MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 9|1969

Arbeitsgemeinschaft über Funktionenalgebren

7.4. bis 12.4.1969

Unter Leitung von Prof. Dr. H. König (Saarbrücken) fand im Oberwolfacher Institut eine Arbeitsgemeinschaft über Funktionenalgebren statt. Der Aufbau der Theorie war nach den Lecture Notes [Kö 3] sowie nach [See-Kö] und [Kö 5] angelegt (siehe Literaturverzeichnis).

Teilnehmer

N. A. van Arkel, Erlangen
W. Beiglböck, Heidelberg
W. Böge, Heidelberg
S. Böge, Heidelberg
H.-D. Dietze, Saarbrücken
W. Hackenbroch, Saarbrücken
B. Hain, Clausthal-Zellerfeld
K. Janßen, Erlangen
D. Kölzow, Erlangen
H. König, Saarbrücken
K. Legrady, Hamburg
H. Leptin, Heidelberg
M. Mürmann, Heidelberg
R. Rentschler, Straßburg
E. Schöneberger, Saarbrücken
G. Tamme, Göttingen
G. Wittstock, Saarbrücken

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

Vortrag 1: Grundbegriffe über Funktionenalgebren

i) Meditation über den Satz von Hahn-Banach: Hauptsächlich die beiden ersten Abschnitte meiner Arbeit "Über das von Neumannsche Minimax-Theorem" in Arch. Math. 19 (1968), 482-487. Satz: Es sei E ein reeller Vektorraum und $\theta : E \to \mathbb{R}$ sublinear. Es sei $T \subset E$ θ-mittelpunktskonvex: Zu $u, v \in T$ existiere $f \in T$ mit $\theta(f - \frac{u+v}{2}) \leqq 0$. Dann existiert ein lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leqq \theta$ und mit $\mathrm{Inf}(\varphi|T) = \mathrm{Inf}(\theta|T)$. Der Spezialfall $E = C(X, \mathbb{R})$ (X kompakter Hausdorffraum) und $\theta = \mathrm{Max}$.

ii) Funktionenalgebren - die abstrakte Situation: Es sei (X, Σ) ein Meßraum und $B(X, \Sigma)$ die Gesamtheit der meßbaren komplexwertigen Funktionen auf X; ferner $ca(X, \Sigma)$, $Pos(X, \Sigma)$, $Prob(X, \Sigma)$ der Reihe nach die Gesamtheit der komplexwertigen, positiven, Wahrscheinlichkeitsmaße auf Σ. Man fixiert eine komplexe Teilalgebra $A \subset B(X, \Sigma)$ mit $1 \in A$ und definiert das Spektrum $S(A)$. Zu $\varphi \in S(A)$ betrachtet man die Gesamtheit der repräsentierenden Maße $M(A, \varphi) = \{m \in Prob(X, \Sigma) : \varphi(u) = \int u dm \text{ für alle } u \in A\}$. Definition der Szegöfunktion $N^p(\sigma) = \mathrm{Inf}\{\int |u|^p d\sigma : u \in A \text{ mit } \varphi(u) = 1\}$ für $\sigma \in Pos(X, \Sigma)$ und $1 \leqq p < \infty$. Ein zentrales Lemma über die Szegöfunktion, aus dem insbesondere folgt: Wenn $N^p(\sigma) > 0$, dann existieren σ-stetige $m \in M(A, \varphi)$.

iii) Funktionenalgebren - die kompakte Situation: Hier ist X ein kompakter Hausdorffraum und Σ das System der Bairemengen von X. Es sei $A \subset C(X, \mathbb{C}) \subset B(X, \Sigma)$ eine abgeschlossene Teilalgebra mit $1 \in A$. Existenz von repräsentierenden Maßen und Jensenmaßen zu $\varphi \in S(A)$. Man definiert $\theta : \theta(f) = \mathrm{Inf}\{\mathrm{Re}\,\varphi(u) : u \in A \text{ mit } f \leqq \mathrm{Re}\, u\}$ für die oberhalb stetigen $f : X \to [-\infty, \infty[$ und beweist $\theta(f) = \mathrm{Max}\{\int f dm : m \in M(A, \varphi)\}$.

iv) Einführen der Standardbeispiele $P(K) \subset R(K) \subset A(K) \subset C(K, \mathbb{C})$ für die kompakten $K \subset \mathbb{C}$ und elementare Tatsachen hierüber. Der Fall $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqq 1\}$. Formulieren der klassischen Sätze von Szegö-Kolmogorov-Krein und F. und M. Riesz.

Heinz König

Vortrag 2: <u>Der abstrakte Satz von F. und M. Riesz</u>

Es seien (X,Σ) ein Meßraum, $B(X,\Sigma)$ die beschränkten meßbaren, komplexen Funktionen auf X und $ca(X,\Sigma)$ die komplexen Maße auf Σ. Betrachtet wird eine Unteralgebra A von $B(X,\Sigma)$, die die konstanten Funktionen enthält. Die Maße ϑ, die A annulieren, bilden die Menge $A^{\perp} = \{\vartheta : \int u d\vartheta = 0 \text{ fu. } u\in A\}$. Es sei $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ein Algebrenhomomorphismus und $M(A,\varphi)$ die Menge der positiven Maße μ die φ darstellen: $\varphi(u) = \int\limits_X u d\mu$ für alle $u\in A$. $ca(X,\Sigma)$ ist ein vollständiger, komplexer Vektorverband. Das von $M(A,\varphi)$ in $ca(X,\Sigma)$ aufgespannte Band ist $M(A,\varphi)^{oo} = \{\lambda\in ca(X,\Sigma) : \text{ex } \mu\in M(A,\varphi) \text{ und } \lambda \ll \mu\}$ („ $\ll$ " bed. absolutstetig). Es ist $ca(X,\Sigma) = M(A,\varphi)^{oo} \oplus M(A,\varphi)^{o}$ ordnungsdirekte Summe. Es wurde folgender Satz von H. König und G.L. Seever gezeigt: Es sei $\vartheta\in A^{\perp}$ und α,β seien die Komponenten von ϑ in den Bändern $M(A,\varphi)^{oo}$ und $M(A,\varphi)^{o}$; d.h. $\vartheta = \alpha + \beta$, es gibt ein $\mu\in M(A,\varphi)$ mit $\alpha \ll \mu$ und β ist vollständig singulär zu allen $\mu\in M(A,\varphi)$. Dann liegen auch α und β in $A^{\perp}$. - Im topologischen Fall, daß X ein kompakter Hausdorffraum ist, Σ die Bairschen Mengen sind und $A \subset C(X)$ stimmt die Zerlegung $ca(X,\Sigma) = M(A,\varphi)^{oo} \oplus M(A,\varphi)^{o}$ mit einer etwas anders charakterisierten Zerlegung von I. Glicksberg überein: $\beta\in M(A,\varphi)^{o}$ genau dann, wenn es ein $N\in\Sigma$ mit $\mu(N) = 0$ für alle $\mu\in M(A,\varphi)$ und $|\beta|(X\;\;N) = 0$ gibt; $\alpha\in M(A,\varphi)^{oo}$ ist dadurch charakterisiert, daß für alle $M\in\Sigma$ mit $\mu(M) = 0$ für alle $\mu\in M(A,\varphi)$ auch $|\alpha|(M) = 0$ ist.

Auf beliebigen Maßräumen gilt:
Für zwei Algebrenhomomorphismen $\varphi,\psi : A \to \mathbb{C}$ ist entweder $M(A,\varphi)^{oo} = M(A,\psi)^{oo}$ oder $M(A,\varphi)^{oo} \subset M(A,\psi)^{o}$. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge $S(A)$ der Algebrenhomomorphismen erzeugt. Die Äquivalenzklassen heißen Gleasonteile und es sei $G(A)$ die Menge der Gleasonteile. Ferner seien $M(A) = \bigcup\limits_{\varphi\in S(A)} M(A,\varphi)$ und $M(A,P) = M(A,\varphi)^{oo}$ für einen Vertreter $\varphi\in P$. Dann ist $ca(X,\Sigma)$ gleich der ordnungsdirekten Summe von $M(A)^{o}$ und allen $M(A,P) : P\in G(A)$, also: $ca(X,\Sigma) = M(A)^{o} \oplus \bigoplus\limits_{P\in G(A)} M(A,P)$.

Darum folgt: Wenn $h\in B(X,\Sigma)$ ist und $\int h d\vartheta = 0$ für $\vartheta\in M(A)^{o} \cap A^{\perp}$ oder $\vartheta\in A^{\perp}$ und $\vartheta \ll \mu$ für ein $\mu\in M(A)$, dann liegt h in der $\sigma(B(X,\Sigma), ca(X,\Sigma))$-abgeschlossenen Hülle von A.

Gerd Wittstock

Vortrag 3: Der abstrakte Satz von Szegö

Sei (X,Σ) ein Meßraum, $B(X,\Sigma)$ die Algebra der beschränkten, meßbaren, komplexwertigen Funktionen auf X, $1 \in A \subseteq B(X,\Sigma)$ eine Unteralgebra, $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ein schwach-stetiger Homomorphismus, $M(A,\varphi)$ die Menge der φ repräsentierenden Maße: $M(A,\varphi) =$

$$\{\sigma \mid \in Pos(X,\Sigma),\ \int u d\sigma = \varphi(u),\ \forall\ u \in A\}.$$

Definition:

a) $\sigma \in Pos(X,\Sigma)$, $N^p(\sigma) = \inf\{\int |u|^p d\sigma \mid \varphi(u) = 1,\ u \in A\}$. $1 \leqq p < \infty$

b) $\sigma \in Pos(X,\Sigma)$, $F \in L^1(\sigma)$, $F \geqq 0$.

$$a(F,\sigma) = \inf\{\int \log F d\alpha \mid \alpha \in M(A,\varphi),\ \int \log F d\alpha \text{ existiert} \mid \text{im weiteren Sinne},\ \alpha \ll \sigma\}.$$

$$b(F,\sigma) = \sup\{\quad " \mid \quad " \quad\quad "\quad \}$$

Satz (Szegö):

Sei $\sigma \in Pos(X,\Sigma)$ mit $N^p(\sigma) > 0$ für ein p, $1 \leqq p < \infty$. Für $F \in L^1(\sigma)$, $F \geqq 0$ gilt

$$\exp(a(F,\sigma)) \leqq \frac{N^p(F\sigma)}{N^p(\sigma)} \leqq \exp(b(F,\sigma)),$$

insbesondere ist $M(A,\varphi) \neq \emptyset$.

Korollar:

Sei m das einzige, bezüglich σ absolut-stetige Maß in $M(A,\varphi)$. Dann gilt für $F \in L^1(\sigma)$, $F \geqq 0$

$$\int \overset{+}{\log} F\, dm < \infty \text{ und } \frac{N^p(F\sigma)}{N^p(\sigma)} = \exp(\int \log F\, dm).$$

K. Legrady

Vortrag 4: Anwendung auf Algebren von analytischen Funktionen auf kompakten Teilen der komplexen Ebene

(i) Cauchy Transformationen von Maßen

Die Cauchy Transformation $\hat{\mu}(z)$ eines Maßes μ, wobei μ ein komplexes Maß mit kompaktem Träger ist, sei definiert als:

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{1}{\xi - z}\, d\mu(\xi)$$

$\hat{\mu}$ ist auf dem Komplement des Trägers von μ eine analytische Funktion, und $\hat{\mu}$ ist bezüglich des Lebesgue-Maßes dx·dy beinahe überall auf die komplexe Ebene definiert.

LEMMA: Verschwindet $\hat{\mu}$ auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$, dann hat μ auf dieser offenen Menge keine Masse.

Für Beweise siehe [We 1 § 7].

(ii) Potentiale von Maßen und der Satz von Walsh

Das Potential $\bar{\sigma}(z)$ eines Maßes σ, wobei σ ein komplexes Maß mit kompaktem Träger ist, sei definiert als:

$$\bar{\sigma}(z) := \int \log|z-\xi|\, d\sigma(\xi)$$

$\bar{\sigma}$ ist bezüglich des Lebesgue-Maßes dx·dy beinahe überall auf die komplexe Ebene definiert.

LEMMA: Verschwindet $\bar{\sigma}$ auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$, dann hat σ auf dieser offenen Menge keine Masse.

FUNDAMENTAL LEMMA: Verschwindet $\bar{\sigma}$ in einem Gebiet G und konvergiert $\int \log|z-\xi|\, d\sigma(\xi)$ absolut in $z_o \in \partial G$, dann ist $\bar{\sigma}(z_o) = 0$.

Für Beweise siehe [Ca, Seite 168,169].

ALLGEMEINER SATZ VON WALSH: Sei K eine kompakte Teilmenge der komplexen Ebene mit $\partial K = \bigcup_i \partial G_i$, wobei die G_i die Komponenten des Komplements von K sind. $X := \partial K$, $\Omega :=$ Komplement von K. Dann läßt sich jede stetige Funktion auf X gleichmäßig approximieren durch Funktionen aus dem linearen Raum, erzeugt von den Funktionen $h_a(z) := \log|z-a|$ mit $a \in \Omega$.

SPEZIELLER SATZ VON WALSH: Sei K eine kompakte Teilmenge der komplexen Ebene, und Komplement von K zusammenhängend; dann ist Re P(K) dicht in $C(X,\mathbb{R})$.

(iii) Der Satz von Wilken

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $\mu \in R(\alpha)$ vollständig singulär; dann ist $\mu = 0$. Zum Beweis siehe [Lu, Seite 67-69].

(iv) Der Satz von Mergelyan über Polynomiale Approximation

Aus dem

HOFFMAN-WERMER LEMMA: Seien X ein kompakter Hausdorff-Raum, $1 \in A \subseteq C(X)$ eine abgeschlossene komplexe Teilalgebra und $\varphi \in S(A)$. Sei h eine beschränkte, meßbare Funktion auf X mit $|h| \leq C$ und

$$\inf_{u \in A} \sup_{m \in M(A,\varphi)} \int |u-h|\,dm = o.$$

Dann existiert eine Folge $u_n \in A$ mit $|u_n| \leq C$ für alle n und $u_n \to h$ bei $n \to \infty$ m - fast überall für alle $m \in M(A,\varphi)$

sowie dem Satz von F. und M. Riesz erhält man den folgenden

SATZ: Seien $A,B \subseteq C(X)$ abgeschlossene Unteralgebren mit $1 \in A \subseteq B$ und A Dirichlet-Algebra. Es sei $A \cap M(A)^o = \{o\}$, und jedes $\varphi \in S(A)$ besitze eine Fortsetzung $\Phi \in S(B)$. Dann ist $A = B$. Hieraus folgt dann der

SATZ VON MERGELYAN: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und Kompl K zusammenhängend. Dann ist $P(K) = A(K)$.

N.A. van Arkel

Vortrag 5: Die Hardysche Algebra I

Sei (X,Σ,m) ein Maßraum mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß m. Sei H eine w^*-abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(m)$ mit $1 \in H$ und L die Menge aller meßbaren Funktionen von X in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Wir definieren:

$L^\#$ sei die Menge aller $f \in L$, zu denen es eine Folge $\{u_n\} \subset H$ gibt mit $|u_n| \leq 1$, $\lim u_n = 1$, $u_n f \in L^\infty$.

$H^\#$ sei die Menge aller $u \in L$, zu denen es ein $f \geq o$ in L und eine Folge $\{u_n\}$ in H gibt mit $|u_n| \leq f$, $\lim u_n = u$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dann ist $H^{\#}$ eine Unteralgebra von $L^{\#}$ mit $H^{\#} \cap L^{\infty} = H$.

Sei Φ ein w*-stetiges, multiplikatives, nicht triviales Funktional auf H. Man kann dann Φ eindeutig zu einem „stetigen" Funktional auf $H^{\#}$ fortsetzen. Für $f \in L$ sei nun

$$\nu(f) = \inf\{\int |uf|dm \mid u \in H,\ \Phi(u) = 1\},$$

$$\tau(f) = \sup\{|\Phi(u)| \mid u \in H,\ |u| \leqq |f|\}.$$

Für die Funktionale ν und τ gelten dann

SATZ I: (i) Für $f \in L^{\#}$, $f \geqq o$, ist

$$\tau(f) = \inf\{\frac{\nu(pf)}{\nu(p)} \mid p \in L^1,\ p \geqq o,\ \nu(p) > o,\ pf \in L^1\}$$

(ii) Zu $f \in L^{\#}$, $f \geqq o$ existiert ein $u \in H^{\#}$ mit $|u| \leqq f$ und $\Phi(u) = \tau(f)$.

SATZ II: Sind f_u, f und g positive Funktionen aus $L^{\#}$ mit $f_u \leqq g$ für alle $u \in \mathbb{N}$ und $\overline{\lim}\ f_u \leqq f$, so ist auch $\overline{\lim}\ \tau(f_u) \leqq \tau(f)$.

Schließlich definieren wir für reelle $p \in L^{\infty}$
$\vartheta(p) = \inf\{\mathrm{Re}\ \Phi(u) \mid p \leqq \mathrm{Re}\ u,\ u \in H\}$.

SATZ III: Ist M die (nicht leere!) Menge der <u>positiven</u> Φ-darstellenden $v \in L^1$, so ist

$$\vartheta(p) = \sup\{\int pv\,dm \mid v \in M\}.$$

SATZ IV: Ist M in L^1 schwach kompakt, so sind die durch $\lambda(f) = \int fv\,dm$, $v \in M$, definierbar reellen Funktionale λ auf L^{∞} genau diejenigen, für welche $\lambda \leqq \vartheta$ gilt.

H. Leptin

Vortrag 6: <u>Das Ahern-Sarason-Gamelin-Argument</u>

Seien (X,Σ) ein Meβraum, m ein Wahrscheinlichkeitsmaβ auf Σ, $H \subseteq L^\infty(m)$ eine schwach-*-abgeschlossene Unteralgebra mit $1 \in H$ und $\varphi \neq 0$ ein schwach-*-stetiges multiplikatives lineares Funktional auf H. Dann ist nach früher

$$M = \{0 \leqq F \in L^1(m) : \int uF dm = \varphi(u) \text{ für alle } u \in H\}$$

nicht leer, und wir definieren N als die reelle lineare Hülle von M-M. Im Fall $\dim N < \infty$ existieren strikt dominante $F \in M$, d.h. solche mit $M \subseteq F\, L^\infty(m)$; dies sind nämlich genau die internen Punkte (der radicel kernel) der konvexen Menge $M \subseteq \operatorname{Re} L^1(m)$.

Eine Funktion $0 \leqq F \in L^1(m)$ heiβt Arens-Singer-Dichte, wenn $\log|\varphi(u)| \leqq \int \log|u| F dm$ für alle $u \in \operatorname{Invert} H$ (die Gesamtheit der invertierbaren $u \in H$), und F heiβt Jensen-Dichte, wenn $\log|\varphi(u)| \leqq \int \log|u| F dm$ für alle $u \in H$. Bezeichnen wir deren Gesamtheiten mit MAS bzw. MJ, so ist offenbar $MJ \subseteq MAS \subseteq M$.

Schlieβlich definieren wir die Funktionale $\alpha, \beta : \operatorname{Re} L^\infty \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(p) = \operatorname{Inf} \{-\log|\varphi(u)| : u \in H, |u|e^p \leqq 1\}$$
$$\beta(p) = \operatorname{Inf} \{-\log|\varphi(u)| : u \in \operatorname{Invert} H, |u|e^p \leqq 1\}.$$

Dann gilt:

i) $F \in MJ \Leftrightarrow \int PF dm \leqq \alpha(p)$ für alle $P \in \operatorname{Re} L^\infty(m)$
$F \in MAS \Leftrightarrow \int PF dm \leqq \beta(p)$ für alle $P \in \operatorname{Re} L^\infty(m)$

ii) Ist $M \subseteq \operatorname{Re} L^1(m)$ schwach kompakt, so sind MJ und MAS nicht leere, konvexe Mengen.

LEMMA 1: Es sei $F \in M$, derart daβ für $0 \leqq P_n \in \operatorname{Re} L^\infty(m)$ mit $\int P_n F dm \to 0$ bei $n \to \infty$ stets $\alpha(P_n) \to 0$ zutrifft. Dann ist die $L^1(m)$-Norm Hülle von N gleich der $L^1(m)$-Norm Hülle von $N \cap FL^\infty(m)$; Im Fall $\dim N < \infty$ ist also F strikt dominant.

LEMMA 2: Es sei $T = \log|\text{Invert } H| \subseteq \text{Re } L^\infty(m)$ und $\dim(N/N \cap T^o) < \infty$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein reelles $c(\epsilon) > 0$ mit

$$\beta(p) \leqq \epsilon + c(\epsilon) \int PFdm$$

für alle $0 \leqq P \in (N \cap T^o)^o$ und alle $F \in MAS$.

LEMMA 3: Sei $\dim N < \infty$ und $F \in MAS$ interner Punkt von MAS; dann ist $F \in M$ auch interner Punkt von M, also strikt dominant.

E. Schöneberger

Vortrag 7: Die Hardysche Algebra II

1. Verschiedene Aussagen meßbare Funktionen auf (X,Σ,m) betreffend

1.1. Durch geschicktes Rechnen leitet man aus der Taylorformel die folgende Abschätzung her:
Sei $z \in \mathbb{C}$, $t,\epsilon \in \mathbb{R}$, $0 < t \leqq \tau$, $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{t^n} \left| e^{tz} - \sum_o^{n-1} \frac{(tz)^k}{k!} \right| \leqq \frac{1}{\epsilon^n} \left| e^{(\tau+\epsilon)\text{Re}z} \right| + \frac{1}{n!}(|\text{Re}z| + |\text{Im}z|)^n.$$

Es sei nun (X,Σ,m) ein Wahrscheinlichkeitsfeld (d.h.: X ist eine Menge, auf der eine Sigma-Algebra Σ erklärt ist, und m ist ein Maß auf Σ mit $m(X) = 1$). $L(m)$ seien die m-meßbaren Funktionen auf X modulo Nullfunktionen.

1.2. Dann erlaubt die Abschätzung (1.1) zusammen mit dem Lemma von Lebesgue den Beweis folgender Aussagen:
Proposition: (a) Sei $p \in \text{Re } L^1(m), e^p \in L^1(m)$, und seien für alle $0 < t \leqq 1$: $h_t \in L^1(m)$ mit $|h_t| \leqq e^{tp}$ und $\int h_t dm = \exp t\int pdm$; dann gilt: $\text{Re}\frac{h_t - 1}{t} \to p$ in der L^1-Norm für $t \to 0$.

(b) Sei $p \in \text{Re } L^2(m)$, $e^p \in L^2(m)$, und seien für alle $0 < t \leqq 1$: $h_t \in L^2(m)$ mit $|h_t| \leqq e^{tp}$ und $\int h_t dm = \exp t\int pdm$ dann gilt: 1) $\overline{\lim_{t\to o}} \left|\frac{h_t - 1}{t}\right|^2_{L^2} \leqq 2\int p^2 dm - (\int pdm)^2$

2) $\text{Re}\frac{h_t - 1}{t} \to p$ L^2-schwach für $t \to 0$.

Bemerkung: Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen kann man sogar auf die $L^2(m)$-Norm-Konvergenz schließen (siehe H. König, Caltech-Notes).

1.3. Proposition: Sei $h = p+iq \in L(m)$, $p \in \mathrm{Re}\, L^2(m)$, $|t| \leq 1$. Sei weiter $e^{th} \in L^2(m)$ und $\int e^{sh} e^{th} dm = \int e^{sh} dm \int e^{th} dm$ für alle $|s|, |t| \leq 1$;
dann ist $h \in L^2(m)$.

Beweisidee: Es wird gezeigt, daß auf $[-1,1]$ $t \to \int e^{th} dm$ eine stetige Halbgruppe beschränkter Operatoren auf $\mathbb{C}$, also von der Form $t \to e^{t\lambda}$, $\lambda = \int p dm + i\beta \in \mathbb{C}$ ist. Dann wendet man (1,2),b 1, auf $h_t \equiv e^{th}$ an. $\square$

Korollar: Sei $q \in \mathrm{Re}\, L(m)$ mit $\int e^{isq} e^{itq} dm = \int e^{isq} dm \int e^{itq} dm$ für alle $|s|,|t| \leq 1$, dann ist q konstant.

1.4. Proposition: Sei $f \in L(m)$ und seien $\{f_n\} \subset L^\infty(m)$ mit $\sup\{\int |f-f_n| g dm \mid g \in M\} \to 0$ für $n \to \infty$, dann ist $e^f \in L^\#$.

Beweisidee: Ohne Einschränkung nimmt man $f \geqq 0$, $f_n \geqq 0$ für alle n, schätzt mit Hilfe des Szegö-Satzes $\tau\left(\frac{1}{1+te^f}\right)$ ab und zeigt, daß dieser Ausdruck gegen $\underline{1}$ läuft, falls $t \to 0$. Die relevanten Definitionen zeigen aber: $\tau\left(\frac{1}{(1+tf)}\right) \to 1$ für $t \to 0$ ist gleichbedeutend mit $f \in L^\#$. $\square$

1.5. Nützt man aus, daß für Folgen $\{u_n\} \subset H^\#$, $|u_n| \leqq f \in L^\#$ gilt: $u = \lim u_n \in H^\#$ und $\lim \Phi u_n = \Phi u$, wo $\Phi u = \int u dm$ auf H, dann folgt leicht der

Substitutionssatz: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ganz und sei $F(t_1,\ldots,t_n) \equiv \sup_{t_i \in \mathbb{R}^+} \{|f(z_1,\ldots,z_n)| \; |z_i| \leqq t_i\}$; dann gilt:
Aus $h_1,\ldots,h_n \in H^\#$, $F(|h_1|,\ldots,|h_n|) \in L^\#$ folgt: $f(h_1,\ldots,h_n) \in H^\#$ und $\Phi f(h_1,\ldots,h_n) = f(\Phi h_1,\ldots,\Phi h_n)$.

1. Korollar: Sei $h \in H^\#$ und $e^{|h|} \in L^\#$, dann ist $e^h \in H^\#$ und $\Phi(e^h) = e^{\Phi(h)}$.

2. Korollar: Sei $h \in H$, h reellwertig und $e^{|h|} \in L^\#$, dann ist h konstant.

2. Verschiedene Aussagen über H^p-Funktionen, das Abschlußtheorem

2.1. Wir setzen die in Vortrag 5,6 beschriebene Situation sowie $1 \in M$ voraus. Sei $1 \leq p < \infty$, dann definiert man:
$H^p \equiv L^p(m)$-Norm-Abschluß von H in $L^p(m)$.
Wegen des Satzes von Hahn-Banach ist dann H^p der $\sigma(L^p, L^q)$ - Abschluß von H in $L^p(m)$, also gleich der Bipolaren von H in $L^p(m)$. Benutzt man: Zu $u \in H^{\#}\ \exists\ \{u_n\} \subset H$, $|u_n| \leq u$, $u_n \to u$, dann gilt $H^{\#} \cap L^p(m) \subset H^p$. Schließlich bestehe K aus allen Funktionen $h \in L^1(m)$ mit $\int uhdm = \Phi(u) \cdot \int hdm$ für alle $u \in H$.

2.2. Beachtet man, daß m endliches Maß ist, und nutzt man die Hölder-Ungleichung aus, dann folgen aus den jeweiligen Definitionen ziemlich unmittelbar

1. Proposition: Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in H^p$ und $h \in K \cap L^q(m)$; dann gilt: 1) $uh \in K$
2) $\int uhdm = \int udm \int hdm$.

2. Proposition: Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $u \in H^p$ und $v \in H^r \cap L^q(m)$; dann gilt: 1) $uv \in H^r$
2) $\int uvdm = \int udm \int vdm$.

1. Korollar: Sei $u \in H^p$ und $v \in H^p \cap L^\infty$, dann ist $uv \in H^p$ und $\int uvdm = \int udm \int vdm$.

2. Korollar: Sei $u \in H^p$ und $v \in H^1 \cap L^q$(wo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), dann ist $uv \in H^1$ und $\int uvdm = \int udm \int vdm$.

2.3. Ähnlich wie in (2.1) definiert man:

$$(\mathrm{Re}\ H)^p \equiv L^p(m)\text{-Norm-Abschluß von Re } H \text{ in Re } L^p(m).$$

Die einfach zu beweisende Ungleichung: $\int q^2 dm \leq \int p^2 dm$ für $p+iq \in H^2$, $\int qdm = 0$ zeigt, daß $\mathrm{Re}\ H^2 = (\mathrm{Re}\ H)^2$.

2.4. Definiert man zur Abkürzung: $(K \cap \mathrm{Re}\ L^2)_o \equiv \{f \in K \cap \mathrm{Re}\ L^2$ mit $\int fdm = 0\}$ so zeigen Standardschlüsse der Funktionalanalysis:

Proposition: 1) $\mathrm{Re}\ L^2 = \mathrm{Re}\ H^2 \oplus (K \cap \mathrm{Re}\ L^2)_o$
2) $L^2 = H^2 \oplus \overline{H^2_o} \oplus (K \cap \mathrm{Re}\ L^2)_o + i(K \cap \mathrm{Re}\ L^2)_o$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

1. <u>Korollar</u>: Sei $p \in \mathrm{Re}\, H^2 \cap K$, dann ist p konstant.

2. <u>Korollar</u>: Sei $p \in H^2$ und p reell, dann ist p konstant.

3. <u>Korollar</u>: Seien $p, q \in \mathrm{Re}\, H^2$ und $p+iq \in K$, dann ist $p+iq \in H^2$.

2.5. Wir zitieren für das Folgende: Zu $0 \leqq f \in L^\#$ existiert ein $g \in H^\#$ mit $|g| \leqq f$, so daß gilt: $\Phi g = \tau(|g|) = \tau(f)$.

2.6. Zum Beweis des Abschlußtheorems <u>definieren</u> wir folgendes Objekt: $\varphi \equiv \{p \in \mathrm{Re}\, L^\infty(m) \mid \tau(e^{tp}) \geqq e^{t\int p\,dm}\}$, was in $\mathrm{Re}\, H^2$ liegt. Dann gilt:

<u>Lemma</u>: Sei $h = p+iq \in H^1 \cap L^\infty(m)$ und $p \in \varphi$, dann ist $h \in H$.

<u>Beweisidee</u>: Das 1. Korollar in (2.2) liefert: $h^n \in H^1 \cap L^\infty(m)$ und $(\int h\,dm)^n = \int h^n dm$, also $\int e^{th} dm = e^{t\int h\,dm}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach (2.5) gilt: Es existieren $u_t \in H, |u_t| \leqq e^{tp}$ mit $\int u_t dm = \tau(e^{tp})$ und $= e^{t\int p\,dm}$ erreichbar, dann aber $\int u_t e^{-th} dm = 1$, $|e^{-th} u_t| \leqq 1$. □

2.7. <u>Abschlußtheorem</u>: Es gilt: $K = L^1(m)$-Norm-Abschluß von $\{H+N+iN\}$.

<u>Beweis</u>: $h \in L^\infty$ mit $h = p+iq$, $h \perp N$, $h \perp H$. Dann gilt, weil $h \perp N$: $\int pg\,dm = \int p\,dm$ für alle $g \in M$, also nach dem Szegö-Satz: $\tau(e^{tp}) \geqq e^{t\int p\,dm} \Rightarrow p \in \varphi$. Zu e^{tp} existieren $\{u_t\} \subset H^\#, |u_t| \leqq e^{tp}$ mit $\int u_t dm = \tau(e^{tp})$ also $u_t \in H^\# \cap L^\infty = H$ und $\int u_t dm = e^{t\int p\,dm}$ erreichbar. Dann mit (1.2) (b),2: p (und analog q) aus $\mathrm{Re}\, H^2$. Da $h \perp H$, folgt $h \in K$, $\int h\,dm = 0$ also $\int q\,dm = 0 = \int p\,dm$ und dann (2.4) 3. Korollar: $h \in H^2$, also in H^1, also $h \in H^1 \cap L^\infty$ und $p \in \varphi$, damit $h \in H$ nach (2.5) und somit $h \perp K$. □

3. <u>Die invertierbaren Elemente in H</u>.

3.1. <u>Lemma</u>: Sei $u \in H$ und in $H^\#$ invertierbar, dann gilt:

1) $0 < |\Phi u| = \tau(|u|) < \infty$.

Sei weiter $v \in H^\#$ mit $|v| \leqq |u|, \Phi v = \tau(|u|)$, dann gilt:

2) $|\Phi v| = \tau(|v|)$

3) Es existiert $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$ mit $v = cu$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Hier folgt 1) unmittelbar aus der Multiplikativität von Φ und der Supermultiplikativität von τ. 2) folgt aus der Monotonie von τ und 3) aus der Positivität von m. $\square$

3.2. <u>Lemma</u>: Sei $0 \leqq p,\ q \in L$ mit $pq \leqq 1$ und $\tau(p)\tau(q) = 1$, dann ist $p, q \in L^{\#}$ und $pq = 1$.

<u>Beweis</u>: Wähle $\{u_n\} \subset H$, $|u_n| \leqq p$, $\Phi u_n > 0$, $\Phi u_n \to \tau(p)$ und analog $\{v_n\} \subset H$ zu q. Dann ohne Einschränkung $u_n v_n \to 1$ wählbar, da $|u_n v_n| \leqq 1$, $\Phi u_n v_n \to 1$. Dann: $|u_n v_n| \leqq 1$ und $|u_n v_n| p \leqq |u_n|$ liefert die Behauptung. $\square$

3.3. <u>Satz</u>: Sei $0 < f \in L$. Dann gilt:

1) Es existiert ein $u \in H^{\#}$, invertierbar in $H^{\#}$, mit $|u| = f$ genau dann, wenn: $\tau(f)\tau(\frac{1}{f}) = 1$ ist.
2) Dieses u ist - sofern es existiert - bis auf einen Faktor c, $|c| = 1$, eindeutig bestimmt.
3) Man kann das u - sofern es existiert - kennzeichnen durch: $u \in H^{\#}$, $|u| \leqq f$ und $|\Phi u| = \tau(f)$.

<u>Beweis</u>: Wegen (3.1) (1): gilt " $\Rightarrow$ " in 1). Sei $\tau(f)\tau(\frac{1}{f}) = 1$, dann ist wegen (3.2): $f, \frac{1}{f} \in L^{\#}$, also existiert nach (2.5) $v, u \in H^{\#}, |u| \leqq f, |v| \leqq \frac{1}{f}$ und $\Phi u = \tau(f)$, $\Phi v = \tau(\frac{1}{f})$. Also $uv \in H^{\#}, |uv| \leqq 1$ und $\Phi uv = 1$, somit $uv = 1$ und $|u| = f$. Also 1) gilt. 2) ist wegen (3.1), 3) erfüllt und 3) geht aus dem eben geführten Beweis hervor. $\square$

W. Beiglböck

Vortrag 8: <u>Die Herglotztransformation</u>

Als Einführung in den Problemkreis der Herglotz-Transformation (HT) wurde kurz die klassische HT skizziert. Zu einer harmonischen Funktion mit integrierbaren Randwerten bildet man die konjugiert harmonische Funktion, die im Nullpunkt verschwindet. Diese hat messbare, aber nicht notwendig integrierbare Randwerte. Die Abbildung der Randwertfunktionen ist die klassische HT. Dies zeigt, daß die HT gewissen reellwertigen Funktionen Imaginärteile zuordnet, die die Eigenschaft haben, daß die zusammengesetzten Funktionen analytischen Charakter haben.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Im abstrakten Fall - unter der generellen Voraussetzung: $1 \in M$ - gehen wir aus von dem Raum E, der definiert ist als die Menge aller $P \in \mathrm{Re}\, L$ mit der Eigenschaft: $\tau(e^{tP})\tau(e^{-tP}) = 1$ für alle $t > 0$. Auf dem Raum E haben wir das positive und lineare Funktional λ, das für $P \in E$ durch die Eigenschaft $\tau(e^{tP}) = e^{t\lambda(P)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Es gilt folgender Konvergenzsatz vom Lebesgueschen Typ:

Seien $P_n \in E$, $P \in \mathrm{Re}\, L$ mit $P_n \to P$ punktweise f.ü. Es existiere $e^F \in \mathrm{Re}\, L^{\#}$ mit $|P_n| \leq F$ für alle n. Dann ist $P \in E$, und es konvergiert $\lambda(P_n) \to \lambda(P)$.

Mit Hilfe des Szegö-Satzes lassen sich für $P \in \mathrm{Re}\, L$ Beziehungen zwischen $\int PVdm$ für alle $V \in M$, für die das Integral einen Sinn hat, einerseits und der Zugehörigkeit von P zu E und dem Wert $\lambda(P)$ andererseits herstellen. Insbesondere gilt für beschränkte Funktionen:

Sei $P \in \mathrm{Re}\, L^{\infty}$. Dann gilt: $P \in E \Leftrightarrow \int PVdm$ unabhängig von $V \in M$. In diesem Falle ist $\lambda(P) = \int PVdm$ für $V \in M$.

Den Zusammenhang mit dem Lumerschen Aufbau der Theorie der HT brachte folgender Satz:

Sei $P \in \mathrm{Re}\, L$ mit $\inf_{u \in H} \sup_{V \in M} \int |P - \mathrm{Re}\, u|\, dm = 0$. Dann ist $P \in E$ und $\lambda(P) = \int PVdm$ unabhängig von $V \in M$.

Nach diesen Betrachtungen über E können wir nun mit Hilfe des folgenden Satzes die HT definieren.

Sei $P \in \mathrm{Re}\, L$. Dann ist $P \in E \Leftrightarrow$ es existiert $Q \in \mathrm{Re}\, L$ mit der Eigenschaft: $e^{t(P+iQ)} \in H^{\#}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Q ist bis auf eine additive reellwertige Konstante eindeutig definiert. Es existiert genau ein solches Q mit: $\Phi(e^{t(P+iQ)}) = e^{t\lambda(P)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dieses Q definieren wir als die Herglotz-Transformierte von P. Die HT ist eine lineare Abbildung $T: E \to \mathrm{Re}\, L$.

Falls $P \in E$ und $TP \in L^{\#}$ ist, dann ist $P + iTP \in H^{\#}$ und $\Phi(P+iTP) = \lambda(P)$.

M. Mürmann

Vortrag 9: Spezielle Situationen

Wir setzen die in den letzten Vorträgen beschriebene Situation mit $1 \in M$ voraus.

Lemma 1: Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $K \cap \operatorname{Re} L^1(m) \subseteq L^\infty(m)$

ii) $M \subseteq L^\infty(m)$ und $\dim N < \infty$

iii) $L^o(m) \subseteq L^\#$ und $\dim N < \infty$.

Dabei besteht $L^o(m)$ aus allen Funktionen $f \in L$ mit $\log^+|f| \in L^1(m)$.

Korollar: Seien die Bedingungen von Lemma 1 erfüllt. Dann gelten

i) $(\operatorname{Re} H)^p = E \cap \operatorname{Re} L^p(m)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$

ii) $\operatorname{Re} L^p(m) = (\operatorname{Re} H)^p \oplus N \cap \operatorname{Re} L^\infty(m)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$.

iii) Seien $1 < p < \infty$, $P \in E \cap L^p(m)$ und Q die Herglotztransformierte von P. Dann ist $P + iQ \in H^p$. Ferner existiert ein $M_p > 0$ mit

$$\|Q\|_{L^p} \leq M_p \cdot \|P\|_{L^p}$$

für alle $P \in E \cap L^p(m)$.

iv) Es ist $(\operatorname{Re} H)^p = \operatorname{Re}(H^p)$ für alle $1 < p < \infty$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $M = \{1\}$, d.h. $N = 0$

ii) $|\int f dm| \leq J(|f|)$ für alle $f \in K$ (Jensenungleichung) auf K
Hierbei bedeutet für $0 \leq F \in L^o$

$$J(F) = \exp(\int \log F dm).$$

iii) $\nu(F) \leq J(F)$ für alle $0 \leq F \in L^1(m)$

iv) $\nu(F) = J(F)$ für alle $0 \leq F \in L^1(m)$ (Szegö-Theorem)

v) $J(F) \leq \tau(F)$ für alle $0 \leq F \in L^\infty(m)$

vi) $L^\# = L^o$ und $J(F) = \tau(F)$ für alle $0 \leq F \in L^o = L^\#$

vii) $\operatorname{Re} L^\infty \subseteq E$

viii) $E = \operatorname{Re} L^1$ und $\lambda(p) = \int P dm$ für alle $P \in E$

ix) $K \cap \operatorname{Re} L^1 = \mathbb{R}$ (d.h. die reellwertigen Funktionen aus K sind konstant).

Satz 2: Die Bedingungen von Satz 1 seien erfüllt. Sei $0 \leqq F \in L^{\#} = L^{o}$. Dann existieren Funktionen $u \in H^{\#}$ mit $\Phi(u) \neq 0$ und $|u| = F$ genau dann, wenn $J(F) > 0$, d.h. $\log F \in L^1(m)$. In diesem Fall ist u bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage 1 eindeutig bestimmt.

Korollar 1: Sei $u \in H^{\#}$ mit $\log|u| \in L^1(m)$. Dann existiert eine Zerlegung von u in der Form $u = f \cdot F$ mit $f \in H^{\#} \cap L^{\infty}(m) = H$ vom Betrage $|f| = 1$ (der innere Faktor), und mit $F \in H^{\#}$ invertierbar mit $|F| = |u|$ (der äußere Faktor). Die Zerlegung ist eindeutig bis auf konstante Faktoren vom Betrage 1. Ein äußerer Faktor ist die Funktion $F = \exp(\log|u| + iT(\log|u|))$, wo $T(\log|u|)$ die Herglotz-transformierte von $\log|u|$ bezeichnet.

Korollar 2: Es ist

$$H^{\#} = \{\frac{u}{v} : u, v \in H,\ v \text{ in } H^{\#} \text{ invertierbar}\}.$$

E. Schöneberger

Vortrag 10: Der Maximalitätssatz

Es wurde die folgende Version des Maximalitätssatzes bewiesen (vgl. H. König: Ein abstrakter Mergelyan Satz):

Es sei (X, Σ, m) ein Wahrscheinlichkeitsraum, ferner $H \subset B \subset L^{\infty}(m)$ komplexe $\sigma(L^{\infty}, L^1)$-abgeschlossene Unteralgebren, die die Konstanten enthalten. m sei multiplikativ auf H mit dim $N < \infty$, wobei N die reelle lineare Hülle aller Differenzen repräsentierender Dichten bezeichnet. Das durch m definierte multiplikative lineare Funktional φ auf H sei zu einem $\sigma(L^{\infty}, L^1)$-stetigen multiplikativen linearen Funktional ψ auf B fortsetzbar. Schließlich gelte $\mathrm{Re}\, B \subset T^{oo}$, wobei $T = \log|\mathrm{Invert}\, H| \subset \mathrm{Re}\, L^{\infty}$ bedeutet.
Dann ist $H = B$.

W. Hackenbroch

Vortrag 11: Abstrakte Sätze vom Mergelyanschen Typ

Durch Kombination des Maximalitätssatzes (Vortrag 10) mit dem abstrakten Satz von F. und M. Riesz (Vortrag 2) sowie dem Abschlußtheorem (Vortrag 7, 2.7) erhalten wir die beiden folgenden Sätze:

Satz 1: Seien (X,Σ) ein Meßraum, $A,B \subseteq B(X,\Sigma)$ komplexe Unteralgebren mit $1 \in A \subseteq B$. Wir setzen voraus:
i) Re B ist in der $\sigma(B(X,\Sigma),ca(X,\Sigma))$-abgeschlossenen linearen Hülle von $\log|\mathrm{Invert}\ A|$ enthalten.
ii) $A^{\perp} \cap M(A)^{o} \subseteq B^{\perp}$
iii) Jedes $\varphi \in S(A)$ ist fortsetzbar zu einem $\psi \in S(B)$.
iv) Es ist $\dim N(A,\varphi) < \infty$ für alle $\varphi \in S(A)$.
Hierbei bedeutet $N(A,\varphi) \subseteq ca(X,\Sigma)$ den von $M(A,\varphi) - M(A,\varphi)$ aufgespannten linearen Teilraum.
Dann ist B in der $\sigma(B(X,\Sigma),ca(X,\Sigma))$-Hülle von A enthalten.

Satz 2: Die Situation sei wie in Satz 1; wir setzen voraus:
i) $M(A) = M(B)$
ii) $A^{\perp} \cap M(A)^{o} = B^{\perp} \cap M(B)^{o}$.
Dann ist B in der $\sigma(B(X,\Sigma),ca(X,\Sigma))$-Hülle von A enthalten.

Hieraus ergibt sich leicht der klassische Satz von Mergelyan:
Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und Kompl K besitze nur endlich viele Zusammenhangskomponenten. Dann ist $R(K) = A(K)$.

R. Rentschler

Literatur:

[AS 1] P.R. AHERN and D. SARASON, The H^p spaces of a class of function algebras. Acta Math. 117, 123-163 (1967).

[AS 2] P.R. AHERN and D. SARASON, On some Hypo-Dirichlet Algebras of analytic functions. Amer. J. Math. 89, 932-941 (1967).

[Ca] L. CARLESON, Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation. Math. Scand. 15, 167-175 (1964).

[Ga-Lu] T. GAMELIN and G. LUMER, Universal Hardy class, Advances in Math. 2, 118-174 (1968).

[Gar] J. GARNETT, On a theorem of Mergelyan. Pacific J. Math. 26, 461-467 (1968).

[Gar-Gli] J. GARNETT and I. GLICKSBERG, Algebras with the same multiplicative measures, J. Funct. Anal. 1, 331-341 (1967).

[Gli 1] I. GLICKSBERG, Dominant representing measures and rational approximation. Trans. Amer. Math. Soc. 130, 452-462 (1968).

[Gli 2] I. GLICKSBERG, The abstract F. and M. Riesz theorem. J. Funct. Anal. 1, 109-122 (1967).

[Ho] K. HOFFMAN, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, Inc., 1962.

[Ho-Ro] K. HOFFMAN and H. ROSSI, Extensions of positive weak * continuous functionals. Duke Math. Journ. 34, 453-466 (1967).

[Kö 1] H. KÖNIG, Zur abstrakten Theorie der analytischen Funktionen I, Math. Z. 88, 136-165 (1965), II, Math. Ann. 163, 9-17 (1966) und III, Arch. Math. 18, 273-284 (1967).

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

[Kö 2] H. KÖNIG, Lectures on abstract H^p-theory. Summer School on topological algebra theory, Bruges 1966.

[Kö 3] H. KÖNIG, Theory of abstract Hardy spaces, Lecture Notes, California Institute of Technology 1967.

[Kö 4] H. KÖNIG, Über das von Neumannsche Minimax-Theorem, Arch. Math. 19, 482-487 (1968).

[Kö 5] H. KÖNIG, Ein abstrakter Mergelyan Satz (erscheint demnächst).

[Lu] G. LUMER, Algèbres de fonctions et espaces de Hardy, Lecture Notes in Mathematics 75, Springer 1968.

[See-Kö] G.L. SEEVER and H. KÖNIG, The abstract F. and M. Riesz theorem (erscheint demnächst).

[We 1] J. WERMER, Banach Algebras and Analytic Functions, Advances Math. 1, 51-102 (1961).

[We 2] J. WERMER, Seminar über Funktionen-Algebren, Lecture Notes in Mathematics 1, Springer 1964.

[Za] L. ZALCMAN, Analytic Capacity and Rational Approximation, Lecture Notes in Mathematics 50, Springer 1968.

E. Schöneberger (Saarbrücken)