Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 / 011.85

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 27/1969

Systemtheoretische Probleme der Mechanik
11.8. bis 15.8.1969

Die Tagung stand unter der Leitung von
Prof. Dr. K. Magnus, Lehrstuhl und Institut B
für Mechanik, Technische Hochschule München

Im Laufe der vergangenen zwei Jahrzehnte sind bemerkenswerte Entwicklungen auf dem Gebiet der Mechanik von Systemen starrer Körper (Mehrkörpersysteme) vor sich gegangen. Diese Entwicklungen haben zu einer Aufwertung und Erweiterung klassischer Ergebnisse geführt und finden vielseitige Anwendung in Physik und Technik. Insbesondere ist der Raumfahrt mit ihren neuartigen Problemstellungen ein bedeutender Anstoß zu verdanken. Die Theorie der Satelliten hat bereits jetzt befruchtend auf die terrestrische Mechanik zurückgewirkt, und es darf angenommen werden, daß hier noch weitere Ergebnisse erwartet werden können.

Es lag nahe, die auf diesem Gebiet arbeitenden Fachleute des In- und Auslandes zu einer Aussprachetagung einzuladen. Es ist der Leitung des Mathematischen Forschungsinstitutes Oberwolfach dafür zu danken, daß sie die Räume und die Möglichkeiten des Institutes zur Verfügung stellte und damit einen idealen Rahmen für die Tagung schuf.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Bei den Vortragsanmeldungen kristallisierten sich im wesentlichen vier Problemgruppen heraus, die freilich nicht streng abgegrenzt werden können:

1. Allgemeine analytische Mechanik
   (Vortragende Silas, Niemann, Magnus)

2. Optimierung dynamischer Systeme
   (Vortragende Weidner, Schiehlen, Müller, Weber)

3. Kreiseltheorie
   (Vortragende Schweitzer, Frik, Schmid, Wittenburg)

4. Satellitentheorie
   (Vortragende Sagirow, Hiller, Sperling, Ossenberg, Popp).

Daß die Satellitentheorie einen so breiten Raum einnahm, ist nicht so sehr dem physikalisch-technischen Problem zu verdanken, sondern vor allem der Tatsache, daß an diesem faszinierenden Beispiel neue Methoden entwickelt und erprobt werden mußten. Auf diesem Gebiet wird zur Zeit Pionierarbeit geleistet, von dem die gesamte Mechanik unmittelbar profitieren kann, z.B. bei der Theorie der Optimierungsmethoden.

Wie auf dem Lorenzenhof üblich, lag der Schwerpunkt der Tagung bei den Diskussionen. Man darf wohl behaupten, daß die Möglichkeiten einer Klausurtagung voll ausgenutzt wurden und daß alle Teilnehmer diese Zusammenkunft als in jeder Hinsicht positiv empfunden haben.

Der Leitung und der Verwaltung des Institutes soll deshalb auch an dieser Stelle der aufrichtige Dank aller Teilnehmer ausgesprochen werden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

G. Benz, Karlsruhe
E. Birkhold, Friedrichshafen
F. Buttazoni, Triest (Italien)
M. Frik, Stuttgart
W. Günther, Karlsruhe
M. Hiller, Stuttgart
E. Hofer, Stuttgart
S. Kessel, Karlsruhe
H. Lippmann, Braunschweig
K. Magnus, München
O. Mahrenholtz, Hannover
H.H. Müller, München
H. Niemann, Braunschweig
F. Ossenberg, München
K. Popp, München
F.P.J. Rimrott, Toronto (Canada)
P. Sagirow, Stuttgart
G. Sandweg, München
W. Schiehlen, München
W. Schmid, Stuttgart
G. Schweitzer, München
G. Silas, Timisoara (Rumänien)
L. Sobrero, Triest (Italien)
E. Sperling, München
H. Wagner, Madras (Indien)
H. Weber, Rio de Janeiro (Brasilien)
P. Weidner, Jülich
J. Wittenburg, Hannover

- 4 -

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

M. FRIK: Entdrallung mit Hilfe von Gravitationsmomenten.

Zur aktiven Lageregelung von Satelliten werden häufig Schwungräder oder Control Moment Gyros als Stellglieder verwendet. Durch einen Austausch von Drehimpuls zwischen dem Satelliten und den Stellgliedern kann die Orientierung des Satelliten stabilisiert und geregelt werden.

Nichtzyklische äußere Momente verursachen ein Anwachsen des Dralls in den Stellgliedern, deren Speicherkapazität aus technischen Gründen beschränkt ist. Um eine Sättigung und damit ein Versagen des Lageregelungssystems zu verhindern, muß von Zeit zu Zeit Drehimpuls abgeführt werden. Dies kann z.B. getan werden, indem man die Lage des Satelliten so verändert, daß die von der Orientierung des Satelliten abhängigen Gravitationsmomente eine Verringerung des Drehimpulses bewirken. Die Lageänderungsmanöver können nur auf bestimmten Teilstücken des Umlaufs durchgeführt werden, damit die Mission des Satelliten nicht beeinträchtigt wird. Beim Apollo Telescope Mount, das zur Sonnenbeobachtung eingesetzt werden soll, kommt dafür die Nachtseite in Frage.

Es werden Lageänderungsmanöver berechnet, die zur Abführung eines bestimmten Drehimpulses führen. Das Verfahren wird speziell angewendet auf das Apollo Telescope Mount. Es wird gezeigt, daß kleine Lageänderungsmanöver ausreichen, um die durch die nichtzyklischen äußeren Momente verursachte Drehimpulsanhäufung wieder abzubauen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

M. HILLER: Anwendung der Methode variabler Struktur zur Dämpfung von Satellitenschwingungen.

Die Anwendung des von P. Sagirow vorgeschlagenen Verfahrens zur Dämpfung von Satellitenschwingungen erfordert die Erfüllung einer Reihe von Verträglichkeitsbedingungen. Unter bestimmten Voraussetzungen kann es eintreten, daß man für gegebene Anfangsauslenkungen in der ersten und zweiten Etappe unendlich viele verschiedene Trägheitsmomente erhält, die alle diese Verträglichkeitsbedingungen erfüllen. Die Kombination dieser Trägheitsmomente im Zusammenhang mit weiteren Systemparametern führt auf gute und schlechte Dämpfungszeiten, wobei aber die Genauigkeiten in der Ausrichtung für alle Kombinationen etwa gleich gut sind. Beispiele zeigen, daß gegebene Anfangsauslenkungen in etwa 4 Erdumkreisungen auf weniger als 1% abgebaut werden können. Fehleruntersuchungen haben gezeigt, daß bei gewissen Parametern schon kleine Änderungen das Verhalten des Systems sehr stark beeinflussen. Eine Anwendung des Verfahrens auf das nichtlineare System liefert Ergebnisse, deren Übereinstimmung mit den linearen Ergebnissen sehr stark von den Anfangsbedingungen abhängt. Sowohl durch wiederholte Anwendung des Verfahrens als auch durch Änderung der Systemparameter können hier Verbesserungen erzielt werden.

K. MAGNUS: Übersicht über allgemeine Sätze zum Stabilitätsverhalten linearer Systeme.

Die Bewegungsgleichungen linearer physikalischer Systeme lassen sich mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus stets in der Form

$$a_{ij}\ddot{x}_j + d_{ij}\dot{x}_j + g_{ij}\dot{x}_j + f_{ij}x_j + e_{ij}x_j = o$$

schreiben. Dabei ist

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

$a_{ij} = a_{ji}$ die Trägheitsmatrix,

$d_{ij} = d_{ji}$ die Dämpfungs- (oder Anfachungs-) Matrix,

$g_{ij} = -g_{ji}$ die gyroskopische Matrix,

$f_{ij} = f_{ji}$ die Matrix der konservativen Lagekräfte,

$e_{ij} = -e_{ji}$ die Matrix der nichtkonservativen Lagekräfte.

