MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 32 /1969

Arbeitsgemeinschaft über Potentialtheorie

5.10. bis 11.10.1969

Die Arbeitsgemeinschaft von M.Kneser (Göttingen) und P.Roquette (Heidelberg) beschäftigte sich in diesem Herbst unter der Leitung von H.Bauer (Erlangen) mit Potentialtheorie. Nach einem Überblick über verschiedene axiomatische Potentialtheorien wurden drei wichtige Aspekte der Potentialtheorie behandelt, nämlich ihre Beziehung zur Theorie der Differentialgleichungen, der Zusammenhang zwischen globalen und lokalen Axiomen und schließlich die Verbindung zur Theorie der Markoffschen Prozesse.

Teilnehmer:

H.Bauer, Erlangen
Th.Bröcker, Heidelberg
B.Hain, Clausthal
W.Hansen, Erlangen
G.Harder, Bonn
K.Janßen, Erlangen
K.Kiyek, Saarbrücken
M.Knebusch, Saarbrücken
J.Köhn, Erlangen
H.Kupisch, Heidelberg
P.Meyer-Nieburg, Ssarbrücken
H.Pfeuffer, Göttingen
G.Ritter, Erlangen
C.L.Scheffer, Utrecht (Niederl.)
T. tom Dieck, Heidelberg
G.Wittstock, Saarbrücken

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vorträge

I. Einführung

Herr Bauer gab einen Überblick über die grundlegenden Begriffe der sogenannten axiomatischen Potentialtheorie, wie sie sich aus dem Studium der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und der Verbindung zu den Markoffschen Prozessen in den letzten 15 Jahren ergeben haben.

Ausgangspunkt ist stets ein lokal-kompakter Raum X (meist mit abzählbarer Basis) und ein Garbendatum $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_U)_{U \text{ offen in } X}$ von Vektorräumen stetiger reeller Funktionen.

Eine offene relativ-kompakte Teilmenge V von E heißt regulär, wenn sie einen nicht-leeren Rand V^* besitzt und jede stetige reelle Funktion f auf V^* durch genau ein $H_f^V \in \mathcal{H}_V$ zu einer stetigen Funktion auf $\overline{V}$ fortgesetzt werden kann, die positiv ist, falls f positiv ist. Durch $f \longrightarrow H_f^V(x)$ $(x \in V)$ ist das zu V und x gehörige harmonische Maß μ_x^V definiert.

Das Basisaxiom (B) lautet dann: Die regulären Mengen bilden eine Basis der Topologie von X. Den verschiedenen Theorien werden nun verschiedene Konvergenzaxiome zugrunde gelegt:

(K_B) Konvergenzaxiom von Brelot. X ist lokal-zusammenhängend. Ist U ein Gebiet in X und $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_U$ aufsteigend filtrierend, so ist $\sup \mathcal{F}$ entweder identisch $+\infty$ oder harmonisch in U.

(K_D) Konvergenzaxiom von Doob: Ist U offen in X, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_U$ aufsteigend filtrierend und $\sup \mathcal{F}$ endlich auf einer dichten Teilmenge von U, so ist $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}_U$.

(K_1) Schwaches Konvergenzaxiom. Ist U offen in X, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_U$ aufsteigend filtrierend und $\sup \mathcal{F}$ beschränkt, so ist $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}_U$.

Aus (K_B) folgt (K_D), aus (K_D) folgt (K_1) und aus (K_1) folgt mit dem Basisaxiom (B), daß X lokal-zusammenhängend ist.

Eine Funktion $u : U \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ (U offen in X) heißt hyperharmonisch (in U), falls sie nach unten halbstetig ist und für alle regulären V mit $\overline{V} \subset U$ und $x \in V$ gilt

$$\int u \, d\mu_x^V \leq u(x).$$

$\mathcal{H}_U^*$ bezeichnet die Menge aller in U hyperharmonischen, $\mathcal{S}_U = \{u \in \mathcal{H}_U^* : u$ endlich auf dichter Teilmenge$\}$ die Menge aller in U superharmonischen Funktionen. Eine Funktion $p \in \mathcal{S}_X$ heißt Potential, wenn sie positiv ist und 0 die einzige in X harmonische Funktion h ist mit $0 \leq h \leq p$.

