# MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

## T a g u n g s b e r i c h t 35|1969

## Zur Didaktik des Geometrieunterrichts an Höheren Schulen

26.10. bis 1.11.1969

Die Tagung stand unter der bewährten Leitung von Dr.K.Fladt (Calw) und F.Raith (Freiburg).

Zu den Referaten:
In den meisten Referaten wurden neue Stoffgebiete aufgezeigt (analytische Geometrie in vektorieller Behandlung, Verwendung von Matrizen bei Abbildungen, Inzidenzgeometrien, Topologie) und deren Brauchbarkeit für die Schule erläutert bzw. lediglich zur Diskussion gestellt. Es ging also um die Stoffauswahl, um die Frage:" W a s sag ich meinem Kinde?"
Einige Referenten hatten versucht - was allgemein sehr begrüßt wurde - den Stoff für die Schule schon aufzubereiten. Ihnen ging es nicht nur um die Stoffauswahl, sondern sehr wesentlich um die Stofferschließung, also um die Frage:
" W i e sag ichs meinem Kinde?"

Die analytische Geometrie in vektorieller Behandlung unter Hervorhebung der Vektorraumstruktur erwies sich als unumgänglich. In einigen Bundesländern gehört sie - wie der Inhalt einiger Referate deutlich erkennen ließ - bereits zum festen Bestand des Unterrichts.
Die Untersuchung endlicher Geometrien erscheint unbedingt wünschenswert. Auffallend, aber auch bezeichnend, war die Tatsache, daß sechs Vorträge zur Inzidenzgeometrie gehalten wurden.
Die Verwendung der Matrixschreibweise bei der Untersuchung von Abbildungen bedeutet eine wesentliche Erleichterung.
Es gibt aber gewisse Schwierigkeiten im Hinblick auf die

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

derzeit bestehenden Lehrpläne. Algebraische Topologie als ausgedehntes Unterrichtsfach fand nur wenige Freunde, während gelegentliche Ausblicke auf verschiedene Probleme dieser Disziplin zur Auflockerung des Unterrichts begrüßt wurden. Sinnvoller wären topologische Methoden bei der Behandlung der Stetigkeit. In einem Vortrag wurde der umstrittene und so schwierige Winkelbegriff erneut beleuchtet, in einem weiteren die trigonometrischen Funktionen auf originelle Weise eingeführt.
Ein Referent plädierte sehr entschieden für die heuristische, für die genetische Methode im Schulunterricht (und nicht nur dort!). Man war sich darüber einig, daß diese Methode zwar immer wieder verwendet werden sollte, daß es aber wegen des erforderlichen Zeitaufwandes mit ihr allein auch nicht ginge. Das letzte Referat zeigte eine Notmaßnahme zur Behebung gewisser Mängel in der mathematischen Ausbildung unserer Gymnasiasten.

<u>Zu den Diskussionen</u>:
Die Tagungsleitung hatte dieses Jahr viele jüngere Lehrer eingeladen. Dieses jugendliche Element bewirkte,daß viel und lebhaft diskutiert wurde. Die Debatten waren getragen von Einsatz, aber auch von wirklich sachlicher Argumentation. Es wurde dabei vieles, wenn nicht alles in Frage gestellt. Abgesehen von Aussprachen nach den einzelnen Referaten wurden drei größere Diskussionen durchgeführt.

<u>Zur analytischen Geometrie in vektorieller Behandlung</u>
Anregungen und Wünsche:
Eine äußerliche Unterscheidung der Verknüpfungen im Vektorraum von denen des Skalarbereiches;
jeder Körper ein Beispiel für einen Vektorraum;
Deutung von homogenen linearen Gleichungen als Vektoren.
Dualitätsprinzip für den Vektorraum der Gleichungen und den der Lösungsmannigfaltigkeiten (Dimensionszusammenhang);
Vektor z.B. als Menge parallelgleicher Pfeile definieren;
die Mittelstufe muß für die Oberstufe Material bereitstellen;
Gewinnung des Vektorbegriffs in der Mittelstufe aus den Translationen;
Skalarprodukt bereits in der Mittelstufe;

S-Multiplikation bei Behandlung der Streckung;
der Gang vom Metrischen zum Affinen in der Mittelstufe und der umgekehrte Weg in der Oberstufe ergänzen sich sinnvoll; für die Oberstufe, also vom deduktiven Standpunkt, erscheint die affine Geometrie einfacher, desgleichen ihre axiomatische Behandlung in der Mittelstufe.

Warum und in welcher Weise soll Mathematik in der Schule unterrichtet werden?

Warum?

1. Die zunehmende Mathematisierung der Umwelt erfordert die Kenntnis der zugrunde liegenden mathematischen Strukturen und die Fähigkeit des abstrakten Denkens.

2. Die Mathematik ermöglicht das Entwickeln von Gewinnstrategien beim Lösen von Problemen.

3. Das Sozialprodukt wird entscheidend von der mathematischen Bildung eines Volkes bestimmt.

In welcher Weise?

Die Probleme sollen, wo es nur möglich ist, vom Schüler selbst gefunden werden. Dabei sind vor allem " offene " Probleme zu berücksichtigen, d.h. solche ohne algorithmisches Lösungsverfahren. Diese offenen Probleme sollten dann unter Anwendung von Strukturen und mit einer gewissen Systematik gelöst werden. Hierbei ist es erforderlich, daß heuristische Strategien selbst zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden.

Welcher Stoff?

Die Anwesenden waren sich einig, daß der axiomatischen Behandlungsweise eines mathematischen Gebietes ein fester Platz in der Schule gebührt. Hier bietet sich in überragender Weise die Geometrie an, da die Axiomatik in der Booleschen Algebra nicht das Wesentlichste ist und nur einen kleinen Raum einnimmt. Es wurde betont, daß nicht mit Axiomatik begonnen werden kann. Vielmehr müssen sich die Axiome von dem anschaulichen Geometrieunterricht der Mittelstufe ablösen und sich zu Gesetzmäßigkeiten entwickeln, mit denen dann auf der Oberstufe gearbeitet wird. Hier bieten sich vor allem die endlichen und auch die nichteuklidischen Geometrien an.

Da der Begriff des Vektorraumes ein wichtiges Hilfsmittel für die Algebraisierung der Geometrie auf der Oberstufe ist, soll das anschauliche Pfeilmodell schon in der Mittelstufe eingeführt werden. Abschließend wurde festgestellt, daß trotz (oder wegen?) aller Algebraisierung die Geometrie immer noch lebt.

Probleme des Geometrieunterrichts in der Mittelstufe

Darstellende Geometrie?

Die Frage, ob in der Schule noch darstellende Geometrie betrieben werden soll, wurde in dem Sinne beantwortet, daß die darstellende Geometrie als eigenes Stoffgebiet nicht mehr gelehrt werden sollte, sondern daß an geeigneten Stellen Grund- und Aufrißverfahren und einfache Schrägbilder die Anschauung schulen. Die Bildungswerte der darstellenden Geometrie sind nach wie vor unbestritten.

Stoffgebiete der Mittelstufe?

Unbedingt erforderlich: Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze, Tangenten von einem Punkt an einen Kreis, Umfang und Flächeninhalt des Kreises, Winkel am Kreis, eingeschränkte Trigonometrie.

Entbehrlich: Gemeinsame Tangenten zweier Kreise, Sehnen-Tangenten-Sekantensatz, Flächenverwandlungen, Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit, Kugelteile, Kongruenzsätze.

Aufbau der Mittelstufengeometrie?

1. Abbildungsgeometrisch
2. Affine vor metrischer Geometrie (Prade, MU 1966, Heft 5).
3. Axiomatisch, etwa nach Birkhoff, unter starker Verwendung der reellen Zahl.

Der Unterrichtsgang nach 2. wurde abgelehnt, da die Arbeitsmittel unnatürlich beschränkt werden (kein Zirkel) und dadurch viele Probleme für den Mittelstufenschüler " künstlich " erscheinen. Außerdem fehlen in der affinen Schulgeometrie einige bekannte Sätze, die für den Schüler interessant und auch beweisbar sind.

Beim Weg 3. gibt es bei uns keine Erfahrungen darüber, ob ein axiomatischer Aufbau in der Mittelstufe in dieser Form überhaupt möglich und erstrebenswert ist.

Die Anwesenden erkannten in einem abbildungsgeometrischen Aufbau den zur Zeit am besten gangbaren Weg, wobei der Vektorbegriff möglichst bald anschaulich und zum Beweisen verwendet werden sollte.

Zusammenfassung:

Die Tagung kann in jeder Beziehung als erfolgreich betrachtet werden. Es wurden eine Unzahl von Anregungen gegeben und viele Probleme diskutiert. Jeder Teilnehmer hatte einen Gewinn. Die Notwendigkeit der Geometrie für die Schule erwies sich deutlich.
Einige Fragen blieben nach Meinung des Berichterstatters jedoch noch offen:

1. Was verstehen wir heute eigentlich unter Geometrie?
2. Welche Bildungswerte kommen ihr zu?
3. Gibt es Kriterien (sie wären für Lehrplankonferenzen besonders wichtig!) nach denen man entscheiden kann, welche Teilgebiete der Geometrie in der Schule zu behandeln sind?

Teilnehmer

G.Adam, Mainz
F.Barth, München
H.Bergold, Germering
O.Botsch,Heidelberg
E.Brosig, Kirchheim a.Teck
W.Dötsch, Mayen
K.Faber, Mainz-Bretzenheim
R.Federle, München
K.Fladt, Calw
L.Fischer, Säckingen
H.Gall, Düsseldorf
H.Glaser, Schweinfurt
R.Kerkhoff, Freiburg-Wittenweiler
H.Klement, Asperg
O.Kölsch, Speyer
W.Kohlmann, Karlsruhe
R.Kottsieper, Koblenz
A.Kähmer, Aachen
S.Krauter, Stuttgart
J. Laub, Wien
C.Loos, Koblenz
H.Meißner, Hamburg
J.Meuer, Bremen
R.Müller, Singen
G.Preiß, Freiburg
F.Raith, Freiburg
K.Rommelfanger, Trier
J.Schönbeck, Flensburg
H.Schwartze, Gießen
H.Strößner, Erlangen
D.Umbreit, Hannover
D.Wagner, Kitzingen
H.Walter, Frankfurt
E.Wittmann, Erlangen
H.Zeitler, Tirschenreuth
G.Ziebegk, Berlin

## Vortragsauszüge

K. FABER: Zur Neugestaltung der Analytischen Geometrie

Es wurden folgende Vorschläge gemacht und erläutert :

1. Die Axiome des Vektorraumes sind eingehend von der Geometrie her zu motivieren. Es ist zweckmäßig, die Gesetze des 2-dimensionalen Vektorraumes bereits auf der Mittelstufe mit schulgemäßer Strenge zu begründen.

2. Der Begriff der Dimension ist im Zusammenhang mit der Basisdarstellung eines Vektorraumes zu erörtern. Auch die Koordinaten sind dabei einzuführen.

3. Es ist herauszuarbeiten, daß die Lösungsmenge eines linearen homogenen Gleichungssystems ein Vektorraum ist.

4. Jetzt erst erfolgt der Übergang vom Vektorraum zur affinen Ebene bzw. zum affinen Raum mit festem Bezugspunkt O . Geraden und Ebenen sind zu definieren.

5. Die Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen sollte der Einfachheit und Durchsichtigkeit wegen koordinatenfrei erfolgen. Dies wird am Beispiel zweier Geraden im $\mathfrak{W}^n$ erörtert.

6. Es werden die Gleichungen der affinen Abbildungen der Ebene auf sich mit dem Fixpunkt O aufgestellt. Die Kurven 2. Ordnung mit Mittelpunkt lassen sich in engstem Zusammenhang mit diesen Abbildungen behandeln. Ellipse und Hyperbel werden aus den flächentreuen affinen Abbildungen mit einem Fixpunkt und keiner bzw. 2 Fixgeraden erzeugt. Die affinen Eigenschaften dieser Kurven lassen sich ebenfalls mit Hilfe affiner Abbildungen entwickeln.

7. Erst nachdem die affine Behandlungsweise so weit fortgeschritten ist, nimmt man das Skalarprodukt für metrische Untersuchungen hinzu und behandelt Gerade, Ebene, Kreis, Kugel und gegebenenfalls die Kurven 2. Ordnung.

H. ZEITLER: Affine Inzidenzgeometrie im Unterricht

Einleitung :

Warum ist es sinnvoll am Gymnasium affine Inzidenzgeometrie zu treiben ? Wie läßt sich ein solcher Kurs aufbauen ?

Hauptteil :

A. Axiomensystem

$\mathbb{P} = \{R, S, \dots\}$ , $\mathcal{G} = \{r, s, \dots\}$ , Inzidenz

I. Durch zwei Punkte gibt es genau eine Gerade

II. Zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt gibt es genau eine Gerade, die mit der gegebenen Geraden keinen Punkt gemeinsam hat.

III. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen

(Vollständigkeit, Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit, monomorphe und polymorphe Systeme )

B. Formalgeometrie

1. Grundlegende Sätze

( Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation , ... )

2. Minimalsätze

( Es gibt mindestens 6 Geraden , ... )

3. Wenn_Dann Sätze

( Wenn die Ordnung der Ebene k ist, dann gibt es $k^2$ Punkte , ... )

4. Abbildungen

Kollineation, Dilatation., Streckung, Punktspiegelung, Translation ( identische Abbildzng )

C. Modellgeometrie

1. $k = 2$ ; $\mathbb{K}_2 = \{0, 1\}$

Modell über dem Restklassenkörper modulo 2 mit Untersuchung der Abbildungen. Isomorphes geometrisches Modell. Gültigkeit der Axiome.

2. $k = 3$ ; $\mathbb{K}_3 = \{0, 1, 2\}$

Analoge Untersuchungen wie in 1.

3. $k$ ; $\mathbb{K}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$

Modell über dem Restklassenkörper modulo k . Gültigkeit der Axiome.

Abbildungen :

Streckungen $x' = m\cdot x + a$ ; $y' = m\cdot y + b$ mit $m \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$

Translationen (identische Abbildung) $x' = x + a$ ; $y' = y + b$

Punktspiegelungen $x' = (k-1)\cdot x + a$ ; $y' = (k-1)\cdot y + b$

Dabei gilt $a, b \in \mathbb{K}_k$

4. Grenzen dieser Modellbildung

Gibt es affine Inzidenzebenen, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist?

Schluß :

Erweiterungsmöglichkeiten des Themas für die Schule.

H. MEISSNER : Einführung in die Axiomatik am Beispiel " geschlitzter" Räume

Ausgangspunkt ist ein Axiomensystem für den m-n-geschlitzten Raum ( Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 32 , 160-185,1968 ) d.h. für einen Raum, der sich darstellen läßt als ein m-dimensionaler projektiver Raum, aus dem ein n-dimensionaler projektiver Raum entfernt ist. Wir beschränken uns auf $m = 2$ und geben zunächst das Axiomensystem für eine absolute Inzidenzebene an :

A1, A2 Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade

$A3_2$ Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte

A4 Es gibt einen Punkt und eine Gerade, die nicht inzidieren

Es folgen Schnitt-, Existenzsätze und das Minimalmodell. Das Problem "Schnitt zweier Geraden ? " führt zur Einschränkung durch das

Parallelenaxiom P ,wir erhalten die affine Ebene.Zur Heraushebung der Struktur wird das System ( Punkt,Gerade,Inzidenz ) durch mehrere andere Modelle ersetzt.

Das Problem der Unabhängigkeit wird exemplarisch behandelt :

P wird ersetzt durch

A' 5 Je zwei Geraden schneiden sich.

Man erhält die projektive Ebene ( statt $A3_2$ jetzt $A3_3$ ).Es folgen analoge Sätze und die Heraushebung der Struktur durch mehrere Modelle. Gesucht ist dann ein Axiomensystem,das sowohl die affine als auch die projektive Ebene als Spezialfälle enthält.Hierzu wird $A3_i$ ersetzt durch

A3 Die Geradenmenge besteht aus zwei disjunkten Teilmengen $\mathcal{G}_a$ und $\mathcal{G}_p$ , wobei jede Gerade aus $\mathcal{G}_a$ mindestens 2 und jede aus $\mathcal{G}_p$ mindestens 3 verschiedene Punkte enthalte.

A' 5 wird ersstzt durch

A5 Jede Gerade aus $\mathcal{G}_p$ schneidet jede andere Gerade.

Hinzu kommen

A6 Schneiden sich zwei Geraden aus $\mathcal{G}_a$ , so gelte P und

A7 Für $\mathcal{G}_a \neq \emptyset$ geht durch jeden Punkt eine Gerade aus $\mathcal{G}_a$ .

Für $\mathcal{G}_p = \emptyset$ erhält man die affine,für $\mathcal{G}_a = \emptyset$ die projektive Ebene. Der Fall $\mathcal{G}_a, \mathcal{G}_p \neq \emptyset$ liefert als "Abfallerzeugnis " den 2,0- geschlitzten Raum ( "punktierte"Ebene ),dessen Struktur abschließend untersucht wird.

W . K O H L M A N N : <u>Axiomatik in der affinen und projektiven Inzidenzebene</u>

Die axiomatische Methode wird an einfachen Beispielen im Schulunterricht demonstriert.Es gelingt,eine in sich geschlossene axiomatische Theorie aufzubauen.Ausgegangen wird vom Axiomensystem der projektiven Ebene in einer für den Schüler scheinbar nichtgeometrischen Belegung der Variablen.In dieser Sprache kännen die Sätze der projektiven Ebene ohne Schwierigkeiten abgeleitet werden.Nach der Konstruktion eines Minimalmodells ( Tabelle ) wird dann über ein Strukturdiagramm ( durch welches das Minimalmodell veranschaulicht wird ) das bisherige Vorgehen geometrisch umgedeutet.Gleichzeitig ist damit die Einführung des Begriffs "Variable eines Axiomensystems " vorbereitet.

Im Unterrichtsgang wird behandelt :

1.Projektive und affine Inzidenzebene mit endlichen und nichtendlichen Modellen.

2.Widerspruchsfreiheit,Unabhängigkeit und Vollständigkeit eines Axiomensystems ( mit Beispielen ).

3. Sätze der affinen und projektiven Inzidenzebene.

4.Dualitätsprinzip der projektiven Ebene als Beispiel eines metamathematischen Satzes.

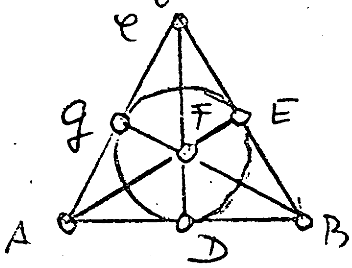
mathematischen Satzes.

5. Zusammenhang zwischen affiner und projektiver Ebene. Anwendung auf die angegebenen Modelle.

6. Erweiterung der anschaulichen affinen Ebene zur projektiven Ebene als Beispiel für die Zweckmäßigkeit des eingeführten Variablenbe - griffes.

H. W A L T E R : Die Kollineationsgruppe der 7-Punkte-Ebene

Es wird ein für die Schule möglicher Weg angegeben, mit elementaren Mitteln die volle Kollineationsgruppe der 7-Punkte-Ebene zu bestimmen. Die Abbildung gibt das Minimalmodell für die kleinste projektive Ebene $\mathcal{E}_7$ wieder.




$$\mathcal{E}_7 = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$$
$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$
$$\mathcal{G} = \{ABD, BCE, CDF, DEG, EFA, FGB, GAC\}$$
$$I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G} : \quad P \; I \; ABC \iff P = A \vee P = B \vee P = C .$$

Unter einer Kollineation $\gamma$ von $\mathcal{E}_7$ verstehen wir eine Abbildung, die $\mathcal{P}$ umkehrbar auf sich, $\mathcal{G}$ umkehrbar auf sich abbildet und die inzidenzerhaltend ist.

Die nicht leere Menge $\Gamma$ aller Kollineationen bildet bezüglich der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine Gruppe, die Kollineationsgruppe $\Gamma$ von $\mathcal{E}_7$.

Das Element $\alpha = (ABCDEFG) \in \Gamma$ erzeugt die zyklische Gruppe $\langle\alpha\rangle$ der Ordnung 7. Bezeichnet $\Theta$ die Gruppe aller Kollineationen, welche die Gerade ABD fixieren, so gilt

$\Gamma = \Theta \cdot \langle\alpha\rangle$ ; $\Theta \cap \langle\alpha\rangle = \{i\}$, d.h. jedes $\gamma \in \Gamma$ läßt sich eindeutig als $\gamma = \vartheta \cdot \alpha^m$ mit $\vartheta \in \Theta$ und $m \in N$, $m \leq 7$ darstellen ; $i$ ist die Identität.

Im folgenden wird von der noch unbekannten Gruppe $\Theta$ versucht, bekannte Faktoren abzuspalten. Mit $\beta = (ABD)(EFG) \in \Gamma$ und $\Sigma$ = Gruppe aller Kollineationen, die ABD und A fixieren, ergibt sich : $\Theta = \Sigma \cdot \langle\beta\rangle$; $\Sigma \cap \langle\beta\rangle = \{i\}$.

Analog : $\Sigma = \Omega \cdot \langle\delta\rangle$; $\Omega \cap \langle\delta\rangle = \{i\}$ mit $\delta = (BD)(EF)$ und $\Omega = \Gamma_A \cap \Gamma_B \cap \Gamma_D$.

Die Struktur von $\Gamma$ ist somit bekannt, sobald man $\Omega$ kennt. Für die Bestimmung der Elemente von $\Omega$ benützen wir einen Satz von R. BAER, nach dem eine Kollineation genau dann zentral ist, wenn sie axial ist. ( Man kann die Elemente von $\Omega$ auch direkt am Modell bestimmen.)

Eine Kollineation, die ABD punktweise festläßt, läßt einen Punkt geradenweise fest. Liegt dieser Punkt außerhalb von ABD, so ist die Kollineation die Identität. Liegt der Punkt auf ABD, so besteht $\Omega$ aus genau den Translationen mit Achse ABD und Zentrum A oder B oder D ; d.h. $\omega_1 = (CG)(EF)$, $\omega_2 = (CE)(FG)$

$\omega_3 = (\,CF\,)(\,EG\,)$ , $\omega_4 = 1$ .

$\Omega$ erweist sich als die Kleinsche Vierergruppe und man erhält :

$$\Gamma = \Theta\cdot\langle\alpha\rangle = (\Sigma\cdot\langle\beta\rangle)\cdot\langle\alpha\rangle = [(\Omega\cdot\langle\delta\rangle)\cdot\langle\beta\rangle]\cdot\langle\alpha\rangle$$

Für die Ordnung von $\Gamma$ ergibt sich :

$$|\Gamma| = |\Omega|\cdot|\langle\delta\rangle|\cdot|\langle\beta\rangle|\cdot|\langle\alpha\rangle| = 4\cdot2\cdot3\cdot7 = 168$$

H. J. S C H Ö N B E C K : Synthetische und analytische Geometrie

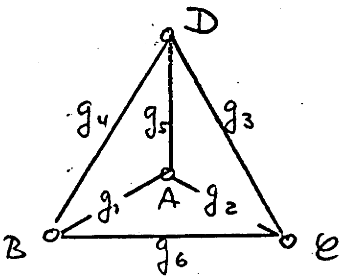
Im Unterricht an der Höheren Schule wird Geometrie in zwei von einander unabhängigen Formen dargeboten : als synthetisch-axiomatische Geometrie auf der Mittelstufe bzw. als analytisch-algebraische Geometrie auf der Oberstufe. Der logische Zusammenhang zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen wird im Schulunterricht bisher nicht untersucht, läßt sich jedoch im Rahmen der ebenen affinen Geometrie leicht aufdecken.

Vorgeschlagen werden deshalb

a) eine propädeutische Behandlung der affinen Inzidenzgeometrie auf der Mittelstufe

Es werden dazu isomorphe Modelle der 9-Punkte-Ebene angegeben

b) die Einführung algebraischer Strukturen ( Gruppe, Körper, linearer Vektorraum ) im Zusammenhang mit endlichen Modellen der affinen Inzidenzgeometrie, ebenfalls auf der Mittelstufe




$A \longleftrightarrow (\,0,0\,)$ , $B \longleftrightarrow (\,0,1\,)$

$C \longleftrightarrow (\,1,0\,)$ , $D \longleftrightarrow (\,1,1\,)$

$g_1 \longleftrightarrow x = 0$ , $g_2 \longleftrightarrow y = 0$

$g_3 \longleftrightarrow x = 1$ , $g_4 \longleftrightarrow y = 1$

$g_5 \longleftrightarrow x + y = 0$, $g_6 \longleftrightarrow x + y = 1$

c) das Studium affiner Schließungssätze ( Pappos-Pascal , Desargues, Scherensatz ) in endlichen Modellen der affinen Inzidenzgeometrie und der Beweis dieser Sätze im Rahmen der euklidischen Geometrie.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich auf der Oberstufe der bekannte Zusammenhang zwischen affinen Inzidenzebenen, in denen der Satz von Pappos-Pascal gilt, und affinen Koordinatenebenen über einem Körper allgemein beweisen. Vermittelt werden u.a. die Einsicht, daß Geometrie keine quasi-physikalische Theorie des Raumes unserer Anschauung ist, daß sich die Anwendung algebraischer Methoden auf eine synthetisch begründete Geometrie logisch einwandfrei rechtfertigen läßt, und daß ein Rechnen mit Koordinaten unabhängig von jedem Maßzahlbegriff möglich ist.

R. M Ü L L E R : Polyeder und ihre algebraische Darstellung
Es wurde über einen Unterrichtsgang berichtet, der sich die algebraische Darstellung der Polygone und Polyeder im Begriffsnetz des linearen Vektorraumes zum Ziel setzte. Von intuitiven Überlegungen ausgehend, wurden die Polyeder als konvexe Hüllen ihrer Ecken definiert und die Gleichheit mit den dazugehörigen baryzentrischen Hüllen nachgewiesen. Eine Vertiefungsmöglichkeit des Stoffes wurde durch die Erarbeitung der Begriffe Simplex - Komplex angesprochen.
Durch den dargestellten Unterrichtsgang sollte den Schülern der Weg von der intuitiven Vorstellung eines Begriffes bis zu seiner abstrakten algebraischen Fixierung aufgezeigt werden.

F . B A R T H : Produkte von Vektoren
1. Definition
$\varphi \quad \mathfrak{V}^n \times \mathfrak{V}^n \to \mathfrak{V}^m$ heißt "Produkt" : $\Longleftrightarrow$ $\varphi$ bilinear .
Bezüglich einer Basis ergibt sich die Darstellung :
$\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \sum a_i b_j \mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{v}_j$
Das Produkt ist bezüglich dieser Basis eindeutig bestimmt durch die $n^2$ "Strukturkonstanten" $\mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{v}_j$ .
2. Beispiele
a) $\mathfrak{V}^2 \times \mathfrak{V}^2 \to \mathfrak{V}^1$
Inneres Skalarprodukt $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \sum a_i b_i$
Äußeres Skalarprodukt $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \mathrm{Det}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$
b) $\mathfrak{V}^2 \times \mathfrak{V}^2 \to \mathfrak{V}^2$
Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen .
c) $\mathfrak{V}^3 \times \mathfrak{V}^3 \to \mathfrak{V}^m$
$m = 1$ $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ als Verallgemeinerung von $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$
$m = 3$ $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ als Verallgemeinerung von $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$
$\mathfrak{V}^3 \times \mathfrak{V}^3 \times \mathfrak{V}^3 \to \mathfrak{V}^1$
$\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c} = \mathrm{Det}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ .
3. Durch Produkte vermittelte Abbildungen
Durch $\mathfrak{x} \xrightarrow{\bar{A}} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}$ wird eine lineare Abbildung $\bar{A} : \mathfrak{V}^n \to \mathfrak{V}^m$ definiert.
Bezüglich einer Basis kann sie vermittels einer m-n-Matrix $\mathfrak{A}$ dargestellt werden in der Form $\bar{A}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ .

O . B O T S C H : Äquivalenzklassen und Untergruppen ebener affiner Abbildungen mit fixem Nullpunkt
1. Für beliebige reguläre Matrizen $\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ergibt sich für alle regulären Matrizen $\mathfrak{U}$ die Klasse äquivalenter Matrizen $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{U}^{-1}$
Invarianten jeder Klasse sind Det ( $\mathfrak{A}$ ) ; Spur Sp ( $\mathfrak{A}$ ) ;
$P(t) = t^2 - t\,\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) + \mathrm{Det}(\mathfrak{A})$ und damit auch die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ aus $P(\lambda) = 0$ .

2. Aus der Feststellung, daß $P(\mathfrak{A}) = 0$ d.h. $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}\,\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) - \mathfrak{E}\,\mathrm{Det}(\mathfrak{A})$ wird nach der Struktur von $\mathfrak{M} = \alpha\,\mathfrak{A} + \varepsilon\,\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{A} \neq s\,\mathfrak{E}$ gefragt.

Es zeigt sich, daß es sich i.a. um einen kommutativen Ring handelt, dessen beide ( einzigen ) singulären Matrizen $\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E}$ sind.

Die kanonische Basis des zweidimensionalen Vektorraumes der $\mathfrak{M}$ ist

$$\mathfrak{K}_i = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}(\mathfrak{A} - \lambda_j \mathfrak{E}) \qquad \text{für } i,j = 1,2 \text{ und } i \neq j$$

Hierbei ist $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{E}$ ; $\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{K}_2 = (0)_{2\times 2}$ ; $\mathfrak{K}_i^2 = \mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{A} = \lambda_1 \mathfrak{K}_1 + \lambda_2 \mathfrak{K}_2$ ; z.B.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für komplexe Eigenwerte $\lambda_i$ bildet die Menge Körper, die nicht isomorph sind.

Invarianten des Ringes bzw. Körpers sind die Eigenvektoren und die Terme $u = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}$ ; $v = \dfrac{a_{21}}{a_{12}}$

Führt man als Basisvektoren $\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v & -u \end{pmatrix}$ ein, so enthält $R(\mathfrak{A}) = \{p\,\mathfrak{E} + q\,\mathfrak{J}\}$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ nur reellwertige Matrizen a u c h für den Fall komplexer Eigenwerte.

L. F I S C H E R : <u>Endliche affine Geometrie in Obersekunda</u>

Es wird ein 2-dimensionaler Vektorraum zugrundegelegt. Ausgehend von der Darstellbarkeit eines jeden Vektors aus zwei Basisvektoren wird die Frage aufgeworfen, warum die Anzahl der Vektoren i.a. unendlich ist. Dies führt darauf, als Skalarenkörper einen endlichen Körper zu verwenden. Dazu steht der Restklassenkörper modulo 3 zur Verfügung. Damit entsteht ein Vektorraum V mit 9 Vektoren. Als erstes heuristisches Modell dafür werden Klassen von Pfeilen verwendet. Werden die Vektoren als Ortsvektoren in einem affinen Punktraum gedeutet und an einem Punkt angetragen, so entsteht eine 9-Punkte-Geometrie. Die charakteristische Eigenschaft von V , daß $\bigwedge \mathfrak{x} \in V$ $\mathfrak{x} + \mathfrak{x} + \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ gilt, wird durch dieses Modell nicht wiedergegeben. Daher werden in einem zweiten, verbesserten Modell die Basisvektoren als Drehung, bzw. Wulstung um $120^{\circ}$ auf einem Torus gedeutet. Auf diese Weise erhält man auf dem Torus eine 9-punktige Geometrie, welche die algebraischen Eigenschaften des unterliegenden Vektorraumes vollkommen wiederspiegelt.

Geraden der Geometrie werden durch ihre vektorielle Gleichung eingeführt und in beiden Modellen gedeutet. Die 12 Geraden mit jeweils genau drei Punkten zerfallen gemäß vier möglichen eindimensionalen Vektorräumen in vier Klassen paralleler Geraden mit je drei Elemen-

ten.Weitere geläufige und ungewohnte Eigenschaften der Geraden – Schnittpunktsfragen,Kollinearitätsbedingungen – werden aufgezeigt. Der Übergang zur Koordinatendarstellung wird durch geeignete Zu – sammenfassung der Punkte in Blockschemata motiviert.
Der Begriff Teilverhältnis wird aus der affinen Geometrie auf den vorliegenden Fall übertragen.Am Problem des Mittelpunktes wird auf den Zusammenhang zwischen Anordnung des Körpers und dem geometrischen "Zwischen"-Begriff hingewiesen.Es ergeben sich kuriose Eigenschaften dieser Geometrie im Hinblick auf die Seitenhalbierende im Dreieck und die Strahlensätze.

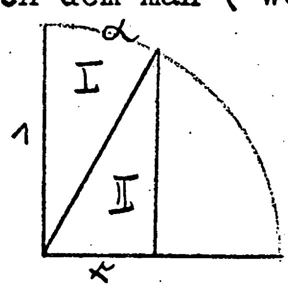
R. K O T T S I E P E R : Einfache Probleme der algebraischen Topologie im Unterricht

Der Vortrag sollte die Frage zur Diskussion stellen,ob und wie man Probleme der algebraischen Topologie im Unterricht behandeln kann. Für die Mittelstufe ist dabei an die Einführung des Komplexes als Simplexmenge und die Betrachtung von Ketten-Zyklen-und Rändergruppen an ausgewählten Beispielen gedacht.Die ausführliche Betrachtung von einfachem Band und Möbiusband dient der Erläuterung.
In der Oberstufe geht man von der stetigen Abbildung zum Homöomorphismus über und untersucht Äquivalenzklassen von Punktmengen.Die Abbildung der euklidischen Ebene auf eine gelochte Kugel und die Untersuchung der Möglichkeiten eines Abschlusses wird genauer dargestellt. Es ergibt sich die topologische Äquivalenz von projektiver Ebene, geschlossenem Möbiusband und Kleinschem Schlauch.Die Einführung von Homologiegruppen an einfachen,ausgewählten Polyedern wird vorgeschlagen.

H. B E R G O L D : Trigonometrische Funktionen im Mittel-und Oberstufe

Mittelstufe :

Es ist wichtig,ein Verfahren kennenzulernen,nach dem man ( wenigstens im Prinzip ) die Werte der Winkelfunktionen berechnen kann.Das angegebene Verfahren hat den Vorteil,daß man die "Rechnung" in gleicher Front mit Arbeitsteilung ausführen kann.




Man bestimmt den Flächeninhalt I + II mit trapezförmigen Streifen.Es gilt : $\alpha = 2\,(\,I + II\,) - x\sqrt{1 - x^2}$.
Man erhält so die Werte von arc sin.

Oberstufe :

Es geht darum,die Differenzierbarkeit der Funktionen sin und cos nachzuweisen und die Abbildungsfunktionen zu bestimmen.Die üblichen

Methoden hierzu haben nur heuristischen Charakter, da man ja gar keine ( arithmetische ) Vorschrift etwa zur Bestimmung von $\sin\alpha$ aus $\alpha$ besitzt. Eine solche Vorschrift kann man gewinnen über die Funktion as;

$\mathrm{as}(x) = 2\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt - x\sqrt{1-x^2}$, Definitionsbereich $[0,1]$.

Diese Funktion ergibt sich unmittelbar aus dem Rechenverfahren der Mittelstufe. Ihre Umkehrfunktion, genannt s , erfüllt die Gleichung $s' = \sqrt{1-s^2}$.

Mit $\chi = \mathrm{as}(1)$ zeigt man :

$\mathrm{as}(x) + \mathrm{as}(\sqrt{1-x^2}) = \chi$.

Dies ist äquivalent mit $s'(\alpha) = s(\chi - \alpha)$.

Die Funktion s wird durch Spiegelungen zur Funktion sin erweitert, die Funktion cos wird erklärt durch $\cos\alpha = \sin(\chi - \alpha)$. Es gilt dann $\sin' = \cos$. Man beweist die Additionstheoreme nach dem bekannten Verfahren ( $\sin c - \sin x \cos(c-x) - \cos x \sin(c-x) = 0$ identisch in c und x ) und identifiziert die Zahl $\chi$ mit $\frac{\pi}{2}$, etwa durch den Nachweis von $\sin\frac{\chi}{3} = \frac{1}{2}$.

K. ROMMELFANGER : <u>Ein geometrischer Zugang zur Axiomatisierung des Begriffes Winkel</u>

Winkel hängt eng mit dem Begriff Drehung zusammen. Transformieren wir eine Drehung mit einer Drehung oder Verschiebung, so erhalten wir stets eine Drehung mit demselben "Drehwinkel ". Da Drehungen zusammen mit den Verschiebungen eine Gruppe bilden ist die Relation :" $b_1$ ist durch eine Verschiebung oder Drehung in $b_2$ transformierbar" eine Äquivalenzrelation. Wir erhalten so die "gleichartigen" Drehungen.

Sei $s_b \circ s_a(P) = Q$, so heißt die Menge

$M = \{R \,/\, s_c \circ s_a(P) = R \,;\, c \in \text{Winkelraum } a,b\}$ ein Bogen $B_{PQ}^{s_b \circ s_a}$ ( $b \neq a$ ).

Orientierung des Bogens :

$B_{PQ}^{s_b\circ s_a} = \{R \,/\, s_c \circ s_a(P) = R \,;\, c \in W_{ab}\}$

$T = s_g \circ s_a(P)$ , $g \in W_1$ , $W_1 \subset W_{ab}$

$S = s_h \circ s_a(P)$ , $h \in W_2$ , $W_2 \subset W_{ab}$

S liegt vor T bezüglich Q $\Longleftrightarrow$ $W_2 \subset W_1$.

Eine Bahn ist eine Folge von orientierten Kreisbögen, die alle Teilmengen desselben Kreises sind und bei denen der Endpunkt des vorhergehenden mit dem Anfangspunkt des nachfolgenden übereinstimmt.

Es folgt nun die Definition von "Zerlegungsgleich".

Zu jeder Bahn gibt es eine zerlegungsgleiche Bahn, bei der alle Bögen die gleiche Orientierung haben.

Zwei Bögen heißen äquivalent, wenn die zu gleichartigen Drehungen gehören und gleich orientiert sind.

Zwei Bahnen heißen äquivalent dann und nur dann, wenn es zu jeder Bahn je eine Folge etwa $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n \rangle$, $\langle B_1', B_2', \ldots, B_n' \rangle$ mit $B_i$ äquivalent zu $B_i'$ gibt.

H. GALL: Bericht über einen Lehrgang zur Erweiterung und Vertiefung der mathematischen Ausbildung für Abiturienten

Es wurde über die Notwendigkeit, die Planung und die Durchführung von Mathematik-Lehrgängen im Lande Nordrhein-Westfalen berichtet. Sie sollen ein Bindeglied zwischen Universität und Schule sein und Mängel bei der Ausbildung unserer Gymnasiasten beheben. Der Bericht stützte sich auf Statistiken, die von H. TÖPFER in "Praxis der Mathematik" ( 11. Jahrgang, 1969, S.123 - 131, S.154 - 163 ) veröffentlicht wurden.

H. Zeitler, Tirschenreuth

Nachbemerkung von Herrn Raith:

Die Ablehnung z.B. eines "Affinen" Zwischenkurses in der Mittelstufe scheint mir zu apodiktisch. Es sind schon einige erfolgreiche Versuche im Unterricht unternommen worden, und man sollte zu weiteren ermuntern. - Der Birkhoffsche Vorschlag ist ebenfalls im Unterricht erprobt, und weitere Versuche sollten folgen, damit das heikle Gebiet der Mittelstufengeometrie allseitig gefördert wird. Im übrigen schließe ich mich dem Bericht von Herrn Zeitler zu dieser produktiv und harmonisch verlaufenen Tagung an.

gez. Raith