Aus den symmetrischen Matrizen können die quadratischen Formen

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \quad , \quad \text{kinetische Energie,}$$

$$D = \frac{1}{2} d_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \quad , \quad \text{Rayleighsche Funktion,}$$

$$V = \frac{1}{2} f_{ij}x_i x_j \quad , \quad \text{potentielle Energie}$$

gebildet werden. T ist stets positiv definit; D und V können beliebig, auch semidefinit sein. Das Stabilitätsverhalten eines Systems hängt von den Eigenschaften der Matrizen und den quadratischen Formen ab. Die zahlreichen allgemeinen Sätze hierzu lassen sich reduzieren und können in das folgende Schema

		$g \equiv o$		$g \not\equiv o$	
		$d \equiv o$	$d \not\equiv o$	$d \equiv o$	$d \not\equiv o$
$f \equiv o$	$e \equiv o$			•	• • •
	$e \not\equiv o$				•
$f \not\equiv o$	$e \equiv o$	•		• • • •	• • • •
	$e \not\equiv o$	• •		•	• • •

eingeordnet werden. Einige allgemeine Sätze gelten dabei in mehreren Kästchen des Schemas. Die so gewonnenen Aussagen sind nützlich für die Beurteilung und den Entwurf physikalischer Systeme.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H.H. MÜLLER: Zeitoptimales Aufrichten eines Lotkreisels.

Der Lotkreisel ist ein Lagekreisel, dessen Laufachse im Trägerfahrzeug die Lotrichtung anzeigen soll. Abweichungen von der Sollausrichtung werden durch Lotfühler auf dem Kreiselinnenrahmen gemessen und geben Steuersignale auf zwei Momentengeber, die auf die beiden Kreiselrahmenachsen wirken, so daß der Kreisel wieder in die Lotrichtung präzediert.

Für das Aufrichten eines astatischen Lotkreisels in die Lotrichtung werden die Bewegungsgleichungen hergeleitet und mit Hilfe des Maximumprinzips von Pontrjagin zeitoptimale Steuerstrategien für die Aufrichtmomente angegeben, wobei verschiedene Trägerbewegungszustände betrachtet werden.

Es zeigt sich, daß bei Geradeausflug des Trägers die einfache Zweipunktstützung des Kreisels, die in Abhängigkeit des Vorzeichens der Lotreferenzwinkel die Momentengeber auf den Rahmenachsen umschaltet, eine Steuerung aus der Mannigfaltigkeit der zeitoptimalen Strategien ist. Beim Kurvenflug des Trägers bei konstant gehaltenem Trägernickwinkel ergibt sich eine eindeutige zeitoptimale Steuerung.

Anhand der optimalen Trajektorien und der Isochronen in der Zustandsebene wird die Abhängigkeit der optimalen Aufrichtzeit vom Trägerbewegungszustand aufgezeigt. Die zeitoptimale Steuerung für die Aufrichtbewegung des Lotkreisels wird schließlich verglichen mit technisch verwirklichten Steuerungen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

H. NIEMANN / H. LIPPMANN: Zur "Beobachtbarkeit" von Eigenfrequenzen beim Verfahren der Übertragungsmatrizen.

Zur Berechnung der Eigenfrequenzen (allgemeiner: der Eigenwerte und Eigenformen) mechanischer Systeme wird häufig das den modernen Rechenmaschinen angepaßte Übertragungsverfahren angewandt.

Zunächst läßt sich an Beispielenzeigen, daß die bisher benutzte Auswertmethode, nämlich das Aufsuchen von Nullstellen einer Koeffizientendeterminante, nicht ausreicht. Aufgrund einer in der Mehrgrößenregelung üblichen Betrachtungsweise wird dieser Mangel behoben: man sucht die Pole der zur oben genannten Determinante gehörigen Matrix.

Ferner können unabhängig vom Auswertungsverfahren Eigenfrequenzen (bzw. Exponenten) grundsätzlich verschwinden. Über sie ist in den Übertragungsmatrizen keine Information mehr enthalten; sie sind im Sinne der Regelungstechnik nicht "beobachtbar", bzw. ihre Eigenfrom ist nicht "ansteuerbar".

Es bestehen noch keine angemessenen Kriterien, anhand derer man das Auftreten beider Effekte vorhersagen kann.

F. OSSENBERG: Beschreibungsmethodik bei der Analyse der III. Stufe der EUROPA-Rakete als Mehrkörpersystem (Indizierungssystematik).

Bei der Behandlung umfangreicher Mehrkörpersysteme sollte zur Erleichterung der Kommunikation unter den einzelnen Bearbeitern eine möglichst leicht erlernbare und vielleicht auch selbsterklärende Notation vereinbart werden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Es werden vorgeschlagen:

1. Zwei Arten von Doppelindizierung
   a) Referenzindizierung
   b) Inzidenzindizierung

2. Spezielle zeitliche Differentiationsoperatoren, die den Raum, in dem die Differentiation erfolgt, kennzeichnen.

3. Relativitätsindizierung zur Kennzeichnung des Raumes, in dem abgeleitete translatorische Größen wie Geschwindigkeit und Beschleunigung als solche definiert sind. Sie hängt eng mit den erwähnten Differentiationsoperatoren zusammen.

4. Polindizierung bei Größen, die auf einen Pol bezogen sind, wie z.B. Kraftmomente.

K. POPP: Untersuchungen an Zweikörper-Satelliten.

Es wird eine Klasse von gravitationsstabilisierten Zweikörper-Satelliten auf kreisförmigen Umlaufbahnen in einem idealen zentralsymmetrischen Schwerefeld untersucht. Zwischen den beiden Teilkörpern des Satelliten ist eine lineare Drehfeder und ein geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer angeordnet.

Ausgehend von den linearisierten Bewegungsgleichungen wird die Stabilität der Gleichgewichtslage untersucht, Stabilitätsbedingungen werden hergeleitet. Neben der bekannten Stabilitätsbedingung für starre Körper, wonach die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes zum Anziehungszentrum zeigen und die Achse des größten Hauptträgheitsmomentes senkrecht auf der Bahnebene stehen muß, erhält man eine für deformierbare Satelliten charakteristische Stabilitätsbedingung, die wesentlich von der Federkonstante der Koppelfeder abhängt und den bekannten Stabilitätsbereich für starre Körper einschränkt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Durch geeignete Lage der Gelenkachse, um die sich die Teilkörper bewegen, kann man bei stabilen, gekoppelten und gedämpften Systemen für das linearisierte System asymptotische Stabilität erreichen. Damit ist nach Ljapunow die Stabilität des nichtlinearen Systems gesichert.

P. SAGIROW: Dämpfung der Drehbewegungen von Satelliten durch Änderung der Struktur.

Betrachtet wird ein Satellit, der auf einer Kreisbahn umläuft und dessen Drehbewegung nur durch das Gravitationsmoment beeinflußt wird. Es wird gezeigt, daß die Roll-, Gier- und Nickschwingungen des Satelliten durch drei hintereinander folgende Änderungen der Trägheitsmomente fast vollständig abgebaut werden können. Eine Realisation kann entweder durch Absprengen von Zusatzmassen oder durch Aus- und Einfahren von Auslegern erfolgen. Die Berechnung der notwendigen Änderungen der Trägheitsmomente und der Zeitdauer der einzelnen Etappen geschieht am linearisierten Modell. Bei der Anwendung des Verfahrens auf die ursprüngliche nichtlineare Bewegung des Satelliten müssen die Parameter angepaßt werden, oder aber man muß das lineare Programm mehrmals hintereinander anwenden. Die erzielten Dämpfungszeiten sind recht gut.

W. SCHIEHLEN: Das Störverhalten eines zeitoptimalen Systems.

Das Verhalten des zeitoptimalen Regelsystems

$$\ddot{x} + u_o \operatorname{sgn}\left(\dot{x} + \sqrt{2\, u_o |x|}\, \operatorname{sgn} x\right) = 0$$

wird durch harmonische Schwingungen $z = a \sin(\omega t + \psi)$, die klein im Verhältnis zur Steuerung u_o sind, nicht beeinträchtigt. Nimmt die Störung die Größenordnung der Steuerung an,

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$a > o.7575\ u_o$, so bleibt ein suboptimales Verhalten in einem invarianten Gebiet um den Ursprung erhalten. Außerhalb des invarianten Gebietes können zwangserregte Schwingungen mit der Frequenz der Störung entstehen. Die Größe des invarianten Gebietes nimmt mit zunehmender Störung ab. Für im Verhältnis zur Steuerung große Störungen verliert das System seine optimalen Eigenschaften. Das System verhält sich dann wie ein ungeregeltes System.

W. SCHMID: Zur Stabilität nutationsgedämpfter, drallstabilisierter Satelliten.

Jedes Lehrbuch zur Kreiseltheorie enthält den Hinweis, daß Drehbewegungen eines starren Körpers um die Achsen seines größten und kleinsten Trägheitsmomentes stabil, Drehbewegungen um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes instabil sind.

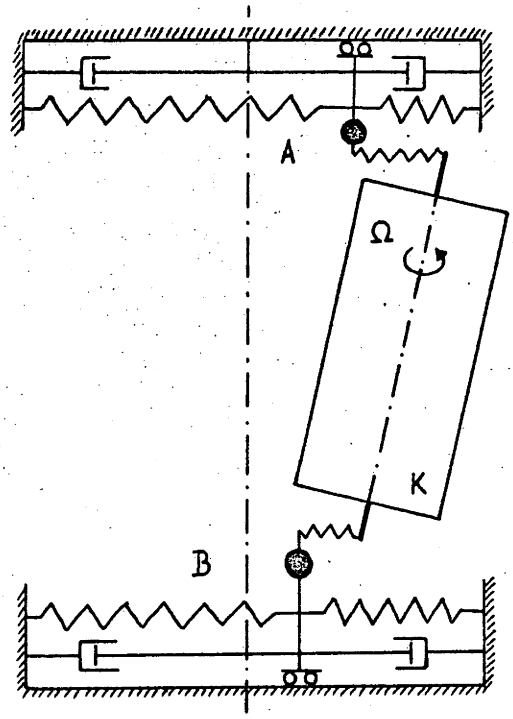
Bei drallstabilisierten Satelliten mit Nutationsdämpfungseinrichtung wird beobachtet, daß Drehungen um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes ebenfalls instabil sind.

Mathematisch wird dieses Verhalten in verschiedenen Arbeiten mit der energency sink approximation erklärt. Dabei wird der Drall und die Energie eines starren Körpers mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen unter der Voraussetzung des Fehlens von Momenten berechnet. Der Drall wird als konstant betrachtet und damit eine Beziehung zwischen einer Energieabnahme und der Nutationsamplituden-Änderung hergeleitet. In dieser Beziehung wird implizit ein (inneres) Moment angenommen, was mit der Voraussetzung im Widerspruch steht.

Es wird deshalb ein Modell mit zwei starren Körpern durchgerechnet. Diese seien über viskose Reibungsmomente gekoppelt. Mit Hilfe der Störungsrechnung wird für dieses Modell die beobachtete Instabilität um die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes nachgewiesen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

G. SCHWEITZER: Theoretische und experimentelle Untersuchung eines elastisch gelagerten Kreisels.



Der skizzierte Kreisel K wird über zwei Lager A und B elastisch in vertikaler Richtung zentriert. Die Art der Lagerung soll dem Kreisel ermöglichen, auf eine sehr hohe Drehgeschwindigkeit Ω zu kommen.

Für folgende Teilaufgaben werden die Lösungsmethoden, besondere Schwierigkeiten und die Ergebnisse angegeben: Aufstellen der Bewegungsgleichungen für das System mit 9 Freiheitsgraden; Stabilität der Bewegung des Kreisels um die Vertikale; Berechnung der Amplituden, wenn der Kreisel in kritische Drehzahlbereiche kommt; Optimierung des Kreiselverhaltens nach dem maximalen Stabilitätsgrad und nach der verallgemeinerten quadratischen Regelfläche; Überprüfung der getroffenen Voraussetzungen und der theoretischen Ergebnisse durch Experimente.
Die Untersuchung war eine Gemeinschaftsarbeit mit den Herren Schiehlen, P. Müller, Hübner, Sandweg.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

G. SIEAS: <u>L'étude des mouvements périodiques et de la stabilité des systhèmes vibro-percutants générales à l'aide des équations de Lagrange</u>.

Le systhème vibro-percutant étudié peut-être soumis à des liaisons bilatérales, holonomes ou nonholonomes. L'apparition du choc pendant le mouvement est equivalent avec l'existence d'une liaison unilatérale de la forme

$$f(q_1, q_2, \ldots q_n, t) \geq 0 \ .$$

Si au moment τ_o du contact entre le systhème et la liaison unilatérale on a

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_o < 0 \ ,$$

dans le systhème a lieu le choc.

On étudie le mouvement du systhème avant et pendant le choc à l'aide des équations de Lagrange, écrites avec les multiplicateurs de liaisons. On obtient aussi les formules valables pour n'importe quel systhème général:

$$\dot{q}_{j1} - \dot{q}_{jo} = \frac{A_{jo}}{B_o} (1+R) \left(\frac{df}{dt}\right)_o \ ; \quad j = 1,2,\ldots,n \ .$$

A l'aide de ces résultats on établit aisement les conditions de périodicité du mouvement et à l'aide de la méthode des perturbations on détérmine les conditions de la stabilité de ce mouvement.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

E. SPERLING: Dämpfung von Satellitenschwingungen durch variable Ausleger.

Für Satelliten mit veränderlichen Auslegern werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Unter der Voraussetzung kleiner Nick-, Roll- und Gierwinkel werden diese Gleichungen linearisiert. Dabei wird die Nickschwingung von der gekoppelten Roll-Gierschwingung entkoppelt.

Die Betrachtung eines Proportionalreglers für die Nickschwingung führt zu einem Zweipunktregler, der immer beim Durchlaufen der Nullage die Auslegerlänge ändert; diese Untersuchung wird auch auf große Winkel ausgedehnt.

In Analogie zum Fadenpendel mit veränderlicher Fadenlänge wird für die Roll-Gierschwingung ein Zweipunktregler betrachtet, der in Verallgemeinerung der Schaltbedingungen beim Fadenpendel dann die Auslegerlänge ändert, wenn ein Minimum an Energie in das System hinein- und ein Maximum heraustransportiert wird.

H. WEBER: Betrachtungen zur Lageregelung von Satelliten mit Schwungrädern.

Es wird für ein Satellit auf einer kreisförmigen Erdbahn, der z.B. gravitationsstabilisiert ist und mit einer bestimmten Hauptachse zur Erde ausgerichtet werden soll, die Steuerbarkeit der Lageregelung untersucht. Man zeigt mit Hilfe der Steuerbarkeitsmatrix, daß die Existenz eines äußeren Momentes notwendig ist, um das Problem zu lösen und daß man dieses Kräftefeld als eine Abstützung nehmen kann, um zugleich den Satelliten wieder in die gewünschte Lage zu führen und den Drall vollkommen abzubauen, d.h., die Schwungradgeschwindigkeit zu Null führen. Somit wird eine Aufschaukelung dieser Schwungraddrehzahl vermieden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

P. WEIDNER: Vektorraumnormen zur Optimierung mechanischer Systeme.

Nach einer kurzen Einführung der Begriffe "Linearer Raum" und "Norm" wird die Bewertung linearer mechanischer Systeme unter dem Gesichtspunkt der Stabilität diskutiert. Dazu werden im Raum der stetigen, vektorwertigen Funktionen über $[0, \infty)$, in dem die Lösungen der Differentialgleichungen diskreter mechanischer Systeme liegen, verschiedene Normen eingeführt. Dabei ist unter Umständen eine Beschränkung auf Teilräume notwendig. Die Minimisierung der Lösungen über der Menge der Systemparameter bei festen Anfangswerten führt zur Optimierung eines Systems bezüglich der benutzten Norm. Die bekannten Regelflächen ergeben sich als Spezialfälle. Auf einige Schwierigkeiten bei dieser Methode wird anhand eines Beispiels hingewiesen. Die so formulierten Optimierungsmethoden lassen sich als nichtlineare Approximationsprobleme interpretieren. Daneben werden Verfahren vorgeschlagen, die eine von den Anfangswerten unabhängige optimale Bestimmung der Systemparameter erlauben.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

J. WITTENBURG: Systemtheoretische Probleme der Kreiselmechanik.

Beim Vergleich der bisher behandelten systemtheoretischen Probleme der linearen Dynamik einerseits und der nichtlinearen andererseits fällt als bedeutendster Unterschied die Zahl der zugelassenen Freiheitsgrade der Bewegung auf. Das n-Körpermodell der linearen Elastomechanik hat kein Gegenstück in Form eines n-Körpermodells der Kreiselmechanik bei großen Drehungen. Diese Lücke wird hier geschlossen.

Betrachtet wird ein System von n gelenkig verbundenen Starrkörpern, das Baumstruktur besitzt und dessen Gelenke so beschaffen sind, daß sie (wenigstens) einen Punkt enthalten, der Fixpunkt beider gekoppelter Körper ist. Jedem Körper entsprechen zwei vektorielle Bewegungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeit und den Radiusvektor vom Massenmittelpunkt des Systems zu dem des Körpers. Die Gleichungen enthalten - zunächst in unübersichtlicher Weise verteilt - die Gelenkreaktionskräfte X_a und Momente Y_a. Mit Hilfe der Inzidenzmatrix des Systemgraphen und ihrer Linksinversen gelingt die Elimination der X_a und damit die Formulierung von n vektoriellen Gleichungen, die nur noch Winkelgeschwindigkeiten und Momente enthalten. Ihre skalare Formulierung führt auf 3n Gleichungen, die den Eulerschen Bewegungsgleichungen des Einzelkörpers entsprechen. Sie nehmen ihre einfachste Form an bei Verwendung von Systemparametern der sog. erweiterten Körper. Diese entstehen, indem man nacheinander zu jedem Körper einen neuen dadurch bildet, daß man in seinen Gelenkpunkten die Massen aller über die betreffenden Gelenke angekoppelten Körper punktförmig

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

konzentriert. Die Trägheitstensoren und Gelenkkoordinaten relativ zum Schwerpunkt dieser Körper sind die genannten Parameter.

Angewandt auf den Fall eines n-Körper-Satelliten auf einer Kreisbahn ergeben sich Bedingungen für dessen Gleichgewichtslagen im Gravitationsfeld. Sie sind nur in ganz speziellen Fällen analytisch lösbar und zeigen, daß eine verwirrende Fülle von Gleichgewichtslagen existiert. Durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen mit Dämpfung erhält man stabile Gleichgewichtslagen für beliebig komplizierte Systeme, auch für Systeme gekoppelter Gyrostaten.

Dank der Linearität der kinematischen Verhältnisse des Systems und der Newtonschen Stoßhypothese ist die Berechnung der Geschwindigkeits- und Winkelgeschwindigkeitsänderungen bei schiefen nicht vollelastischen Stößen auf beliebige Punkte des Systems ein lineares Problem.

Die Differentialgleichungen eignen sich u.a. zur Beschreibung der ebenen Bewegung von Gliederketten, die als Ersatzmodell für Seile dienen, bei denen die elastischen Eigenschaften nicht wesentlich für die Bewegung sind (Seile mit großem Durchhang). Die Biegesteifigkeit von Seilen wird durch Drehfedern in den Kettengelenken simuliert. Bei Verwendung steifer Biegefedern kommt man zur Dynamik des Biegebalkens bei beliebig großen Verformungen.

G.Sandweg (München)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©