Ein harmonischer Raum im Sinne von M. Brelot (Typ I) liegt vor, wenn X nicht kompakt ist, das Basisaxiom (B) und Konvergenzaxiom (K_B) gelten.

Ein harmonischer Raum im Sinne von H. Bauer (Typ II) liegt vor, wenn das Basisaxiom (B), das Konvergenzaxiom (K_D) (oder (K_1)) und das Trennungsaxiom (T) gelten. Dabei ist (T):

a. Für jedes offene, relativ-kompakte U in X existiert ein $h \in \mathcal{H}_U$ mit $h > 0$.

b. $\mathcal{H}_X^*$ trennt verschränkt.

Lösungen elliptischer Differentialgleichungen wie der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ fallen unter Typ I, Lösungen parabolischer Differentialgleichungen wie der Wärmeleitungsgleichung $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ unter Typ II.

X heißt elliptisch, wenn jeder Punkt $x \in X$ ein Fundamentalsystem von regulären Umgebungen V besitzt mit $T_{\mu_x^V} = V^*$.

Jeder harmonische Raum vom Typ I ist elliptisch. Jeder elliptische Raum vom Typ II ist vom Typ I.

Ein harmonischer Raum (vom Typ I oder II) heißt streng, wenn gilt

(P) Für alle $x \in X$ gibt es ein Potential p mit $p(x) > 0$.

Äquivalent zu (P) ist die verschränkte Punktetrennung durch ${}_{+}\mathcal{S}_X$.

Die streng harmonischen Räume vom Typ I sind genau die elliptischen streng harmonischen Räume vom Typ II.

Um kompakte Riemannsche Flächen mit einzubeziehen, haben N.Boboc, C.Constantinescu und A.Cornea harmonische Räume von einem dritten Typ studiert, in dem auf das globale Trennungsaxiom (T) verzichtet und stattdessen ein Randminimumprinzip zum Axiom erhoben wird.

II. Beziehung zur Theorie der Differentialgleichungen

Die Herren Hain, Kiyek, Pfeuffer, Harder und Köhn trugen vor über die Arbeit "Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont differentiables" von J.-M.Bony (Ann.Inst.Fourier 17,1, 353-382 (1967)). In dieser Arbeit wird untersucht, wann die harmonischen Funktionen einer axiomatischen Potentialtheorie Lösungen einer Differentialgleichung sind.

Im folgenden sei Ω ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{H}$ ein Garbendatum harmonischer Funktionen auf Ω, das die Konstanten enthält und dem Basisaxiom (B) genügt.

Ein Differentialoperator zweiter Ordnung ohne Term der Ordnung 0 :

$$\mathfrak{A} u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

heiße prä-elliptisch, wenn für jedes x die quadratische Form $(a_{ij}(x))$ positiv und nicht Null ist. Er heißt elliptisch, wenn für jedes x die Form $(a_{ij}(x))$ positiv definit ist.

Es mag genügen, eine Zusammenstellung der wichtigsten Sätze zu geben.

Satz. Ist $\mathcal{H}$ von der Klasse C^2, d.h. sind alle harmonischen Funktionen von der Klasse C^2, so gibt es einen prä-elliptischen Differentialoperator $\mathfrak{A}$ in Ω, so daß für jedes offene $\omega \subset \Omega$ und $u \in \mathcal{H}_\omega$ gilt

$$\mathfrak{A} u = 0.$$

Satz. Ist $\mathcal{H}$ von der Klasse C^{k+2} $(k=0,1,\dots,\infty,\omega)$, so gibt es eine offene dichte Teilmenge Ω_0 von Ω und einen prä-elliptischen Differentialoperator $\mathfrak{A}$ in Ω_0 mit Koeffizienten der Klasse C^k, so daß für jedes offene $\omega \subset \Omega$ und $u \in \mathcal{H}_\omega$ gilt $\mathfrak{A} u = 0$.

