
H. Klinger, Düsseldorf
H. Kloß, Karlsruhe
Z. Koutsky, Prag
O. Krafft, Karlsruhe
J. Krauth, Hagen
Lehn, Karlsruhe
V. Mammitsch, München
Gh. Mihoc, Bukarest
D. Morgenstern, Freiburg
W. Piesch, Tübingen
D. Plachky, Münster
O. Pospisil, Prag
T. Postelnicu, Bukarest
V.M. Postelnicu, Bukarest

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Rödder, Aachen
H. Richter, München
G. Seim, Braunschweig
N. Schmitz, Karlsruhe
C.-P. Schnorr, Schaffhausen (Schweiz)
F.W. Steutel, Enschede (Holland)
H. Störmer, Buchendorf
M. Strasser, Bochum
F. Topsøe, Kopenhagen
W. Uhlmann, Würzburg
W. Vogel, Bonn
I. Vincze, Budapest
W. Widdra, Freiburg
H.J. Zimmermann, Aachen
W.R. van Zwet, Leiden

Vortragsauszüge:

A) Maßtheorie und axiomatische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

P. GÄNSSLER: Kompaktheitskriterien für Familien von W.-Maßen.

Es sei $(X,\mathfrak{F})$ ein meßbarer Raum, $\mathfrak{A}$ die Menge aller auf der σ-Algebra $\mathfrak{F}$ definierten W.-Maße, $\mathfrak{P}$ eine Teilfamilie von $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{P}}^{k} := \{\mu | \mathfrak{F} : \mu = \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m P_m \,,\; c_m \geq 0 \,,\; \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m = 1 \,,\; P_m \in \mathfrak{P}\}$. Bezeichnet $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$ die Initialtopologie für die Familie $\{P \to P(F) : F \in \mathfrak{F}\}$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathfrak{P}$ ist relativ kompakt in $(\mathfrak{A},\mathcal{T}_{\mathfrak{F}})$

(ii) $\mathfrak{P}$ ist relativ folgenkompakt in $(\mathfrak{A},\mathcal{T}_{\mathfrak{F}})$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(iii) Es existiert ein $\mu \in \overline{\mathfrak{P}^k}$, welches $\mathfrak{P}$ gleichmäßig dominiert und jedes $\mathfrak{P}$ dominierende endliche Maß dominiert $\mathfrak{P}$ gleichmäßig

(iv) $\mathfrak{P}$ ist gleichmäßig σ-stetig

(v) Jede abzählbare Teilmenge $\mathfrak{P}_o$ von $\mathfrak{P}$ ist gleichmäßig σ-stetig

(vi) Für jede abzählbare Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$ folgt aus der Konvergenz einer Folge $P_n \in \mathfrak{P}$, $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathfrak{A}$ die Konvergenz von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf der von $\mathfrak{A}$ erzeugten σ-Algebra

Ist $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Hausdorffraum, $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{K}$ das System der Borelschen bzw. kompakten Mengen in X, und bezeichnet $\mathcal{W}^{(r)}$ die Gesamtheit aller $\mathfrak{K}$-regulären auf definierten W.-Maße (d.h. $P\{\mathcal{O}) = \text{Sup } P(K) : K \subset \mathcal{O}, K \in \mathfrak{K}\}$ für alle $\mathcal{O} \in \mathfrak{T}$), so sind für Teilfamilien $\mathfrak{P} \subset \mathcal{W}^{(r)}$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathfrak{P}$ ist relativ folgenkompakt in $(\mathcal{W}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{F}})$

(ii) $\mathfrak{K}$ approximiert $\mathfrak{F}$ gleichmäßig bezüglich aller $P \in \mathfrak{P}$ (d.h. $\forall F \in \mathfrak{F} \wedge \varepsilon > 0 \ \exists K = K(\varepsilon) \in \mathfrak{K}$, $K \subset F$ $P(F - K) < \varepsilon \ \forall P \in \mathfrak{P}$)

(iii) $\mathfrak{K}$ approximiert $\mathfrak{T}$ gleichmäßig bezüglich aller $P \in \mathfrak{P}$

Da für einen Polnischen Raum $X = (X,\mathfrak{T})$ jedes auf den Borelschen Mengen $\mathfrak{T}$ definierte W.-Maß automatisch $\mathfrak{K}$-regulär ist, ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^{(r)}$; somit sind in diesem Fall für Teilfamilien $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ sämtliche aufgeführten Aussagen äquivalent.

H. HEYER: <u>Der Begriff der Varianz für Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen.</u>

Ausgehend von der Beobachtung, daß die durch $V(P_X) := \int_\Omega (X-EX)^2\, dP = \int_R (x-EX)^2\, P_X(dx)$ für jede reelle Zufallsvariable X auf einem WS-Raum $(\Omega,\mathfrak{T},P)$ definierte Abbildung $P_X \to V(P_X)$ ein involutions-invarianter translationsinvarianter (HaMogruppen-) Homomorphismus der (vag-) topologischen (Faltungs-)Halbgruppe $M(\mathbb{R})$ der Menge aller WS-Maße auf $\mathbb{R}$ in die Halbgruppe R_+ darstellt, welcher genau die Dirac-Maße annulliert, wird eine axiomatische Definition der Varianz für WS-Maße auf einer lokalkompakten Gruppe G (mit abzählbarer Basis) angegeben. Die Existenz der so erklärten Varianz wird mit Hilfe der Fourier-Transformierten $\hat{p}$ der WS-Maße p auf G in zwei Fällen sichergestellt: für abelsche Gruppen durch Integration von $\log |\hat{p}(\chi)|$ für alle Charaktere χ von G (Khintchine-Functional) und für endliche nicht notwendigerweise abelsche Gruppen durch $\log|\det \hat{p}(U)|$ für die linksreguläre Darstellung

U von G . Anwendungen auf die Theorie der Grenzverteilungen von Faltungsfolgen auf endlichen Gruppen basieren auf einem Resultat von Maksimov (1967).

C.-P. SCHNORR: <u>Zufälligkeit und Zufallsklassen unendlicher Folgen.</u>

Vom intuitiven Standpunkt ist eine unendliche Folge genau dann zufällig, wenn sie alle Fastüberallgesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie erfüllt. Diese Vorstellung wird durch den Begriff der Rekursivität präzisiert. Eine Folge ist per Definition zufällig, wenn es keinen <u>konstruktiv durchführbaren</u> Test gibt, der die Folge als zufällig ablehnt. Im Gegensatz zu den rekursiven Sequentialtests (Martin-Löf) kann man zu einem konstruktiv durchführbaren (k.d.) Test stets eine Folge berechnen, die den Test besteht. Die Menge $\mathfrak{W}$ der k.d. Tests kann man teilweise ordnen nach der <u>Komplexität</u> der Tests. Zu $a \in \mathfrak{W}$ definieren wir die zugehörige <u>Zufallsklasse</u> [a], welche genau aus den Folgen besteht, die alle Tests b mit $b \leq a$ erfüllen. Es werden Zusammenhänge zwischen der <u>Komplexität</u> von Folgen und ihrer Zugehörigkeit zu bestimmten Zufallsklassen untersucht.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

F. TOPSØE: Weak convergence of Radon measures on arbitrary Hausdorff spaces.

X Hausdorff space, $\mathcal{B}(X)$ the Borel σ-field, $\mathcal{M}_+(X)$ the space of finite positive Radon measures (i.e., according to L. Schwartz, finite pos. measures μ on $\mathcal{B}(X)$ such that, for all $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu A = \sup\{\mu K : K \subset A , K$ compact$\}$).
The weak topology on $\mathcal{M}_t(X)$ is the weakest topology making all maps $\mu \to \mu(f)$ lower semicontinuous; f bounded, lower semicontinuous. This is a Hausdorff topology and it is the usual weak topology if X ist completely regular. Various properties of this topology is discussed, for example a „Prokhorov theorem" is proved.

B) Wahrscheinlichkeitstheorie .

E. SPARRE ANDERSEN: Algebraic and Combinatorial Methods in the Theory of Fluctuations of Sums of Random Variables.

Let X_k , $k = 1,\ldots,n$ be independent, identically distributed r.v.'s, $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, $k = 0,1,\ldots,n$, $R_{n,k}$, $k = o,\ldots,n$ are the order statistics of $S_o,\ldots,S_n$, and $L_{n,k}$ the subscript j of the sum S_j which equals $R_{n,k}$ (if $S_j = S_i$, $i > j$ then S_i is supposed to be „smaller" than S_j). Then $Pr(R_{n,k},L_{n,k},S_n) = Pr(R_{k,k},L_{k,k},S_k) * Pr(R_{n-k,o},L_{n-k,o},S_{n-k})$ where $Pr(\ldots)$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

denotes the joint distribution of the r.v.'s and $*$ denotes convolution. Furthermore

$$Pr(R_{k,k}, L_{k,k}, S_k) = \sum_{(\alpha_\nu)}^{(k)} \prod_{\nu=1}^{k} {}^{*} \frac{Pr(S_\nu^+, \nu \cdot \text{sign } S_\nu^+, S_\nu)^{\alpha_\nu^{*}}}{\nu^{\alpha_\nu} \cdot \alpha_\nu!} .$$

Here $\sum_{(\alpha_\nu)}^{(k)}$ denotes summation over the $\alpha_\nu \geq 0$ satisfying $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k$. These formulas are proved by algebraic or combinatorial methods. The proofs are valid also for symmetrically dependent r.v.'s $X_1, \dots, X_n$ when a suitable definition of the convolution is introduced.

R. BORGES: Zur Approximation durch die Normalverteilung.

Die meisten Approximationen durch die Normalverteilung besitzen einen Fehler der Ordnung $n^{-1/2}$. Es wird ein Verfahren zur Bestimmung von Transformationen angegeben, so daß bei einparametrigen Familien von Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Fehler nur von der Ordnung n^{-1} ist.

L.C.A. CORSTEN: Eine kurze Ableitung der Wishart-Verteilung.

Vier Bemerkungen führen zu einer schnellen Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte der standardisierten Wishart-Matrix

$\underline{V}$ der Ordnung p und mit Parameter $n \geq p$:

1) Die Dichte kann nur von den Eigenwerten von V abhängig sein.

2) $\underline{V}$ ist verteilt wie $\underline{U}'\underline{U}$, wo $\underline{U}$ eine obere Dreiecksmatrix ist mit unabhängigen Elementen:

$$u_{ii} \doteq \sqrt{\underline{X}^2_{n+1-i}} \quad \text{und} \quad u_{ij} \doteq X_i \, (i < j) \, .$$

3) In einem Punkte wo U (und also V) eine Diagonalmatrix ist, hat die Funktionalmatrix für die Abbildung $U \to V$ die Diagonalform.

4) Die Dichte von $\underline{V}$ hat schon in den in 3) erwähnten Punkten die erwünschte Form.

U. DIETER: Autokorrelation von Zufallszahlen.

Man konstruiert Zufallszahlen heute meist nach folgender Vorschrift: Man definiert y_n rekursiv durch $y_{n+1} \equiv ay_n + b$ (mod m) ; hier sind a,b und m ganze Zahlen. Durch Vorgabe von y_o ist dann die Folge $\{y_n\}$ festgelegt. Die Zufallszahlen sind dann $x_n = \frac{y_n}{m}$. Man wählt nun die Zahlen a,b,m und y_o so, daß die Periode von $\{y_n\}$ möglichst groß ist. Eine weitere Forderung, der Zufallszahlen genügen sollen, ist,

daß die Autokorrelation zwischen x_n und ihrem m-ten Nachfolger x_{n+m} möglichst nahe bei 0 liegt. Wir zeigen nun, daß diese Autokorrelation auf gewisse arithmetrische Summen (Dedekindsche bzw. verallgemeinerte Dedekindsche Summen) zurückführbar ist, deren exakte Berechnung ein Reziprozitätsgesetz gestattet, das von Dedekind bzw. dem Vortragenden stammt.

W. EBERL, Wien: Koinzidenzen und Poissonprozesse.

2 Punkte x_1 und x_2 der Zahlengeraden R bilden eine ε-Koinzidenz, wenn $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ ist $(\varepsilon > o)$. Die Poissonverteilung mit dem Mittel ξ wird im folgenden mit P_ξ bezeichnet.

Satz: (x_n) : Folge von in $[0,1]$ unabhängigen, identisch nach Lebesgue verteilten Zufallsvariablen;

$\varepsilon_n = \xi/n^2$; $\xi > 0$ und fest;

ζ_n : Anzahl der ε_n-Koinzidenzen von $x_1,\dots,x_n$;

F_n : Verteilungsfunktion von ζ_n , F_o : Verteilungsfunktion der P_ξ ;

Unter diesen Voraussetzungen und mit diesen Bezeichnungen konvergiert (F_n) vollständig nach F_o .

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dieser Satz wurde von K. Hafner unter Zugrundelegung eines allgemeineren Koinzidenzbegriffes auf Punktprozesse (x_n) im R^m verallgemeinert, bei denen die x_n unabhängig und identisch mit einer quadratisch integrierbaren Dichtefunktion f (in Bezug auf das m-dimensionale Lebesgue-Maß) verteilt sind. Die Koinzidenzen bilden dann einen Poissonprozess, dessen Indexmenge die Lebesgue-meßbaren Mengen des R^m und dessen eindimensionale Randverteilung die P_{ξ_A} mit $\xi_A = \xi \int_A f^2(x)\,dx$ sind.

W. PIESCH: Lorenzkurve und inverse Verteilungsfunktion.

Konzentrationsmaße lassen sich meist mit Hilfe der inversen Verteilungsfunktion $G(F)$ einfach darstellen. Dies wird am Beispiel der Lorenzkurve $L(F)$ gezeigt. Geht man von ihrer Parameterdarstellung (1) $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$, $L(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x uf(u)\,du$ mit $a \geq 0$ aus, so erhält man durch Produktintegration den Satz von Gini. (2) $L(F) = \frac{1}{\mu} \int_0^F G(u)\,du$ oder $\frac{dL}{dF} = \frac{G(F)}{\mu}$.

Dieser Satz gestattet die einfache Behandlung folgender Probleme:

a) Ausgehend von einer Verteilungsfunktion wird die zugehörige Lorenzkurve ermittelt.

b) Ausgehend von einer gegebenen Lorenzkurve wird die zur Lorenzkurve gehörige Schar von der Verteilungsfunktionen ermittelt.

c) Verhalten von Lorenzkurven bei Lineartransformationen der Variablen.

d) Zusammenhang zwischen Gini-Index σ und Paretoschen α .

e) Aussagen über Symmetrieeigenschaften von Lorenzkurven.

f) Die Lorenzkurve eines Aggregats kann nicht über der höchsten Lorenzkurve eines Sektors liegen.

F.W. STEUTEL: Moment criteria for invinite divisibility.

Katti |1| has given necessary and sufficient conditions, in terms of probabilities, for the infinite divisibility of integer-valued random variables. In this lecture, analogously, necessary (not sufficient) conditions are given, in terms of moments, for the infinite divisibility of general, non-negative random variables.

In |2| it is shown, that mixtures if exponential distributions are infinitely divisible. Application of the above mentioned conditions leads to moment inequalities for the (completely general) mixing distribution. An other class of inequalities is derived for the moments of unimodal distributions.

|1| Katti, S.K. (1967). Infinite divisibility of integer value random variables. Ann. Math. Stat. 38, 1306-1308.

|2| Steutel, F.W. (1967). Note on the infinite divisibility

of exponential mixtures. Ann. Math. Stat. 38, 1303-1305.

C) Stochastische Prozesse.

Ch. BANDELOW: Rekurrenz-Eigenschaften von Funktionalen Markovscher Ketten.

$a_0, a_1, \ldots$ sei eine homogene Markovsche Kette auf dem Wahrscheinlichkeitsfeld (Ω, F, P) und f eine Abbildung vom Zustandsraum I der Kette in dem d-dimensionalen reellen Raum R^d. Sei $s_n := \sum_{r=1}^{n} f(a_r)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Ein $x \in R^d$ heißt streng rekurrent (bzw. rekurrent), wenn die Partialsummenfolge $(s_n ; n \geq 0)$ jede Umgebung von x fast sicher (bzw. mit positiver Wahrscheinlichkeit) unendlich oft besuc ht:

$$P(\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} \{ w \in \Omega : |s_n - x| < \varepsilon \}) = 1 \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0 .$$

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein $x \in R^d$ streng rekurrent (bzw. rekurrent) ist. Die Ergebnisse können als Verallgemeinerungen eines Satzes von CHUNG und FUCHS (1951) über Summen unabhängiger Zufallsvariablen angesehen werden. Als Anwendung ergibt sich u.a., daß eine rekurrente, aperiodische Irrfahrt (beliebiger Dimension) ein System $J_1, \ldots, J_m$ endlicher Teilmengen des Zustandsraumes genau dann „gerecht besucht" (d.h. fast sicher unendlich oft

alle Mengen gleich oft besucht hat), wenn Rang $(J_1,\dots,J_m) < 4$ und $|J_1| = \dots = |J_m|$ gilt.

W. FIEGER: Die Kalmogoroff'schen Differentialgleichungen für inhomogene Markoff'sche Ketten.

Für homogene Markoff'sche Ketten existieren $q_i = \lim\limits_{\tau \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau}$ $(\leq \infty)$ und $q_{ik} = \lim\limits_{\tau \downarrow 0} \frac{p_{ik}(\tau)}{\tau}$ $(< \infty)$ für $i \neq k$. Mit Hilfe dieser Größen läßt sich (unter entsprechenden Regularitätsbedingungen) ein erstmals von Kolmogoroff angegebenes Differentialgleichungssystem für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ aufstellen. Es wird gezeigt, daß entsprechende Differentialgleichungen auch im inhomogenen Fall gelten, wenn man die Differentiation nach t durch die Differentiation nach geeignet gewählten Funktionen $S_i(t)$ ersetzt.

Gh. MIHOC: Die Klassifizierung der Zustände einer Kette mit vollständigen Bedingungen.

Es sei eine einfache und stationäre Kette mit vollständigen Bindungen, welche durch eine endliche Menge A von Zuständen gehen kann. Die Menge A wird in Übergangsteilmengen und Endteilmengen zerlegt und es werden verschiedene ergodische Probleme gelöst im Falle, daß der Anfangszustand einer Übergangs- oder

Endteilmenge angehört. In den selben Bedingungen wird das Problem des zentralen Grenzwertes behandelt. Es werden somit einige der bisher erhaltenen Ergebnisse verallgemeinert auf den Fall, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten gleich Null sein können. Dasselbe Problem wird auch im Falle einer vielfachen stationären Kette behandelt. Es werden einige Ergebnisse im Falle der variablen Kette angedeutet.

G. SEIM: Über die Klassifikation der Zustände bei inhomogenen Markoffschen Ketten.

Die Klassifikation der Zustände bei homogenen Markoffschen Ketten beruht auf folgenden Überlegungen:

1. Man unterteilt die Zustände in rekurrente und transiente.
2. In der Menge der Zustände definiert man eine Äquivalenzrelation, indem man zwei Zustände genau dann als äquivalent betrachtet, wenn die Kette von jedem von ihnen mit positiver Wahrscheinlichkeit zum anderen gelangen kann.
3. Man stellt fest, daß diese Äquivalenzrelation den Zustandsraum gerade so in Klassen zerlegt, daß jeweils nur rekurrente oder nur transiente Zustände in einer Klasse liegen.

Im Vortrag wird versucht, diesen Gedankengang auf inhomogene Markoffsche Ketten zu übertragen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. STÖRMER: Über Zustandsklassen in Semi-Markoff-Prozessen.

Nimmt man in Semi-Markoff-Prozessen mit endlich vielen Zuständen durch beliebiges Zusammenfassen von Zuständen eine Zerlegung des Zustandsraumes in Zustandsklassen vor, so bilden die Zustandsklassen wieder einen stochastischen Prozeß, der im allgemeinen kein Semi-Markoff-Prozeß ist. Für diesen Prozess lassen sich bei einem stationären Semi-Markoff-Prozeß u.a. mittlere Verweildauern (Verweilen in einer Zustandsklasse) und Übergangswahrscheinlichkeiten (Übergang von einer Zustandsklasse in eine andere) in einfacher Form angeben. Im nichtstatiknären Fall werden Formeln für das asymptotische Verhalten angegeben.

D) Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

L. ARNOLD: Zufällige Matrizen in der Physik.

Sei $A_n = (a_{ij})_{n\times n}$ eine Matrix mit Zufallsgrößen als Elementen, so daß $a_{ij} = a_{ji}$ gilt, die a_{ij} für $i \geq j$ jedoch unabhängig und identisch verteilt sind mit der Verteilungsfunktion G. Sei $F_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der n Eigenwerte von $\frac{A_n}{\alpha_n}$, wobei α_n ein skalarer Normierungsfaktor ist. Die möglichen Grenzwerte der Folge $\{F_n\}$ werden untersucht. Dabei wird die sogenannte

Stieltjes-Transformation einer Verteilung und eine Störungsrechnung für die Resolvente benutzt. Es ergibt sich, daß die Wignersche Halbkreisverteilung der einzige f.s. konstante Grenzwert von $\{F_n\}$ ist. Alle weiteren Grenzwerte sind stochastische Prozesse, für deren Verteilung eine Funktionalgleichung hergeleitet wird.

St. L. BRAUN: An age-dependent Branching Process with life-time-Dependent Offspring Generating Function.

For an age-dependent branching process $X(t)$ with probability generating function $F(s,t)$, lifetime distribution for individuals $G(\tau)$, and offspring probability generating function $h(s,\tau)$, two problems are considered:

(I) The control of $X(t)$, so that the extinction probability $\lim\limits_{\tau\to\infty} F(o,t)$ is one, under incomplete information on $G(\tau)$, and

(II) finding that $G(\tau)$ which minimizes extinction probabilities $F(o,t)$ at sufficiently large finite times.

In order for extinction to occur with probability one, we must have $m = \int_0^\infty a(\tau)\, dG(\tau) \le 1$, where $a(\tau) = \left.\frac{\partial h(s,\ )}{\partial s}\right|_{s=1}$.

A sharp upper bound on m^* ist found by solving the maximization problem:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\text{find} \sup_{W(\tau)} \int_0^\infty a(\tau)\, dW(\tau) = U_0(m(\tau), \sigma^2(\tau))$$

$$\text{subject to} \int_0^\infty \tau dW(\tau) = m(\tau), \int_0^\infty \tau^2\, dW(\tau) \geq \sigma^2(\tau) + m(\tau),$$

$W(\tau)$ a probability distribution function.

If we then solve for $m(\tau)$ in $U_0(m(\tau), \sigma(\tau)) = 1$, then we will have an upper bound on all $m(\tau)$ which will produce extinction with probability one, for a prescribed $\sigma^2(\tau)$. It is found that this bound is a decreasing function of $\sigma^2(\tau)$. It was also shown that among those $G(\tau)$ corresponding to unbounded random variables τ with a common mean $m(\tau)$, the one that minimizes $F(o,t)$ for all sufficiently large t, is the one degenerate at $m(\tau)$. It was conjectured that this is also true for bounded τ.

F. FERSCHL: <u>Verteilungen von Produktionszeiten in Zusammensetzprozessen.</u>

Ausgangspunkt der Betrachtung ist folgendes „Produktionsmodell": In parallelen Produktionslinien werden Einzelstücke gefertigt. An einer Zusammensetzstelle werden die Einzelteile zu einem „Paket" zusammengesetzt, und zwar so, daß aus jeder Produktionslinie genau ein Stück verwendet wird. Die stochastischen Eigen-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

schaften des Produktionsprozesses an jeder der Linien seien gegeben. Dann lassen sich weitere stochastische Prozesse herleiten, z.B.

- der Warteprozess der Einzelteile, die ν parallele Warteschlangen vor der Zusammensetzstelle bilden,
- der Outputprozeß der „Pakete".

Als Produktionszeiten der Pakete betrachte man die Zeit zwischen dem Output aufeinanderfolgender Pakete. Der stochastische Prozeß dieser Produktionszeiten läßt sich durch die Betrachtung der Zufallsgröße $D = \max_i(U_i+V_i) - \max_i U_i$ analysieren. Einige bemerkenswerte Eigenschaften dieses Prozesses werden kurz behandelt. Ein interessantes Ergebnis ist etwa: Haben alle Produktionszeiten den gleichen Erwartungswert, so strebt die Verteilung der Produktionszeiten der Pakete gegen $\sum h_i F_i(x)$, wobei $F_i(x)$ die Verteilung der Produktionszeit an der i-ten Linie bedeute. Die Koeffizienten h_i hängen dabei nur von den Varianzen der Produktionszeit ab.

Die Behandlung des Warteprozesses ist für drei und mehr parallele Produktionslinien schwierig. Seine Eigenschaften interessieren im Zusammenhang von Produktionsplanungsaufgaben.

O. POSPISIL: Kombinierte Rechenmethode der vielfachen nichtlinearen Regression mit angebundener Optimierung.

Es handelt sich um ein allgemeines, statisches, nichtlineares Regressionsmodell des kontinuierlichen chemischen (oder ähnlichen) Erzeugungsprozesses. Die dazu benutzte Rechenmethode geht von folgender Standartform der Regressionsfunktion aus:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-2}^{3} a_{ij} x_i^j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_i x_j \qquad (1)$$

Zur weiteren Reduktion von (1) benutzt man eine kombinierte Rechenmethode; man testiert die Bedeutung der Argumente x_i und der Glieder $a_{ij} x_i^j$, $b_{ij} x_i x_j$. Zur Optimierung des Modells benutzt man eine spezielle Form der Gradientenmethode. Beispiele der praktischen Ausnutzung der Methode.

M. POSTELNICU: Stochastische Prozesse in der Zuverlässigkeitstheorie.

Beliaev, Gnedenko und Soboliov haben eine allgemeine Formel für die Probleme der Zuverlässigkeitstheorie aufgestellt, in welcher die Charakteristiken der Zuverlässigkeit als Mittelwerte einiger Funktionalen im Raum der Bahnen eines stochastischen Prozesses $X(t)$ definiert werden. In dieser Arbeit wird eine stochastische Charakterisierung des Abnutzungsphänomens gegeben, durch bestimmte Bedingungen, welche dem stochastischen Prozess $X(t)$ gestellt werden und es wird die Beziehung zwischen dieser

Charakterisierung und jener von Birnbaum, Esary und Marshall studiert. Es wird eine Klasse von stochastischen Prozessen eingeführt, welche geschlossen ist in Bezug auf die Bildung der kohärenten Strukturen, und es werden verschiedene ihrer Eigenschaften betrachtet.

I. VINCZE: <u>Verteilungssätze der statistischen Physik und die relative Information.</u>

Einige prinzipielle Fragen der Herleitung der Boltzmann-Planckschen Verteilung werden betrachtet. Der Zusammenhang dieses Prinzips mit der maximum-likelihood Methode wird diskutiert. Die Einführung einer Pseudo-likelihood-Funktion ergibt die Möglichkeit zwischen den zwei Verfahren eine vollständige Analogie zu ziehen. Als einfache Folgerung dieser Betrachtungen bekommt man einen einfachen und tadellosen Ausdruck für die thermodynamische Wahrscheinlichkeit und auch für die thermodynamische Entropie im Falle diskreter sowie stetiger Zufallsveränderlichen. Die stetigen Versionen der Bose-Einstein- und Fermi-Dirac-Statistiken werden ebenfalls behandelt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

E) Statistik

K. ABT: Geschlossene Darstellung der Werte orthogonaler Polynome für 3 bis 6 ungleichständige Argumentstufen mit ungleichen Besetzungszahlen.

Die geschlossene Darstellung der Werte erfolgt im Hinblick auf die Varianzanalyse mit quantitativen Faktoren, in der die Polynomwerte als Koeffzienten orthogonaler Vergleiche (lineare, quadratische, kubische, ... Komponente) Verwendung finden. Die Ableitung der Formeln wird an dem Beispiel von 4 Argumentstufen durchgeführt. In einer Tafel für den praktischen Gebrauch werden die Koeffizienten explizit angegeben.

K. BEHNEN: Zur Pitman-Effizienz unter beliebigen Alternativen.

Mit Hilfe der Theorie der benachbarten Folgen von Verteilungen (Le Cam, Univ. Calif. Publ. in Stat. 3 (196o)), insbesondere mit Hilfe des von Hajek, AMS 33 (1962) unter der Bezeichnung "3. Le Cam Lemma" angegebenen Satzes werden Untersuchungen von Hodges und Lehmann, AMS 27 (1956) bzw. 4. Berkel. Symp. (196o) und Chernoff, Savage, AMS 29 (1958) über untere Schranken für die Pitman-Effizienz bei einigen Zweistichproben-Tests fortgeführt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es wird gezeigt:

I) Die untere Schranke 1 für die Pitman-Effizienz des Fisher-Yates (van der Waerden) Tests zum Student-t-Test, die nach Hodges und Lehmann für Translationsalternativen gültig ist, wird bei relativ allgemeiner Annäherung an die Normalverteilung eingehalten.

II) Die untere Schranke $\pi/6$ für die für die Pitman-Effizienz des Fisher-Yates (van der Waerden) Tests zum Wilcoxon-Test, die nach Chernoff und Savage unter Translationsalternativen gültig ist, wird unter schwachen Voraussetzungen bei beliebigen Alternativen eingehalten.

III) Zu jedem Wert zwischen o und ∞ läßt sich eine einfache Klasse von Alternativen angeben, so daß die Pitman-Effizienz des Fisher-Yates (vand der Waerden)Tests zum Student-t-Test diesen Wert annimmt. Die gleiche Aussage gilt für den Wilcoxon Test im Vergleich zum Student-t-Test.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

J. FABIUS and W.R. van ZWET: The two-armed bandit problem.

A characterization is given of the Bayes strategies for the standard two-armed bandit problem, in which an experimenter has to perform N trials in a sequential manner, where for each trial he may chose between two Bernoulli-type experiments with unknown probabilities of success α and β, and where the risk function of any strategy is defined as the amount by which the expected number of successes falls short of $N \cdot \max(\alpha, \beta)$. This characterization is then used to derive certain properties of admissible strategies and minimax-risk strategies.

J. HA'JEK: A characterization of limiting distributions of regular estimates.

We consider a sequence of estimates in a sequence of general estimation problems with a k-dimensional parameter. Under certain very general conditions we prove that the limiting distribution of the estimates, if properly normed, is a convolution of a certain normal distribution, which depends only of the underlying distributions, and of a further distribution, which depends on the choice of the estimate. As corollaries we obtain inequalities for asymptotic variances

and for asymptotic probabilities of certain stets, generalzing so the result by J. Wolfowitz (1965), S. Kaufman (1966), L. Schmetterer (1966) and G.G. Roussas (1968).

Z. KOUTSKY: Ein Beitrag zur Beurteilung der Entscheidung mehrerer Richter.

N Richter können sich (unabhängig von einander) für eine von n Aussagen entscheiden. Als Maß der Übereinstimmung der Richter wird

$$S = \sum_{i=1}^{N} \sum_{i<j}^{N} |x_i - x_j|^{\kappa} \text{ gewählt.}$$

Die Zufallsgröße $\frac{\eta_n^N - AN^2}{BN^{\frac{2}{3}}}$, wobei $\eta_n^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{i<1}^{N} |\xi_i - \xi_j|^{\kappa}$ ist und $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$ unabhängige gleichverteilte, diskrete Zufallsgrößen sind, die nur endlich viele Werte annehmen können, wird für genügend große N normal verteilt. Die beiden Konstanten A und B können ausgerechnet werden. Daher kann man beurteilen, ob die Richter eine signifikante Nichtübereinstimmung erzielt haben. Die Nullhypothese ist: Die Richter machen ihre Aussage zufällig, unabhängig, und jede Aussage wählen sie mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.

J. KRAUTH: Zur Theorie der Bindungen.

In der nicht-parametrischen Testtheorie werden unter Voraussetzung stetiger Verteilungsfunktionen verteilungsunabhängige Tests hergeleitet, die für gewisse Alternativen optimal sind. In der finiten Theorie erhält man Tests, die auf den Permutationen der Beobachtungswerte oder ihrer Rangzahlen beruhen. Aufgrund der Tatsache, daß die zugrundeliegenden Zufallsgrößen in der Praxis wegen der Meßuntauglichkeit immer diskret verteilt sind, treten mit positiver Wahrscheinlichkeit gleiche Beobachtungswerte, sogenannte Bindungen, auf. Eine optimale Methode, solche Bindungen zu behandeln, wurde bisher nur für den einseitigen Zeichentest angegeben. Hier wird für verschiedene Testprobleme eine nichtparametrische Theorie entwickelt, bei der diskret verteilte Zufallsgrößen zugrundeliegen. Insbesondere werden verteilungsunabhängige invariante „lokal beste" unverfälschte Tests zum Niveau α hergeleitet, die den Wilcoxon- bzw. Spearman-Tests entsprechen. Die sich ergebenden „optimalen" Rangzahlen wurden bisher noch nicht vorgeschlagen.

V. MAMMITZSCH: Zur Theorie der k-stufigen Tests.

Gegeben seien die Hypothesen P_i $(i=1,\dots,n)$ zum Maßraum (Ω,K) ferner die Folge von σ-Köropern $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_\infty \subset K$ und die eckenabgeschlossenen Schadensbereiche $S_t(\omega) \subset R^n$ nebst

den Kosten $k_t \in R^n$, wobei $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_\infty = \vec{\infty}$ und $\lim k_t = k$. Ein k-stufiger Test T bestehe aus

(a) einer disjunkten Zerlegung $\Omega = \bigcup_{t=1}^{k} F_t$ mit

$F_t \in K_t$, $t = 1,\dots,k \leq \infty$;

(b) einer Testfunktion $s : \Omega \to R^n$ mit den Eigenschaften:

$s_t := s|F_t$ ist K_t-meßbar und für alle $\omega \in F_t$ gilt

$s_t(\omega) \in S_t(\omega)$, $t = 1,\dots,k$.

Bezeichne $r(T) = \sum_{t=1}^{k} \int_{F_t} (s_t(\omega) + k_t) \, dP$ mit $P = (P_1,\dots,P_n)$ den zum Test gehörigen Risikovektor und R_k die Menge der Risikovektoren aller k-stufigen Tests. Unter den üblichen Meßbarkeits- und Integrabilitätsbedingungen bezüglich der Stützfunktionen der $S_t(\omega)$ gilt: Zur a-priori-Verteilung $p = (p_1,\dots,p_n)$ mit $p_i > 0$ für $i = 1,\dots,n$ gibt es stets eine Bayeslösung $r(T^\infty)$ in R_∞, die in konstruktiver Weise als „Grenzwert" geeigneter Bayeslösungen $r(T^k)$ in R_k bezüglich p mit $k \to \infty$ erhalten werden kann.

D. PLACHKY: Strenge Tests und ungünstige Verteilungen.

Es wird der Zusammenhang von strengen Tests und ungünstigen Verteilungen untersucht. Dabei umfaßt die hier betrachtete Klasse von strengen Tests die Maximin-Tests und die strengen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Tests zum Niveau α . Mit Hilfe ungünstiger Verteilungen werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein strenger Test gleichmäßig bester Test ist. Ferner wird vermöge einer Verallgemeinerung des Fundamentallemmas von Neyman und Pearson auf endlich additive Mengenfunktionen eine konstruktive Bestimmung strenger Tests durch Angabe einer 0-1-Struktur ermöglicht.

N. SCHMITZ: Sequentielle Minimax-Tests bei Wiener-Prozessen.

Ein Wiener-Prozess mit dem (unbekannten) Erwartungswert und der Varianz 1 pro Zeiteinheit wird von $t = 0$ an beobachtet; die Kosten für eine Beobachtung der Dauer t seien ct. Für die Entscheidung zwischen $H_1 : \mu \leq 0$ und $H_2 : \mu > 0$ werde bei Schadensfunktion

$$L(\mu, d_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \in H_i \\ f(|\mu|) & \text{für } \mu \notin H_i \end{cases}$$

ein (sequentieller) Minimax-Test gesucht. Unter Verwendung einer Idee von DE GROOT wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß man als Minimax-Test einen symmetrischen Likelihoodquotienten-Sequenztest wählen kann. Diese Bedingung ist für etliche praktisch interessierende Klassen von Schadensfunktionen erfüllt.

F) Informationstheorie

U. AUGUSTIN: Gedächnisfreie Kanäle.

Gegeben sei ein (nicht notwendig stationärer) gedächnisfreier Kanal mit beliebigen Alphabeten. Für das Zeitintervall $|1,t|$ diskreter Zeitpunkte sei $N_t(\beta)$ das Supremum der Listenlängen N aller Codes mit Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens β und $\beta_t(N)$ das Infimum der Irrtumswahrscheinlichkeiten β aller Codes der Listenlängen N.

Für festes β $(0 < \beta < 1)$ und festes R (R ziemlich eingeschränkt) läßt $\ln N_t(\beta)$ und $\ln \beta_t(\exp(tR))$ sich abschätzen bis auf ein Restglied $o(t^{1/2})$, falls der Kanal einigen Momentbedingungen genügt.

F. Hering (Bonn)