# MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 26 /1969

## Endliche Gruppen und Permutationsgruppen

3.8. bis 9.8.1969

Die Tagung stand unter Leitung von Herrn Prof. Dr. B. Huppert (Mainz). Behandelt wurden spezielle Probleme aus den Gebieten der auflösbaren Gruppen, der Darstellungstheorie endlicher Gruppen und der endlichen Permutationsgruppen.

Teilnehmer

Baer, R. (z.Zt. Oberwolfach)
Barnes, D.W. (Tübingen)
Bender, H. (Mainz)
Birkenstock, H.-J. (Tübingen)
Blessenohl, D. (Kiel)
Brandis, A. (Heidelberg)
Busekros, A. (Stuttgart)
Dermott, J.M. (Newcastle)
Doerk, K. (Mainz)
Fischer, B. (Frankfurt)
Fong, P. (London)
Gaschütz, K. (Kiel)
Gottschling, E. (New York)
Groß, F. (Kiel)
Gruenberg, K. (London)
Hawkes, T. (Coventry)
Held, D. ( Wiesbaden)
Hunt, D. (Coventry)
Johnson, . (Kiel)
Kegel, O.H. (London)
Klaiber, B. (Mainz)
Kovács, L.G. (Hackett)
Kuhn, H.(Stuttgart)
Lorenz, F. (Konstanz)
Maier, . (Stuttgart)
Mann, A. (Princeton)
Roesler, F. (Münster)
Rowlinson, P. (Oxford)
Scimemi, B. (Padova)
Scott, L.L. (Chicago)
Smith, M. (Oxford)
Snapper, E. (Hanover/USA)
Schmidt, P. (Tübingen)
Schmidt, R. (Kiel)
Tamaschke,O. (Tübingen)
Wielandt, H. (Tübingen)

Vortragsauszüge

McDermott, J.: A class of 3/2-transitive groups

The problems considered in this talk are suggested by the observation that if $m = 1 + 2^s$, the permutation representation of $SL(2,m-1)$ on the cosets of a dihedral subgroup of order $2m$ is 3/2-transitive. As a first step towards a characterisation of these groups, we prove that if $G$ is a non-soluble simply transitive 3/2-transitive group with subdegrees $1,p,\dots,p$ ($p$ any prime), then $p > 5$ is Fermat and $G$ is essentially $SL(2,p-1)$ in the above representation. The proof leads naturally to a consideration of $Z$ -groups, which are 3/2-transitive groups satisfying conditions similar to those which define Zassenhaus groups. We can prove that if $G$ is a simply transitive $Z^*$-group with subdegrees $1,m,\dots,m$, and if there is a prime $p$ such that $p|m$, $p^2 \nmid m$ than $m = 1 + 2^s > 5$ and $G$ is essentially $SL(2,m-1)$, acting as described above. It seems reasonable to conjecture that this result is true even if we omit the hypothesis about the divisors of $m$.

Fischer, B.: 3-Transpositionen in endlichen Gruppen

Unter den endlichen Gruppen, die von einer Klasse $D$ konjugierter 3-Transpositionen erzeugt werden, gibt es drei Gruppen $M(ij)$, die kürzlich gefunden wurden. Es wurden einige Untergruppen $U = \langle U \cap D \rangle$ dieser Gruppen angegeben: $M(23)$ enthält $O^-(8,2)$, keine der Gruppen enthält $Sp(8,2)$. Die Struktur der Sylow-Untergruppen kann weitgehend durch D-Untergruppen bestimmt werden.

Gaschütz, W.: Anzahlasymptotik für endliche auflösbare Gruppen

Es seien $P_i$ , $i = 1,\dots,r$, $p_i$-Gruppen der Ordnung $p_i^{n_i}$, $p_i \neq p_k$ für $i \neq k$. Dann gilt für die Anzahl $f(P_1,\dots,P_r)$ der Isomorphieklassen endlicher auflösbarer Gruppen von der Ordnung $p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r}$ mit $p_i$-Sylowgruppe $P_i$, $i = 1,\dots,r$

$$f(P_1,\dots,P_r) \leq p_1^{n_1^2+O(n_1)}\dots p_r^{n_r^2+O(n_r)}$$

Hieraus folgt mit einem bekannten Satz von G. Higman und Ch. Sims

$$f(p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r}) = p_1^{\frac{2}{27}n_1^3+O(n_1^{\frac{8}{3}})} \dots p_r^{\frac{2}{27}n_r^3+O(n_r^{\frac{8}{3}})}$$

für die Anzahl $f(p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r})$ der Isomorphieklassen endlicher auflösbarer Gruppen der Ordnung $p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r}$.

Gottschling, E.: Invarianten endlicher Gruppen

Für eine endliche Untergruppe $\Gamma$ der $GL(n,\mathbb{C})$ seien $H_1,\dots,H_s$ diejenigen Hyperebenen im $\mathbb{C}^n$, die als Fixpunktmengen von Abbildungen aus $\Gamma$ auftreten, und es sei jeweils $L_k(z)$, $k=1,\dots,s$, eine Linearform, deren Nullstellen genau die Punkte von $H_k$ sind. Für jedes feste $H_k$ bilden diejenigen Abbildungen aus $\Gamma$, welche $H_k$ als Fixpunktmenge besitzen, zusammen mit $\varepsilon = id_{\mathbb{C}^n}$ eine zyklische Untergruppe von $\Gamma$, deren Ordnung $r_k$ sei. Für jedes $a\in\mathbb{C}^n$ sei $\Gamma(a)$ die Stabilitätsgruppe. Vermöge $\gamma p(z) = p(\gamma^{-1}z)$ operiere $\Gamma$ auf dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$ und auf dem Ring $\mathbb{C}\{z\}$ konvergenter Potenzreihen. Es gibt dann endliche viele homogene invariante Polynome $p_1,\dots,p_m$, welche die jeweiligen Unterringe der invarianten Elemente erzeugen. Es sei $P(z)$ die Funktionalmatrix von $p_1,\dots,p_m$ bezüglich $z = (z_1,\dots,z_n)$ und es seien $D_1,\dots,D_t$, $t = \binom{m}{n}$ sämtliche n-reihigen Unterdeterminanten von $P(z)$. Es wurde bewiesen:

Satz 1: Für $a\in C^n$ gilt Rang $P(a)$ = Vielfachheit der 1-Darstellung in $\Gamma(a)$

Satz 2: Das Produkt $L_1^{r_1-1}\dots L_s^{r_s-1}$ ist der größte gemeinsame Teiler von $D_1,\dots,D_t$ sowohl in $\mathbb{C}[z]$ als auch in $\mathbb{C}\{z\}$.

Für Satz 1 wurde zuerst ein falsche Formulierung gegeben, nämlich Rang $P(a) = n - \mathrm{Max}\{\mathrm{Rang}(\gamma-\varepsilon) \mid \gamma\in\Gamma(a)\}$. Herr Wielandt machte auf den Fehler aufmerksam.

Gruenberg, K.: Projective Covers

Let G be a finite group, K a commutative ring and consider extentions $(A|E)$: $1\to A\to E\to G\to 1$ where A is a finitely generated KG-module. We only allow homorphisms $\sigma:(A|E)\rightarrow(A_1|E_1)$ which induce the identity on G and restrict to a KG-module homomorphism on the kernels.

An extention (A|E) is projective if the usual triangle can be completed. It is minimal if, and only if, A has no KG-projective direct summand.

An extention (A|E) is essential if A is not supplementable (ie. A $\nleq$ Fr(E)). An essential projective extention is called a projective cover.

1. If a single projective cover exists, then it is minimal projective and maximal essential, and any minimal projective, as well as any maximal essential, is isomorphic to it.

2. If |G| is not a unit in K and all KG-modules have projective covers, then a projective cover (A|E) exists.

However, projective covers (A|E) may exist even if they do not exist in the module category. However, minimal projectives may be mutually isomorphic even if no projective covers exist.

3. If K = $\bigcap_{p \mid |G|} \mathbb{Z}_{(p)}$, then any two minimal projectives are isomorphic.

4. If K = $\mathbb{Z}$, then any two minimal projectives become isomorphic over $\bigcap_{p \mid |G|} Z_{(p)}$ (i.e., belong to the same genus).

Hawkes, T.O.: <u>Local → Global Properties in Soluble Groups</u>

Let $\mathfrak{X}$ be an $E_\phi$-closed class of finite soluble groups, and $\Sigma_{\mathfrak{X}}(G)$ the set of subgroups of G which are terminal members of $\mathfrak{X}$- crucial maximal chains. Call a class $\mathfrak{Y}$ <u>$\Sigma_{\mathfrak{X}}$-complete</u> if the statement $\Sigma_{\mathfrak{X}}(G)\subseteq\mathfrak{Y}$ always implies $G\in\mathfrak{Y}$. Then the following results were discussed:

(1) If $\mathfrak{F}$ is a saturated formation defined locally by the formation function f and if f(p) is $\Sigma_{\mathfrak{X}}$-complete for each p, then $\mathfrak{F}$ is also $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ -complete.

(2) $\mathcal{L}_p(r)\cup\mathcal{L}_q(s)$ is $\mathfrak{J}_2$-complete (a 2-property) ($\mathcal{L}_p(r)$ denotes the class of groups of p-length at most r.)

Klaiber, B.: Korrespondenz von Charakteren

Seien M und N Normalteiler, C eine Untergruppe der endlichen Gruppe G mit $G = CN$, $N \cap C = M$. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper beliebiger Charakteristik, $\mathfrak{m}$ ein irreduzibler KM-Modul, $\mathfrak{n}$ ein irreduzibler KN-Modul, der $\mathfrak{m}$ als KM-Konstituenten besitzt. Unter gewissen Voraussetzungen wurde gezeigt, daß es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der irreduziblen KC-Moduln gibt, die $\mathfrak{m}$ als KM-Konstituenten enthalten, zu den irreduziblen KG-Moduln, die $\mathfrak{n}$ als KN-Konstituenten enthalten. Als Anwendung wurde der folgende Satz von Dade bewiesen:
Ist A eine Operatorgruppe der auflösbaren Gruppe G mit $(|A|,|G|) = 1$, so gibt es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der K $C_g(A)$-Moduln zu den A-invarianten KG-Moduln. Für Char $K = p$ operiert A ähnlich auf den p'-Konjugiertenklassen von G und auf den irreduziblen KG-Moduln.

Kovács, L.G.: Finite soluble groups with 2-generator Sylow subgroups

(Report on joint work with M.F. Newman)
Theorem: If each Sylow subgroup of a finite soluble group can be generated by two elements, the nilpotent length of the group is at most 4.
The proof of a local version of the theorem was partly discussed. In the 3-generator case, the length is at most 10, but nothing is known for the case of 4 (or more) generators.

Mann, A.: Generalized normalizers in soluble groups

Let G be a finite soluble group, H any subgroup. We define a subgroup $Q(H) \geqq H$ having, among others, the following properties:
1. Q(H) is epimorphism invariant.
2. Q(H) is the minimal subgroup containing H and covering all H-central H-composition-factors of G.
3. If $H = D$ is contained in a system normalizer of G, then $Q(H) = \langle H \mid D \lhd \lhd H \leq G \rangle = \langle H \mid D \leqq H \leq G$ and H is nilpotent$\rangle$.
The subgroup Q(H) can be applied to study the embedding of H in G.

Rowlinson, P.: Certain Permutation Groups of Degree 4p

A description of the proof of the following theorem:
Let G be a (simple) primitive permutation group of degree 4p with a Sylow-p-subgroup P such that $|N(P)| = 2p$. Then one of the following holds:

(1) The Sylow-2-subgroups of G are isomorphic to $(Z_2)^3$

(2) The sylow-2-subgroups of G are isomorphic to $(Z_2)^4$

(3) G contains a strongly embedded subgroup

Using unpublished results of Walter and Bender, it can be seen that SL(2,8) and SL(2,16) are the only groups satisfying the conditions of the theorem.

Scott L.L.: Sylow p-subgroups of simply transitive permutation groups

Theorem: Let G be a primitive permutationgroup and p a prime. Assume that every orbit of a Sylow p-subgroup of G has length p exactly.
Then either p divides the order of G to the first power only, or G is doubly transitive.

Smith, M.S.: Combinatorial Designs associated with the Higman-Sims group

This lecture was a study of some combinatorial designs which are suggested by G. Higman's study of the Higman-Sims group. A characterization of $A_5$, an insoluble group of order 1920 an the simple group of G. Higman was obtained. The isomorphism between the two simple groups of order 44.352.000 as defined by D.G. Higman and C.C. Sims, and by G. Higman was proved.

Snapper, E.: Numerical Polynomials For Permutation Representations

To each permutation representation (G,X) of a finite group G acting on a finite set X, and a generalized Character $\chi$ of G, the double coset Schur-algebra

$$\mathbb{C}G//G_\alpha = \left\{ \sum_{g\in G} c_g \cdot \left( \sum_{x\in G_\alpha g G_\alpha} x \right) \middle| \; c_g \in \mathbb{C} \right\}$$

is assigned to $(\Omega,G,.)$ as (roughly said) the endomorphism ring of a suitable G-module for the permutation representation of G. Every homomorphism $(\varphi,\psi) : (\Omega,G,.) \longrightarrow (\Omega',G',.)$ into a homogeneousspace $(\Omega',G',.)$ induces a mapping $\eta : \mathbb{C}G//G_\alpha \longrightarrow CG'//G'_{\alpha\varphi}$ in a certain 'natural' manner. If

$(\varphi_2)$ $\qquad (\beta G_\alpha)\varphi = (\beta\varphi)G'_{\alpha\varphi} \qquad$ for all $\beta \in \Omega$

holds then $\eta$ is a Schur-algebra homomorphism. If $\varphi: \Omega \longrightarrow \Omega'$ is surjective and $\eta$ a Schur-albegra homomorphism then $(\varphi_2)$ holds. If $\varphi: \Omega \longrightarrow \Omega'$ is bijective, $\psi : G \longrightarrow G'$ a monomorphism, and $(\varphi_2)$ holds then $\eta$ is a Schur-algebra isomorphism. There are applications to the theory of G/H-composition chains.

Wielandt, H.: Kombinatorische Abschließung von Permutationsgruppen

Zur Untersuchung einer gegebenen Menge $\Phi$ von Abbildungen einer Menge M in eine Menge N lohnt es sich gewöhnlich, für eine passende natürliche Zahl k die k-te kombinatorische Abschließung zu betrachten, d.h. die Gesamtheit $\Phi^{(k)}$ derjenigen Abbildungen von M in N, die auf jeder höchstens k-elementigen Teilmenge T von M mit einer geeigneten Abbildung $\varphi_T \in \Phi$ übereinstimmen.

Der Vortragende erläutert diese These an Beispielen aus der Theorie der zweifachen Transitivität von Permutationsgruppen und aus der Darstellungstheorie. Eine ausführliche Veröffentlichung wird noch 1969 erscheinen ( Permutation Groups. Lecture Notes, Dept. of Math., Ohio State University, Columbus, Ohio 43210).

Bernd Klaiber (Mainz)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft