MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

# T a g u n g s b e r i c h t 15 / 1969

## Grundlagen der Geometrie

25.5. - 31.5.1969

In diesem Jahre fand die Pfingsttagung über die Grundlagen der Geometrie unter der Leitung der Herren Professoren F. Bachmann und H. Karzel statt.

Wegen der großen Anzahl der angemeldeten Vorträge - erfreulicherweise auch von vielen ausländischen Gästen - wurde das Vortragsprogramm bereits am Pfingstmontag begonnen.

Der Themenkreis der Referate und anschließenden Diskussionen behandelte sehr viele Fragen der Grundlagen der Geometrie.

<u>Teilnehmer</u>

| | |
|---|---|
| André | Hoyer |
| Artmann | Karzel |
| Bachmann | Kinder |
| Baer | Kroll |
| v.Benda | Lingenberg |
| Biallas | Melchior |
| Bilinski | Meyer |
| Breitsprecher | Misfeld |
| Bröcker | Nolte |
| Dorn | Ott |
| Ellers | Pieper |
| Garner | Salzmann |
| Glock | Smith |
| Gupta | Spengler |
| Heise,U. | Strambach |
| Heise,W. | Vitzthum |
| Hotje | Wille |
| | Wolff |

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

## Vortragsauszüge

### E.W.ELLERS: Koprodukte von Bewegungsgruppen

Eine Bewegungsgruppe ist eine Gruppe G zusammen mit einer invarianten Teilmenge D von involutorischen Elementen von G für die der Dreispiegelungssatz gilt. Mit G kann eine geometrische Struktur verbunden werden, deren Geraden die Elemente von D sind. Die Bewegungsmorphismen sind die Homomorphismen von G, die die geometrische Struktur erhalten. Die Bewegungsgruppen bilden zusammen mit den Bewegungsmorphismen eine Kategorie. Es wird gezeigt, daß in dieser Kategorie Koprodukte existieren.

### W.HEISE: Eine Definition des Möbiusraumes

Es wird eine Definition des Möbiusraumes angegeben, die analog der projektiven Geometrie einen synthetischen Aufbau der höher dimensionalen Kreisgeometrie zuläßt. Zu jedem Punkt eines Möbiusraumes gibt es einen affinen Teilraum, dessen Dimension gleich der des Möbiusraumes ist. In einem Möbiusraum einer Dimension $\geq 3$ sind die Ebenen ovoidal, d.h. sie erfüllen den Büschelsatz.

### H.SALZMANN: "4-dimensionale Ebenen"

Eine kompakte topologische projektive Ebene P ist genau dann 4-dimensional, wenn ihr Koordinatenbereich K homöomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Abgeschlossene echte Unterebenen sind dann homöomorph zur reellen projektiven Ebene und werden von jeder Geraden getroffen, sind also Baer-Unterebenen.Kollineationen, die eine solche Baer-Unterebene punktweise fest lassen, sind stetige Involutionen. Läßt eine stetige Kollineation zwei Ecken eines Vierecks fest und vertauscht die beiden anderen, so ist sie involutorisch. Ist die Gruppe der stetigen Kollineationen 4- Eckstransitiv, so ist P desarguessch.

### K.VITZTHUM: Affine Pseudoebenen

Die Axiome der affinen Ebene werden so weit abgeschwächt, daß gerade noch Koordinaten eingeführt werden können.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Diese bilden einen Ternar, in dem nur noch $T(0,x,y) = T(x,0,y) = T(1,y,0) = T(y,1,0) = y$ für alle $x,y$ zu gelten braucht. Nach geeigneten Abänderungen der bei affinen Ebenen gebräuchlichen Definitionen wird eine Theorie der Kollineationsgruppen entwickelt. Die Translations-Pseudoebenen sind durch ihre Translationsgruppe charakterisiert.

S.BILINSKI: Eine analytische Begründung der Liniengeometrie des n-dimensionalen projektiven Raumes

Die Liniengeometrie des n-dimensionalen projektiven Raumes wird möglichst einfach und harmonisch aufgebaut, wenn man wegen der Symmetrie und aus ökonomischen Gründen neben der Geraden auch die "Hypergerade" als zweites und gleichberechtigtes Grundelement einführt. Dabei ist die "Hypergerade" das zu der Geraden duale Gegenstück, nämlich der (n-2)-dimensionale lineare Unterraum des Raumes $P^n$. Im gegebenen analytischen Modell des n-dimensionalen projektiven Linienraumes werden die Gerade und die Hypergerade als Ptolemäische Matrizen (n+1)-ter Ordnung erklärt. Die Inzidenz dieser zwei Elemente bedeutet das Verschwinden des Produktes der betreffenden Matrizen. Es sind weiter auch andere abgeleitete Begriffe für das gegebene Modell analytisch gedeutet, und deren wichtigsten Eigenschaften bewiesen.

D.BIALLAS: Eine Anwendung verallgemeinerter Doppelverhältnisse

Es wurde gezeigt, wie man mit Hilfe verallgemeinerter Doppelverhältnisse zwei Teilräumen eines euklidischen (unitären) endlich dim.Vektorraumes über $R(C)$ Schnittwinkel zuordnen kann. Diese liefern zusammen mit der Summe der Dimensionen der Räume ein vollständiges Invariantensystem bezüglich der orthogonalen (unitären) Transformationen. Für Einzelheiten siehe Abh.Math.Sem.Univ.Hbg, 34, 1969.

B.ARTMANN: Uniforme Hjelmslev Ebenen und Verallgemeinerungen

Die von einer uniformen H-Ebene in einer Klasse benachbarter Punkte induzierte Geometrie ist eine gewöhnliche affine

Ebene (Lüneburg). Dual dazu wird in einer Klasse benachbarter Geraden eine dualaffine Ebene induziert. Man kann nun, ausgehend von einer gewöhnlichen projektiven Ebene P, eine uniforme H-Ebene konstruieren, indem man den Punkten von P affine und den Geraden von P dualaffine Ebenen zuordnet und die Inzidenz geeignet definiert. Auf diese Weise erhält man alle uniformen H-Ebenen. Das Verfahren läßt sich auch durchführen, wenn man statt einer projektiven Ebene P eine projektive H-Ebene $\mathfrak{H}^*$ wählt, man erhält dann H-Ebenen mit einer minimalen Nachbarschaftsrelation. Geht man von einer projektiven Ebene P aus und iteriert die Konstruktion, so erhält man H-Ebenen endlicher Höhe.

E.GLOCK: Symmetrische Inzidenzstrukturen

Eine Inzidenzstruktur I = ($\mathfrak{P}$,$\mathfrak{G}$,I) heißt symmetrisch, wenn $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$ und a I b $\Leftrightarrow$ b I a gilt. Es wird gezeigt, daß die Isomorphieklassen symmetrischer Inzidenzstrukturen bijektiv den Typen von Polaritäten gewöhnlicher Inzidenzstrukturen zugeordnet sind. Bestimmt man alle endlichen offenen nichtausgearteten symmetrischen Inzidenzstrukturen, bis auf Isomorphie und freie Äquivalenz, so kennt man alle Polaritäten - dem Typ nach - einer endlich erzeugten freien Ebene. In der Tat kann man, ausgehend von einer Menge übersichtlich gebauter Grundstrukturen, durch ein konstruktives Verfahren alle "Normalformen" von endlichen offenen nichtausgearteten symmetrischen Inzidenzstrukturen erhalten. Daraus folgert man Sätze über die Anzahl der Typen von Polaritäten mit vorgegebener Anzahl selbstkonjugierter Punkte bei einer vorgegebenen freien Ebene endlichen Ranges. Bei freien Ebenen, die nicht endlich erzeugbar sind, gelingt es lediglich,untere Schranken für die Anzahl der Typen von Polaritäten anzugeben.

R.WILLE: Kongruenzklarsengeometrien

Unter einem "Satz vom Mal'cev Typ" versteht man einen Satz, der die Gültigkeit einer gegebenen Eigenschaft für alle (universellen) Algebren einer primitiven Klasse durch eine Aussage über die Gültigkeit gewisser Gleichungen in der

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

primitiven Klasse charakterisiert. Es wurde ein algebraisch-geometrisches Satzschema angegeben, mit dem man für die Gültigkeit gewisser geometrischer Aussagen in der Kongruenzklassengeometrie einer Algebra "Sätze vom Ma'cev Typ" gewinnen kann. So erhält man z.B.:

SATZ: Die Kongruenzklassengeometrie jeder Algebra einer primitiven Klasse $\mathfrak{A}$ ist genau dann desarguessch, wenn eine 3-stellige, algebraische Operation $\bar{p}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\bar{p}\,(x,x,z) = z$ und $\bar{p}\,(x,z,z) = x$ existiert.

Als Beispiel der vielfältigen Anwendungen solcher Sätze sei folgendes Resultat erwähnt:

SATZ: Ein Ring R mit Einselement ist genau dann kommutativ, wenn die Kongruenzklassengeometrie jedes unitalen Linksmoduls über R dem Satz von Pappos genügt.

U.OTT: <u>Gruppentheoretische Kennzeichnung PAPPUSscher affiner Ebenen von Charakteristik $\neq 2$</u>

S-Gruppen, deren Büschel alle 2-dreiseitverbindbar sind, kennzeichnen die PAPPUSschen affinen Ebenen von Charakteristik $\neq 2$. Damit ist gemeint, daß die duale Gruppenebene einer S-Gruppe mit nur 2-dreiseitverbindbaren Büscheln eine PAPPUSsche affine Ebene von Charakteristik $\neq 2$ ist, und auch umgekehrt jede PAPPUSsche affine Ebene von Charakteristik $\neq 2$ als duale Gruppenebene einer S-Gruppe - in der dann notwendig alle Büschel 2-dreiseitverbindbar sind - darstellbar ist. Der Beweis stützt sich auf den Begriff der erweiterten Spiegelungsgruppe einer Translationsebene; sie ist eine Faktorgruppe der von den Punkten der Ebene erzeugten freien Gruppe und besitzt die von den Punktspiegelungen der Ebene erzeugte Gruppe als homomorphes Bild. Gilt in der Translationsebene der Satz von PAPPUS-PASCAL, dann ist ihre erweiterte Spiegelungsgruppe eine S-Gruppe, deren duale Gruppenebene zu der Ebene isomorph ist. Andererseits ist jede affine Ebene, die als duale Gruppenebene einer S-Gruppe darstellbar ist, eine PAPPUSsche affine Ebene.

H.KINDER: Eine geometrische Interpretation der Galoisgruppe von $x^n - 1$

Sei $n$ eine natürliche Zahl, K ein Körper mit $n.\ 1 \neq o$, V ein Vektorraum $\neq \{o\}$ über K. Die Galoisgruppe von $x^n - 1$ über K tritt auf als Gruppe derjenigen teilerfremden Restklassen $k + \mathbb{Z}.n$ modulo $n$, für die jede zyklische Klasse von n.Ecken aus V(s.F.Bachmann und E.Schmidt, n-Ecke, BI-Taschenbuch, erscheint demnächst) mit einem n.Eck $(a_1,...,a_n)$ auch das n.Eck $(a_{1k}, a_{2k},...,a_{nk})$ enthält (Indizes mod . n zu lesen). Das läßt sich anwenden auf eine Verallgemeinerung des Begriffs der zyklischen n.Ecks Klassen.

K.MELCHIOR: Kettengeometrien über kommutativen Ringen

Berührstrukturen mit Nachbarelementen wurden als Verallgemeinerung der Berührstrukturen [aus W.BENZ: Möbiusgeometrie über einem Körperpaar, Arch.Math. 13] definiert. Analog zu den dortigen Geometrien wurde für jede kommutative Algebra L über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ eine Geometrie (K,L) definiert. Diese Geometrien wurden unter den Berührstrukturen mit Nachbarelementen gekennzeichnet durch die Existenz einer Automorphismengruppe G mit

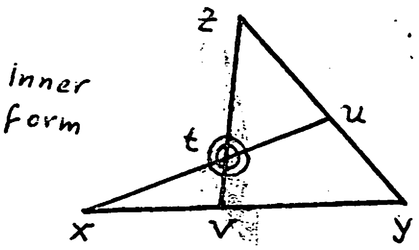
(1) Jede Involution mit einem Fixpunkt besitzt noch einen weiteren nicht benachbarten.

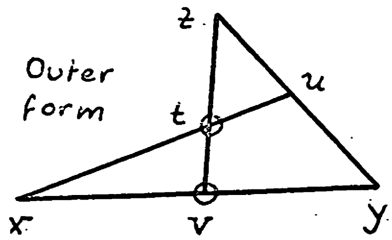
(2) Zu Punkten $A_i$( i=1,...,4), von denen höchstens $A_1$ und $A_2$ benachbart sind, gibt es genau ein $\gamma \in G$ mit $A_1^\gamma = A_2, A_2^\gamma = A_1, A_3^\gamma = A_4, A_4^\gamma = A_3$.

Es wurde bemerkt, daß man für K auch einen beliebigen kommutativen Ring mit 1 einsetzen kann, wenn man für G eine zusätzliche Eigenschaft fordert.

H.N.GUPTA: Neueres über das Axiom von Pasch
(Talk presented in English)

A. The Axiom of Pasch as given by Pasch and used by Hilbert can be split up into two parts, called respectively the inner and outer form. (See Figure below)




IF. $B(xvy) \wedge B(yuz) \longrightarrow Vt(B(ztv) \wedge B(xtu))$ (B is a 3-place
OF $B(xtu) \wedge B(yuz) \longrightarrow Vv(B(xvy) \wedge B(ztv)$ Relation of betweenness)

It is well known that the inner form can be derived from the outer form and linear axioms of order. The speaker has recently proved that the outer form can also be proved from the inner form together with axioms of segment congruence (eg.Borsak-Szmielew). It is open whether one can give a proof without the congruence axioms.

B. The speaker will give a slightly modified version of Szczerba's proof of independence of Pasch's axiom within Tarski's system of axioms. It will be shown that if a field F has a positive domain, which is assumed to be closed with respect to addition but not necessarily with respect to multiplication, then Pasch's axiom holds if and only if the positive domain is closed with respect to multiplication. Szczerba's example of the real field with a positive domain not closed with respect to multiplication will be introduced.

H.-J.KROLL: <u>Über angeordnete Möbiusebenen</u>

Der Begriff der Ordnungsfunktion wird auf Möbiusebenen angewendet. Nach der Definition von zwei Klassen von Ordnungsfunktionen werden eine Vorschrift zur Definition eines Trennsymboles für konzyklische Punktequadrupel und kennzeichnende Eigenschaften für Trennsymbole, die sich durch Ordnungsfunktionen beschreiben lassen, angegeben. Weiterhin werden die Begriffe Halbordnung, Anordnung und (W)-Halbordnung einer Möbiusebene definiert. Zum Schluß werden die Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung betrachtet.

H.WOLFF: Euklidische Geometrie mit beliebigem Index
(Die Geometrie der regulären metrischen Vektorräume)

Der Gegenstand des Vortrages ist die euklidische Geometrie, und zwar die $n$-dimensionale euklidische Geometrie über einem beliebigen Körper (von Charakteristik $\neq 2$) und mit beliebigem Index. (Das Neue liegt in dem Beliebig-Lassen des Index, d.h. der Dimension der maximalen totalisotopen Teilräume. In der klassischen euklidischen Geometrie ist der Index = 0.) Diese Geometrie ist genau die Geometrie der regulären metrischen Vektorräume (regulär heißt: nur der Nullvektor ist zu allen Vektoren orthogonal).

Für diese Geometrie wird eine axiomatische Theorie aufgebaut, indem die Bewegungsgruppen der regulären metrischen Vektorräume charakterisiert werden als abstrakte, aus involutorischen Elementen erzeugte Gruppen mit gewissen Eigenschaften der involutorischen Erzeugenden. (Die Bewegungsgruppe eines regulären metrischen Vektorraumes ist die von den sämtlichen Spiegelungen an Hyperebenen erzeugte Gruppe, wobei Hyperebene heißt: Nebenklasse eines regulären $(n-1)$-dimensionalen Teilraums.)

Speziell liegt hier (für reellen Grundkörper, Dimension 4 und Index 1) eine axiomatische Theorie der Geometrie der speziellen Relativitätstheorie vor.

H.HOTJE: Sphärisch-projektive Räume und sphärische Inzidenzgruppen

Ein sphärisch-projektiver Raum wird so definiert, daß man einen allgemeinen projektiven Raum erhält, wenn man gegenüberliegende Punkte identifiziert in der Art, wie man ein Modell eines elliptischen Raumes aus dem reellen sphärischen Raum zu erzeugen pflegt. Nach Einführung einer Anordnung in einem solchen Raum kann man angeben, wann er sich darstellen läßt als $V^*/P$, wo $V$ Linksvektorraum über einem Schiefkörper $K$ und $P$ eine Untergruppe von $K^*(\cdot)$ vom Index 2 ist.

Ein sphärisch-projektiver Raum soll eine sphärische Inzidenzgruppe sein, wenn er noch Gruppe ist und die Abbildung $A_1 : X \longrightarrow A \cdot X$ Kollineation ist. Durch die Identifizierung

wird die sphärische zu einer projektiven Inzidenzgruppe, und aus jeder projektiven läßt sich durch Gruppenerweiterung eine sphärische gewinnen. Eine desarguessche sphärische Inzidenzgruppe mit einer Dimension größer als 1, die geometrisch angeordnet ist, und bei der $A_e$ für alle A ordnungserhaltend ist, läßt sich durch einen normalen Fastkörper (F,K) mit einem Normalteiler P von F* mit (K* : P) = 2 in der Form F*/P darstellen.

K.STRAMBACH: Sphärische Kreisebenen mit einfacher Automorphismengruppe

Zeichnet man auf der 2-Sphäre ein System von Jordankurven, von sogenannten "Kreisen", so aus, daß durch je drei verschiedene Punkte genau ein Kreis geht, so erhält man eine sphärische Kreisebene; ihre volle Automorphismengruppe ist eine Liegruppe. Es wurden alle sphärischen Kreisebenen bestimmt, die eine (abstrakt) einfache Gruppe von Automorphismen zulassen.

S.BREITSPRECHER: Koordinaten

Für jeden Verband $\mathfrak{V}$ definiert man einen "Verbandsring" $Z[\mathfrak{V}]$ und beschreibt als natürliche Koordinatisierung von $\mathfrak{V}$ einen Funktor $\mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{M}_{Z[\mathfrak{V}]}[\Sigma^{-1}]$ in eine gewisse Quotientenkategorie von $\mathfrak{M}_{Z[\mathfrak{V}]}$.

Modell ist die folgende Situation: R ein Ring, P ein kleiner projektiver Erzeuger von $\mathfrak{M}_R$, $\mathfrak{V} = L(P)$, $A = Z[\mathfrak{V}]$, D: $\mathfrak{M}_R \longrightarrow \mathfrak{M}_A$ wird definiert durch $DE(X) = Hom_R(P/X,E)$. Wenn $P = P_1 \oplus P_2$, $P_1 \cong P_2$ Erzeuger, ist, so ist D voll treu, also $\mathfrak{M}_R$ eine Quotientenkategorie von $\mathfrak{M}_A$.

J.T.SMITH: Ein gegenständliches Axiomensystem für die n-dimensionale nicht-elliptische metrische Geometrie

An axiomatization of nonelliptic metric geometry of arbitrary dimension $\geq 3$ is presented. The undefined notions are point, line, and orthogonality of lines. Incidence is set inclusion. Incidence axioms and their consequences are adapted from

WYLER (Duke J.,1953). A form of Pasch's Axiom is postulated, allowing the definition of "planes" - this follows GUPTA (Diss.Berkeley, 1964). LENZ's orthogonality axioms (Math. Ann.,1962) are adopted verbatim. A <u>flat</u> is a set f of points closed under collinearity. A <u>reflection</u> in f is a self inverse orthogonality preserving collineation. Reflections in e and f commute iff e and f are incident or orthogonal. Existence of reflections in all points and lines is postulated. It follows that there exists a unique reflection in each flat of finite dimension or codimension. The argument is adapted from BACHMANN's book (AGS, 1959). The 3 reflection axioms for hyperplanes with a common hyperline or a common orthogonal line are postulated. Each plane then satisfies BACHMANN's axioms for a nonelliptic metric plane, and each 3 space, SCHERF's axioms (Diss.Kiel, 1961) for a nonelliptic metric 3 space. The geometry above a hyperpoint is an elliptic plane. Embedding in an ideal projective metric geometry follows WYLER and LENZ. The Pappus Axiom holds, and the absolute polarity is projective.

Herr V Havel (Brno) konnte leider nicht an der Tagung teilnehmen, schickte uns aber folgenden Vortragsauszug:

V.HAVEL: <u>Schwache Ovale und Koordinatisierung von projektiven Ebenen</u>

Mithilfe der sog. schwachen Ovale in projektiven Ebenen konstruiert man ein Koordinatisierungsverfahren, das die kürzlich gewonnenen Resultate von R.ARTZKY aus Israel J.M.4(1966), 43-53 weiter verallgemeinert.

Werner Heise

<u>Hannover</u>