Satz. Es sei $\mathcal{H}$ von der Klasse C^2 und Ω_0, $\mathfrak{A}$ wie im obigen Satz. Dann gilt

a. Für offenes $\omega \subset \Omega_0$ ist $u \in \mathcal{H}_\omega$ genau dann wenn u von der Klasse C^2 ist und $\mathfrak{A} u = 0$.

b. Ist u definiert auf einer offenen Teilmenge ω von Ω_0 und von der Klasse C^2, so ist u lokal-superharmonisch genau dann, wenn $\mathfrak{A} u \leq 0$ ist.

c. $\mathfrak{A}$ ist bis auf Multiplikation mit einer stetigen Funktion $\varphi > 0$ in Ω_0 eindeutig bestimmt.

Satz. Ist $\mathcal{H}$ von der Klasse C^1, so genügt $\mathcal{H}$ dem schwachen Konvergenzaxiom (K_1).

Etwas vereinfachend gesagt gilt (K_B) nicht, wenn der Anteil zweiter Ordnung von $\mathfrak{A}$ (nach Wahl von geeigneten lokalen Koordinaten) nur von $n - 1$ der Koeffizienten abhängt. Umgekehrt gilt der

Satz. Sei $n = 2$, $\mathcal{H}$ von der Klasse C^3 und $\mathfrak{A}$ ein prä-elliptischer Operator auf einer offenen dichten Teilmenge Ω_0 mit Koeffizienten der Klasse C^1 und $\mathfrak{A}u = 0$ für alle $u \in \mathcal{H}_\omega$ mit $\omega \subset \Omega_0$.
Wenn dann für $\mathcal{H}$ das Konvergenzaxiom (K_B) gilt, so ist $\mathfrak{A}$ elliptisch auf einer offenen dichten Teilmenge.

Von nun an sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{H}$ translationsinvariant, d.h. ist u harmonisch in einer offenen Menge U und $h \in \mathbb{R}^n$, so sei v, definiert durch $v(x) = u(x - h)$, harmonisch in $U + h$.

Satz. Es existiert bis auf einen konstanten Faktor genau ein prä-elliptischer Operator $\mathfrak{A}$ mit konstanten Koeffizienten und den Eigenschaften

a. u ist harmonisch genau dann, wenn u stetig ist und $\mathfrak{A}u = 0$ im Sinne der Distributionen.

b. eine stetige Funktion u ist superharmonisch genau dann, wenn $\mathfrak{A}u \leq 0$ ist im Sinne der Distributionen.

Satz. Für diesen Operator $\mathfrak{A}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\mathcal{H}$ genügt dem Konvergenzaxiom (K_B).
2. $\mathfrak{A}$ ist ein elliptischer Operator.
3. Die harmonischen Funktionen sind analytisch.

Weiter sind äquivalent:

1. $\mathcal{H}$ genügt dem Konvergenzaxiom (K_D).
2. $\mathfrak{A}$ ist ein parabolischer oder elliptischer Operator.
3. $\mathcal{H}$ ist von der Klasse C^∞.
4. $\mathcal{H}$ genügt dem Konvergenzaxiom (K_1).
5. $\mathcal{H}$ ist von der Klasse C^1.

Dabei heiße ein prä-elliptischer Differentialoperator parabolisch, wenn er nach geeigneter linearer Koordinatentransformation von der Form

$$\mathfrak{A}\, u(x) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

ist mit positiv-definitem (a_{ij}) in $n-1$ Variablen und $a_n \neq 0$.

III. Zusammenhang zwischen globalen und lokalen Axiomen

Die Herren Wittstock, Scheffer, Meyer-Nieburg, Janssen und Bröcker trugen vor über die Arbeit "Principe du minimum et maximalité en théorie du potentiel" von G.Mokobodzki und D.Sibony (Ann. Inst. Fourier 17,1, 401-442 (1967)). In dieser Arbeit wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen ein konvexer Kegel beschränkter reeller Funktionen auf einem lokal-kompakten Raum Ω die Menge der beschränkten superharmonischen Funktionen eines streng harmonischen Raumes $(\Omega, \mathcal{H})$ ist. Grundlegend ist dabei die Eigenschaft, in bezug auf die Gültigkeit des Randminimumprinzips ein maximaler konvexer Kegel zu sein.

Genauer sei Ω ein lokal-kompakter Raum, in dem jede offene relativ-kompakte Teilmenge ω einen nicht-leeren Rand $\partial\omega$ besitzt.

Es sei $P_{m,\sigma}(\Omega)$ die Familie aller beschränkten, nach unten halbstetigen reellen Funktionen v auf Ω mit

$$\inf v(\partial\omega) = \inf v(\bar{\omega})$$

für alle offenen relativ-kompakten ω in Ω. Im folgenden sei S ein (nach Zorns Lemma existierender) maximaler konvexer Kegel in $P_{m,\sigma}(\Omega)$.

Wichtiges Konstruktionsmittel ist das Reduzieren von Funktionen auf Mengen: Ist $\varphi \geq 0$ eine beschränkte Funktion auf Ω und A eine Teilmenge von Ω, so heißt

$$R_\varphi^A := \inf \{v \in S : v \geq \varphi\}$$

die Reduzierte von φ auf A.

S habe zunächst die zusätzlichen Eigenschaften

(G_1) S ist punktetrennend,

(G_2) Für jedes $v \in S^+$, jedes stetige $\varphi \geq 0$ mit kompaktem Träger und $\varphi \leq v$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein stetiges $w \in S^+$ mit $\varphi \leq w \leq v + \varepsilon$.

Dann gibt es zu jedem offenen relativ-kompakten ω in Ω und jedem $x \in \omega$ genau ein Radonsches Maß $\rho_x^\omega \geq 0$ auf $\partial\omega$ mit

$$R_v^{\partial\omega}(x) = \int v \, d\rho_x^\omega$$

für alle stetigen $v \in S^+$.

Ist ω eine offene Teilmenge von Ω und h eine stetige reelle Funktion auf ω, so heißt h harmonisch in ω, falls für alle offenen relativ-kompakten ω' mit $\overline{\omega'} \subset \omega$ und alle $x \in \omega'$ gilt

$$\int h \, d\rho_x^{\omega'} = h(x).$$

$\mathcal{H}_\omega$ sei die Familie aller in ω harmonischen Funktionen, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_\omega)_\omega$ offen in Ω.

Satz. S besitze die Eigenschaften (G_1) und (G_2). Dann ist $\mathcal{H}$ ein Garbendatum auf Ω.

Satz. Ω habe abzählbare Basis, S habe die Eigenschaften (G_2) und

(G_1') Für jedes geordnete Paar (x,y) verschiedener Punkte in Ω gibt es ein $v \in S$ mit

$$v(x) < v(y).$$

Dann besitzt $(\Omega, \mathcal{H})$ eine Basis regulärer Mengen. Die Funktionen aus S sind genau die beschränkten superharmonischen Funktionen von $(\Omega, \mathcal{H})$.

Schärfer als (G_2) ist die Eigenschaft

(G_3) Für jedes offene ω in Ω und $v \in S^+$ ist $R_v^{\complement\bar{\omega}}$ nach oben halbstetig in ω.

Satz. S erfülle (G_1) und (G_3). Dann gilt für $(\Omega, \mathcal{H})$ das Konvergenzaxiom (K_1).

Insgesamt hat man den

Satz. Ω habe eine abzählbare Basis. Dann sind äquivalent:

1. S ist ein maximaler konvexer Kegel in $P_{m,\sigma}(\Omega)$ mit (G_1') und (G_3).

2. S ist die Familie der beschränkten superharmonischen Funktionen eines harmonischen Raumes $(\Omega, \mathcal{H})$ mit harmonischer 1, Konvergenzaxiom (K_1) und starker Punktetrennung:

(T') Für jedes geordnete Punktepaar (x,y) verschiedener Punkte in Ω gibt es eine positive superharmonische Funktion s mit $s(x) < s(y)$.

IV. Beziehung zur Theorie der Markoffschen Prozesse.

Herr Hansen trug vor über eine Charakterisierung von Familien exzessiver Funktionen durch Potentialkegel, die noch in sehr allgemeiner axiomatischer Potentialtheorie anwendbar ist.

Unter einem Potentialkegel $\mathcal{P}$ auf einem lokal-kompakten Raum E mit abzählbarer Basis wird dabei verstanden ein konvexer Kegel von positiven stetigen Funktionen auf E mit einer Abbildung S von $\mathcal{P}$ in das System der kompakten Teilmengen von E, die Träger genannt wird und die folgenden Eigenschaften hat:

(1) S ist additiv und positiv homogen, d.h. es gilt für alle $p, q \in \mathcal{P}$ und $\lambda > 0$

$$S(p+q) = S(p) \cup S(q)\ , \quad S(\lambda p) = S(p).$$

(2) S ist zerlegbar, d.h. für alle $p \in \mathcal{P}$ und Überdeckungen von E mit offenen Mengen U_1, U_2 gibt es $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ mit $p = p_1 + p_2$, $S(p_1) \subset U_1$ und $S(p_2) \subset U_2$.

Sei $\mathcal{P}$ ein Potentialkegel. Dann wird mit $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ die Menge aller $\mathcal{P}$-dominanten Funktionen bezeichnet, d.h. aller borelmeßbaren $d \geq 0$ auf E, die für alle $p, q \in \mathcal{P}$ der Ungleichung $d + p \geq q$ bereits dann auf ganz E genügen, wenn diese Ungleichung auf $S(q)$ gilt. $\mathcal{P}$ heißt submarkoffsch, falls $1 \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}}$, und schwach adaptiert, falls $\inf \{d \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}} : p - d \in \mathcal{C}_0^+\} = 0$ ist für alle $p \in \mathcal{P}$.

Ist $(P_t)_{t>0}$ eine Halbgruppe submarkoffscher Kerne auf E, so heißt eine borelmeßbare Funktion $f \geq 0$ auf E exzessiv, falls $\sup P_t f = f$ gilt. Eine submarkoffsche Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ heißt quasi-Fellersch, wenn für jedes $f \in \mathcal{C}_0$, d.h. für jede stetige reelle Funktion f auf E, die im Unendlichen verschwindet, $P_t f$ stetig und $\lim\limits_{t \to 0} \| P_t f - f \| = 0$ ist und wenn zwei stetige reelle exzessive Funktionen p und q existieren, so daß p beschränkt und streng positiv ist und $\{x \in E : p(x) \geq \alpha , q(x) \leq \beta\}$ kompakt für alle $\alpha, \beta > 0$. Damit erhält man den

Satz. Sei $\mathcal{E}$ eine Familie numerischer Funktionen auf E. Dann sind äquivalent

1. $\mathcal{E}$ wird erzeugt von einem schwach adaptierten submarkoffschen Potentialkegel mit $\mathcal{C}_0 \subset \tilde{\mathcal{P}} - \tilde{\mathcal{P}}$.

2. $\mathcal{E}$ ist die Familie der exzessiven Funktionen einer quasi-Fellerschen Halbgruppe.

$\tilde{\mathcal{P}}$ bezeichnet dabei die Familie der stetigen beschränkten abzählbaren Summen von Funktionen aus $\mathcal{P}$ und die Erzeugung von $\mathcal{E}$ durch $\mathcal{P}$ imitiert die Art und Weise, in der man Integrale positiver meßbarer Funktionen aus den Integralen stetiger reeller Funktionen mit kompaktem Träger berechnet (für Einzelheiten s. W.Hansen, Charakterisierung von Familien exzessiver Funktionen, Invent. math. 5, 335-348 (1968)).

Für die axiomatische Potentialtheorie erhält man folgendes

Korollar. Sei $(E,\mathcal{H})$ ein streng harmonischer Raum im Sinne von H.Bauer. Dann gibt es eine quasi-Fellersche Halbgruppe auf E, deren exzessive Funktionen gerade die positiven hyperharmonischen Funktionen des harmonischen Raumes sind und die die Übergangshalbgruppe eines Huntschen Prozesses ist.

W.Hansen (Erlangen)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft