

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 37/1969

Iterationsverfahren in der Numerischen Mathematik

16.11. bis 22.11.1969

Die Leitung der Tagung hatten L. Collatz (Hamburg) und H. Unger (Bonn). Mit 55 Teilnehmern, darunter Gäste aus Canada, Finnland, Italien, den Niederlanden, Österreich, Rumänien, Schweden und der Schweiz, war diese Tagung sehr stark besucht. Das große Interesse, das heute in der Numerischen Mathematik den Iterationsverfahren gilt, spiegelt sich auch wider in der beachtlichen Zahl von 25 Vorträgen. Es zeigt sich, daß direkte Lösungsverfahren vielfach numerisch unbefriedigende Ergebnisse liefern oder, wie bei vielen nichtlinearen und selbst linearen Problemen, nicht existieren und daher Iterationsverfahren den gesteigerten Anforderungen der numerischen Praxis oft nicht mehr genügen. Viele neue Anwendungsgebiete für Iterationsverfahren wurden mit dem zunehmenden Einsatz elektronischer Rechenanlagen erschlossen.

Die vielseitige Anwendbarkeit iterativer Verfahren wurde ersichtlich aus dem weit gespannten Themenkreis der gehaltenen Vorträge, die den theoretischen Grundlagen, der praktischen Durchführung und der Anwendung in verschiedenen Spezialgebieten galten. Behandelt wurden z.B. lineare und nichtlineare Gleichungssysteme, insbesondere mit Integralgleichungen, Anfangswertaufgaben und Randwertaufgaben, periodische Lösungen bei nichtlinearen Schwingungsgleichungen, funktionalanalytische Dualitätssätze mit Anwendungen in der Optimierungstheorie, Probleme aus der Approximationstheorie und partielle Differentialgleichungen mit Anwendungen in der Halbleiterphysik. Vorträge zu den theoretischen Grundlagen befaßten sich mit der Abschwächung der Voraussetzungen bei bekannten Iterationsverfahren und dadurch bedingter Vergrößerung der Anwendungsbereiche, mit Möglichkeiten der Konvergenzbeschleunigung und Vergrößerung der Konvergenzbereiche bis hin zur globalen Konvergenz und der Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung.

Insgesamt boten sowohl die Vorträge als auch die anschließenden Diskussionen viele Möglichkeiten zum Erfahrungsaustausch und zur Anregung. Die Tagung spielte sich, wie immer, in der angenehmen und harmonischen Atmosphäre des Oberwolfacher Hauses ab.

Teilnehmer:

J.Albrecht, Hamburg	P.Laasonen, Helsinki
H.Amann, Freiburg	K.H.Müller, Frankfurt
R.Ansorge, Hamburg	R.Nicolovius, Hamburg
Blumhagen, Berlin	W.Niethammer, Dortmund
E.Bohl, Hamburg	J.Nitsche, Freiburg
D.Braess, Münster	K.Nixdorff, Bochum
Brandt, Bonn	A.Pasquali, Florenz
Breckner, Cluj	J.Reinermann, Aachen
E.Bredendiek, Hamburg	M.Reiser, Zürich
B.Brosowski, München	R.Reißig, Saarbrücken
L.Collatz, Hamburg	W.Riha, Wien
F.Dejon, Zürich	E.Schäfer, München
H.Dirschmid, Wien	F.W.Schäfer, Köln
B.Döring, Darmstadt	A.Schneider, Neuss
L.Elsner, Hamburg	E.Schock, Bonn
H.Feldmann, Hamburg	H.R.Schwarz, Zürich
Ch.Fenske, Bonn	A.van der Sluis, Utrecht
R.Franzen, Birlinghoven	H.-J.Töpfer, Berlin
C.E.Fröberg, Lund	W.Törnig, Jülich
E.Gekeler, Bochum	H.Unger, Bonn
G.Hämmerlin, München	H.Wacker, München
H.G.Hegering, München	H.Werner, Münster
K.-H.Hoffmann, München	J.Werner, Hamburg
W.Kleinert, Wien	W.Wetterling, Enschede
W.Krabs, Hamburg	K.Zeller, Tübingen
Th.Kreifelts, Birlinghoven	K.A.Zischka, Windsor
I.Kupka, Hamburg	J.R.Zweerus, Utrecht

P.LAASONEN: Einige Fragen über iterative Algorithmen

Wenn die Methoden, die zur Lösung nichtlinearer Gleichungen $Fu = 0$ angewandt werden, für allgemeinere Banachräume und R auf sich selbst abbildende Operatoren F verallgemeinert werden, entstehen neue Schwierigkeiten. Wenigstens teilweise werden folgende Fragen beantwortet:

1. Ist es möglich, die Konstruktion der im Newtonschen Verfahren bedingten Fréchet'schen Ableitung zu vermeiden?

In den Fällen, wo F einen Steigerungsoperator $\mathcal{J}F$ besitzt, kann das Steffensen-Verfahren die gleichen Dienste wie das Newton-Verfahren bieten.

2. Ist es möglich, die Inversion von F oder $\mathcal{J}F$ zu vermeiden? Dieses wird tatsächlich während des Prozesses durch eine iterative Umkehrung zustande gebracht, wie es Ulm und Helfrich (i.J. 1967) gezeigt haben.

3. Die Konvergenzordnung, die für das Steffensen-Verfahren 2 ist, kann durch eine einfache Umänderung zu $1 + \sqrt{2}$ erhöht werden.

4. Wie ist die Iteration vorzuführen, wenn man keine erste Approximation kennt? Statt der ursprünglichen Gleichung $Fu = 0$ betrachtet man z.B. die vom Parameter t abhängige Gleichung $F_t u = (1-t)(u-u_0) + tFu = \theta$, die für $t=0$ die Lösung $u=u_0$ besitzt und für schrittweise wachsende Werte von t eine Folge von Gleichungen gibt, die nacheinander gelöst werden, und zwar so, daß die Lösung $u^{(u)}$ von $F_t u = \theta$ als das Anfangselement für die iterative Lösung der zunächst kommenden Gleichung

$F_{t_{u+1}}^{t_u}$ $u=0$ gebraucht wird. Für genügend kleine Schrittlängen (t_u, t_{u+1}) ist dieses auch theoretisch zulässig, zwar unter ziemlich strengen Voraussetzungen. Beim Erreichen von $t=1$ ist die ursprüngliche Aufgabe gelöst worden. Die Durchführung des Gedankens fordert einige besondere Maßnahmen.

R.REISSIG: Iterationsverfahren zur Bestimmung der Anfangswerte periodischer Lösungen

Bei einer Klasse nicht-autonomer Vektor-Differentialgleichungen mit einer in der unabhängigen Variablen t ω -periodischen rechten Seite läßt sich das Problem der ω -periodischen Lösungen als Fixpunktproblem im n -dimensionalen Phasenraum formulieren. Die gesuchten Fixpunkte sind die Anfangsstörungen zur Zeit $t = 0$ der periodischen Lösungen. Der Nachweis von Fixpunkten auf Grund des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist bei recht allgemeinen Nichtlinearitäten durch Auswertung gewisser Integralungleichungen möglich. Im konkreten Fall kann man eine Kugel um den Ursprung des Phasenraumes explizit angeben, in der Fixpunkte liegen. Um diese zu berechnen, muß man die Nichtlinearität noch einer Lipschitzbedingung unterwerfen, und zwar in dem Bereich, den die Lösungen von der erwähnten Sphäre aus im Verlauf einer Periode erreichen können. Für die Lipschitz-Konstante können - je nach der Betrachtungsweise - verschiedene Einschränkungen hergeleitet werden.

B.BROSOWSKI: Eine Variante des Remez-Töpfer-Verfahrens

Zur Konstruktion einer besten Approximation an ein gegebenes Element f eines normierten Vektorraumes R bezüglich einer Teilmenge $V \subset R$ wurde eine Folge (v_k) von Elementen aus V und eine Folge $\sum_1 \subset \sum_2 \subset \dots$ von Teilmengen des Dualraumes R' nach folgender Vorschrift konstruiert:

1. Man wähle ein beliebiges Element $L \in E_P S_R$, (die Menge der Extrempunkte der Einheitskugel in R') und setze

$$\sum_1 := \{L\}.$$

2. Ist \sum_k bestimmt, so bestimme man ein $v_k \in V$, das der Beziehung

$$\sup_{L \in \sum_k} |L(f-v_k)| = \inf_{v \in V} \sup_{L \in \sum_k} L(f-v)$$

genügt.

3. Man bestimme ein $L_k \in E_P S_R$, das der Bedingung

$$\sup_{L \in E_P S_R} L(f-v_k) = L_k(f-v_k)$$

genügt und setze $\sum_{k+1} := \sum_k \cup \{L_k\}$.

Es wurde gezeigt: Ist V approximativ kompakt, so ist die Folge (v_k) konstruierbar und besitzt Häufungspunkte in V . Jeder Häufungspunkt ist eine Minimallösung für f . Die unter 2. genannte Bestimmung von v_k führt man im Falle eines linearen Teilraumes V mit Hilfe des auf normierte Vektorräume verallgemeinerten Remez-Töpfer-Verfahrens durch.

F.W.SCHÄPFKE: Zum Anwendungsbereich einiger Iterationsverfahren

Im Interesse wesentlich erweiterter Anwendungsfähigkeit werden der Fixpunktsatz für "kontrahierende" Abbildungen und ein Satz über das vereinfachte Newton-Verfahren in fast unveränderter Formulierung und Methodik unter minimalen Voraussetzungen erhalten, nämlich für "quasimetrische limes-Räume" bzw. "quasinormierte limes-Gruppen". Ein ausgedehntes Einordnungsschema macht den gegenüber früheren Ansätzen (insbes. verallgemeinerte metrische Räume) erreichten größeren Grad von Allgemeinheit deutlich.

A. VAN DER SLUIS: Ungenauigkeitsbereiche für gestörte Gleichungen

Die bekannte Störungstheorie für Operatorgleichungen (siehe z.B. Kantorowitsch-Akilow, Kap.18) beschäftigt sich mit "glatten" Störungen, wobei z.B. das Newtonsche Verfahren noch konvergiert.

Für Störungen, verursacht von Rundungsfehlern, kann echte Konvergenz nicht mehr bestehen, da jede Wurzel sich gewissermaßen "auflöst" in einem Ungenauigkeitsbereich. Für einige bekannte Lösungsverfahren wird untersucht, ob sie überhaupt bis in die Nähe dieses Ungenauigkeitsbereiches führen, und was geschieht, wenn man stoppt, sobald theoretisch begründete Monotonie-Eigenschaften fehlen (siehe auch z.B. Collatz, Funkt. Anal. u. Num. Math. s. 174 ff).

K.A.ZISCHKA: A functional analytic approach to the problems of existence and approximations of solutions of some non linear integral equations

(Reprints may be obtained from K.A.Zischka, Department of Mathematics, University of Windsor, Windsor/Ont.)

C.-E.FROEBERG: On the prime zeta function and a related Dirichlet series

The Prime Zeta Function $P(s)$ is defined by the equation

$$P(s) = \sum_{(p)} p^{-s}, \quad s = \sigma + i\tau.$$

Numerical values for $p = 2, 3, 4, \dots$ were obtained already by Euler. Landau and Walfisz showed that the function cannot be continued to the left of the line $\sigma = 0$. Procedures are now given for the numerical computation of $P(s)$ for reasonable complex values of s .

The relation $(1 + P(s)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = 1, \sigma > \sigma_0$, defines a

certain Dirichlet series. The properties of the coefficients a_n are investigated and various sums containing these coefficients have been computed numerically. More or less heuristic explanations of the results obtained are also discussed..

E. BOHL: Zu den Grundlagen der Iteration

Sei Y eine nicht leere Menge, welche durch den Operator T in sich abgebildet werde. Bei der Behandlung der Gleichung $x = Tx$ durch ein Iterationsverfahren $x_{n+1} = Tx_n, x \in Y$ tritt zunächst das Problem auf, Mengen $M(x_n) \subset Y$ zu konstruieren, die unter T invariant bleiben. Die Konvergenz von x_n gegen die gesuchte Lösung in $M(x_n)$ ist dann eine topologische Aufgabe, welche mit den üblichen Methoden in Angriff genommen werden kann. Zur Konstruktion von $M(x_n)$ wurde ein verallgemeinerter Abstandsbegriff auf Y angenommen. Die so erhaltenen Mengen vereinfachen das Konzept der sog. P -Räume. Es wurde gezeigt, daß der Satz über das Iterationsverfahren im P -Raum unter einer Zusatzvoraussetzung eine Folgerung des Kontraktionsatzes im metrischen Raum ist. Die gewonnene Fehlerabschätzung enthält überdies lauter numerisch leicht zugängliche Größen.

E.SCHOCK: Modifizierte Ritz-Verfahren

Sei A ein selbstadjungierter (positiv definit) stetiger Operator in einem Hilbertraum H mit dem Spektrum $\sigma(A)$, f eine auf $\sigma(A)$ stetige reelle positive Funktion. Ist dann

$\varrho := \max \{ |1 - f(t)|, t \in \sigma(A) \} < 1$, so gilt für $\| \cdot \|_f$ mit $\| x \|_f = \| f(A) x \|$ die Ungleichung

$$\| x \| \leq (1 - \varrho)^{-1} \| x \|_f .$$

Sei x_0 die Lösung der Gleichung $Ax = y$, H_n ein n -dimensionaler Teilraum von H . Bestimmt man z^f durch

$$\| x_0 - z^f \|_f = \inf_{z \in H_n} \| x_0 - z \|_f ,$$

so gilt die Fehlerabschätzung

$$\| x_0 - z^f \| \leq (1 - \varrho)^{-1} \| x_0 - z^f \|_f .$$

Durch Spezialisierung von f erhält man eine Reihe von Verfahren, die sich als Modifikation des Verfahrens von Ritz und der Fehlerquadratmethode auffassen lassen.

M.REISER: Partielle Differentialgleichungen der Halbleiterphysik

Das folgende nichtlineare Differentialgleichungssystem beschreibt die Verhältnisse in einem Halbleiterkristall

$$\nabla (\varrho \vec{v} + D \nabla \varrho) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{v} = -\mu \nabla \phi$$

$$\nabla^2 \phi = \varrho_0 (1 - \varrho)$$

$$\mu = \mu (|\nabla \phi|) .$$

Zugrunde gelegt wird dabei ein Rechtecksgebiet mit den Randbedingungen

$$\xi_x, \phi_x = 0 \quad \text{auf den Rändern } x = \text{const.}$$

$$\xi_y, \phi_y = 0 \quad \text{auf dem unteren Rand } y = \text{const.}$$

$$\xi = 1, \phi = v_1 / \xi_y, \phi_y = 0 / \xi = 0, \phi = v_2 / \xi_y, \phi_y = 0$$

$$\xi = 1, \phi = v_3$$

auf dem fünfgeteilten oberen Rand $y = \text{const.}$

Es wird eingehend über praktische Ergebnisse beim Rechnen mit expliziten und impliziten Differenzenverfahren berichtet.

H.R.SCHWARZ: Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung

Die Auflösung der Normalgleichungen mit Hilfe der Methode der konjugierten Gradienten wurde bereits von Stiefel und Lächli behandelt. Die Methode wurde aber anscheinend kaum praktisch angewendet. Die Matrizen der Fehlergleichungen in der Geodäsie sind in der Regel sehr schwach besetzt. Im Fall von großen Systemen mit sehr vielen Unbekannten wird die Methode der konjugierten Gradienten den üblichen Verfahren in verschiedener Hinsicht überlegen (Elimination der Normalgleichungsmatrix, Ausnützung der Monotonie des Quadrates des Fehlervektors, Speicherbedarf, Rechenzeit).

Analoge Aussagen gelten im Fall der bedingten Ausgleichung, wo neben der Normalgleichungsmatrix auch noch der Korrelatenvektor eliminiert werden kann.

Bemerkungen zur Berechnung der Inversen der Normalgleichungsmatrix.

E.SCHAEFER: Ein Konstruktionsverfahren zur Bestimmung einer besten Approximation aus einem endlichdimensionalen Teilraum

Es wird eine Modifikation des Töpferschen Verfahrens beschrieben, das seinerseits das klassische Austauschverfahren von Remez und Stiefel auf den Fall überträgt, daß die Haarsche Bedingung nicht erfüllt ist. Im Anschluß an die geometrische Interpretation des Algorithmus wird seine Konvergenz gezeigt.

H.ZWEERUS: A numerical treatment of non-linear integral equations

Let the equation be $f(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt + g(x)$.

The integral operator is discretised with the trapezoid rule. So the discretisation error has, under smoothness conditions, an asymptotic expansion in the step width. A theorem by Stetter guarantees, under reasonable assumptions, the existence of an asymptotic expansion of the approx. error.

So one can apply Richardson's method. Unfortunately one gets an accurate solution only on the initial points of the quadrature-rule. One really wants a good approximation on the whole range. This can be done with Nystrom's interpolation formula. It is proved that an asymptotic expansion exists in this case for the approximation error in any point $x \in [a, b]$.

When we are able to complete the solution accurately in any point, it is possible to construct, in a well-known manner, a Chebychev-Fourier series with a discrete inner product. One can check whether the approximation is good

enough. If not, one doubles the number of points used in the inner product. It is important to note, that results of all previous computations can be used and little extra work is involved. Especially so when one remembers the Clenshaw-Curtiss trick. In this manner a method is obtained that is "automatic" in the sense, that it can be programmed so as to be able to find out by itself whether a prescribed accuracy has been reached.

D.BRAESS: Eine Möglichkeit zur Konvergenzbeschleunigung für bestimmte Iterationsverfahren

Es werden Iterationsverfahren betrachtet, bei denen mit jedem Schritt ein vereinfachtes linearisiertes Problem gelöst wird. Wenn die Probleme in einem bestimmten Sinne teilweise linear sind, wird eine Modifikation vorgeschlagen. Bei jedem Iterationsschritt sollen die linear eingehenden Parameter aus einem Prozeß bestimmt werden, bei dem nur diese berücksichtigt werden. Für die Bestimmung der besten Exponentialapproximation hat sich dies Vorgehen als sehr effektiv erwiesen.

W.BRECKNER: Konvexe Optimierungsaufgaben: Qualitätstheorie

Es sei F ein reeller halbgeordneter topologischer Vektorraum, X ein reeller oder komplexer Vektorraum, Y ein reeller topologischer Vektorraum und $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ nichtleere konvexe Teilmengen. Weiterhin seien die Abbildungen $\psi: U \rightarrow F$, $\pi: U \rightarrow Y$, $\varphi: V \rightarrow F$ gegeben. Ein Element $x \in U$ heißt zulässig, wenn $\pi(x) \in V$ ist. Bezeichnet Z die Menge der zulässigen Elemente, dann heißt ein $z_0 \in Z$ Minimalelement, wenn

$\psi(z) - \psi(\pi(z)) \geq \psi(z_0) - \psi(\pi(z_0))$ für alle $z \in Z$ gilt. Die primäre Optimierungsaufgabe lautet dann:

Ist die Menge Z nicht leer, so bestimme die Minimalelemente. Hierzu wird eine duale Optimierungsaufgabe erklärt. Für beide Aufgaben werden unter zusätzlichen Voraussetzungen Dualitätssätze aufgestellt. Durch Spezialisierung erhält man Dualitätssätze für die konvexe Programmierungsaufgabe in halbgeordneten topologischen Vektorräumen, eine Verallgemeinerung der Fenchel'schen Theorie, Sätze zur Charakterisierung von Minimallösungen durch Subgradienten und eine Verallgemeinerung des Satzes von Mazur-Orlicz.

(Anschrift: Universitatea "Babes-Bolyai", Facultatea de Matematică-Mecanică, Cluj, Str. Kogalniceanu 1)

H.AMMAN: Ein Iterationsverfahren für die Hammerstein'sche Integralgleichung

Zur numerischen Behandlung der nicht linearen Integralgleichung vom Hammerstein'schen Typ

$$u(x) + \int_a^b k(x,y) f(y,u(y)) dy = 0 \quad a \leq x \leq b$$

kann man das Integral mittels einer Quadraturformel diskretisieren. Auf diese Weise erhält man ein nicht-lineares Gleichungssystem der Gestalt

$$(*) \quad u + KF(u) = 0$$

Hierfür wird der folgende Satz bewiesen:

Satz: Der Operator $K: E_n \rightarrow E_n$ sei linear und streng monoton. $F: E_n \rightarrow E_n$ sei monoton und lipschitzstetig differenzierbar. Dann existiert eine Folge $\{\tau_n\}$ mit $\tau_n = 1$ für $n \geq n_0$, derart, daß das modifizierte Newton-Verfahren

$$u_0 \in E_n \quad \text{beliebig}$$

$$u_{n+1} = u_n - \tau_n (I + KF'(u_n))^{-1} (u_n + KF(u_n)), \quad n = 0, 1$$

quadratisch gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (*) konvergiert.

A. PASQUALI: Über gewisse Iterationsverfahren höherer Ordnung

Zusammenfassung: Gegeben sei die Gleichung $f(x) = 0$, wobei f eine reellwertige, differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen ist. Um die Lösung dieser Gleichung zu bestimmen, kann man die folgende Klasse von Iterationsverfahren benutzen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f' \cdot 2(x_n)} f' \left(x_n + \frac{p}{\sqrt{2}} b_p(x_n) f'(x_n) \right) f(x_n).$$

Mit einer günstigen Wahl der Funktionen $b_p(x)$ können Iterationsverfahren höherer Ordnung erhalten werden. Zum Beispiel erhält man mit $p = 0$, daß $b_0(x) = \frac{1}{2f'(x)}$ ist und das Verfahren $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f' \cdot 2(x_n)} f'(x_n + \frac{1}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}) f(x_n)$ von

dritter Ordnung ist. Dieses Verfahren kann auf Operatorgleichungen in Banach-Räumen übertragen werden. Es lautet dann: $x_{n+1} = x_n - F'^{-1}(x_n) F' \left(x_n + \frac{1}{2} F'^{-1}(x_n) F(x_n) \right) F'^{-1}(x_n) F(x_n)$, wobei F eine Abbildung von X in Y (X, Y Banach-Räume) ist. Ein hinreichendes Konvergenzkriterium wird gegeben und eine Fehlerabschätzung wird erhalten. Es wird auch bemerkt, daß dieses Verfahren analog zu dem parabolischen Tangenten-Verfahren ist. Dieses Verfahren kann auf gewisse Randwertaufgaben angewandt werden; damit erhält man ein Paar linearer Randwertaufgaben, die die für die Praxis wichtige Eigenschaft aufweisen, daß sie denselben homogenen Teil besitzen.

J.WERNER: M-Matrizen und periodische Randwertaufgaben
monotoner Art

Es wird ein Problem untersucht, welches im Zusammenhang mit der folgenden allgemeinen Aufgabe entstand:

Gegeben sei ein Differentialgleichungssystem $x' = f(x, t)$, gesucht ist eine Lösung, welche den periodischen Randbedingungen $R_\omega x = x(0) - x(\omega) = \theta$ genügt. Nach Addition eines linearen Terms Qx zur Differentialgleichung und Umwandlung in eine Integralgleichung ist diese Aufgabe äquivalent mit der Fixpunktaufgabe

$$x(t) = Tx(t) = \int_0^\omega G_Q(t, s) [f(x(s), s) + Qx(s)] ds.$$

Es soll die Monotonie von T untersucht werden. Hierzu wird zunächst gefragt, unter welchen Bedingungen $G_Q(t, s) \geq 0$ für $(t, s) \in [0, \omega] \times [0, \omega]$. Dies ist äquivalent damit, daß

(L_Q, R_ω) von monotoner Art ist, wobei $L_Q x = \dot{x} + Qx$.

Es wird bewiesen, daß (L_Q, R_ω) für alle $\omega > 0$ genau dann von monotoner Art ist, wenn Q eine M-Matrix ist. Anschließend

werden andere Halbordnungen eingeführt und ein entsprechender Satz für diese Halbordnungen bewiesen. Dieses Ergebnis wird dazu benutzt, um einen Einschließungssatz für eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung $x'' + f(x)x' + x = e(t)$ herzuleiten, welche periodischen Randbedingungen genügt. Eine iterative Verbesserung der Einschließung ist möglich.

H.WACKER: Eine Einbettungsmethode zur Lösung nichtlinearer Randwertaufgaben

Problem:

$$(1.1) \quad y' - F(x, y(x), \int_0^1 g(x, y(t), t) dt) = 0 \quad \text{oder } Ty = 0$$

$$(1.2) \quad y(0) - R(y(0), y(1)) = 0$$

$$y(x) \in C_n^1 [0, 1], \quad y(0) \in \mathbb{R}^n$$

Das Problem wird in eine Familie $T(s, y)$ von Problemen eingebettet, mit s als reellem Parameter. Ausgehend von $T(0, y) = 0$ lösen wir eine Folge benachbarter Probleme, wobei als Näherung die Lösung des jeweils vorhergehenden Problems benutzt werden kann. Das letzte Problem liefert die Lösung der ursprünglichen Aufgabe.

Unter gewissen Voraussetzungen über Stetigkeit und Lipschitz-eigenschaften von F und R läßt sich zeigen:

(I) Die Lösung von $T(s, y) = 0$ ist stetig in s gleichmäßig in s, x .

(II) für alle s existiert die Fréchet-Ableitung

$$T'(s, y) \circ (\Delta s, \Delta y) = T_{(s, y)}^{(y)} \Delta y + T_{(s, y)}^{(s)} \Delta s$$

sowie deren Inverse bezüglich y : $T_{(s, y)}^{(y)-1}$

(III) Sowohl Newtonverfahren als auch Residuenmethode konvergieren im ganzen Intervall von Stufe zu Stufe.

(IV) Es sind nur endlich viele Stufen nötig.

Sonderfälle: Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme bei Integro-differentialgleichungen.

Die numerische Berechnung erfolgt durch das Newtonverfahren oder durch eine Residuenmethode (das Residuum der Randbedingungen wird schrittweise verkleinert, die Gleichung (1.1) jeweils exakt gelöst).

Erweiterung des Anwendungsbereiches: Transformation im Konvergenzgebiet.

J. REINERMANN: Einige neuere Resultate zur existentiellen und konstruktiven Fixpunkttheorie nichtdehnender Abbildungen

Ist (X, ξ) ein nichtleerer metrischer Raum und $f: X \rightarrow X$, so heißt f "nichtdehnend" (n.d.), wenn $\xi(f(x), f(y)) \leq \xi(x, y)$ für $x, y \in X$ stattfindet. Gefragt wird nach Existenz und iterativer Berechnung von Fixpunkten n.d. Abbildungen. Verschiedene Varianten des klassischen BANACHschen Satzes sind für n.d. Abbildungen und bel. (X, ξ) möglich. Da sich "nichtdehnend" auch uniform formulieren läßt, geben manche Erfahrungen, die man im Umgang mit Fixpunktsätzen für n.d. Abbildungen in metrischen Räumen gewinnt, Anlaß zu Fixpunktsätzen in uniformen Räumen. Ist X eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge eines gleichmäßig-konvexen (B)-Raumes E , und $f: X \rightarrow X$ n.d., so hat f Fixpunkte [BROWDER 1965]. Wir diskutieren Sätze vom BROWDER-Typ unter allgemeineren Voraussetzungen über E (strikt-konvex, bel.) sowie für spezielle n.d. Abbildungen (Affinitäten, Isometrie, strenge Kontraktionen) und geben einige Iterationsverfahren an (TOEPLITZ-Verfahren, Limitierungen von PICARD-Folgen), welche gegen Fixpunkte n.d. Abbildungen (stark oder schwach) konvergieren.

W. NIETHAMMER: Konvergenzbeschleunigung bei einstufigen
Iterationsverfahren

Geläufige iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme (z.B. Gesamt- und Einzelschrittverfahren, "Successive-Over-Relaxation") lassen sich so beschreiben, daß für den Änderungsvektor $H_m = x_m - x_{m-1}$ gilt: $H_m = T H_{m-1}$ mit dem Iterationsoperator T . Konvergenz liegt genau dann vor, wenn alle Eigenwerte von T im Einheitskreis liegen. Wir betrachten den Mittelungsansatz (*) $K_1 = H_1$, $K_m = s_0 T K_{m-1} + s_1 K_{m-1} + \dots + s_k K_{m-k}$ mit $s_0 + s_1 + \dots + s_k = 1$. Man zeigt: Dieser Ansatz läßt sich gewinnen als rekursive Berechnung der Glieder einer Reihe

$\sum_{j=1}^{\infty} v_j(T) K_1 =: \sum_{j=1}^{\infty} k_j$, die aus $\sum_{j=1}^{\infty} T^j K_1$ durch Anwendung eines Summierungsverfahrens S entsteht; S ist dabei das durch

$$q(\varphi) = \frac{1}{s_0} \left(\varphi - s_1 - \frac{s_2}{\varphi} - \dots - \frac{s_k}{\varphi^{k-1}} \right)$$

vermittelte allgemeine Euler-Verfahren. Benutzt man diesen Zusammenhang, so erhält man Aussagen über den "Konvergenzbereich" von (*). Beispiele für $k = 1$ und $k = 2$ zeigen, daß man auf diese Weise zum einen Konvergenz in Fällen erzielen kann, in denen die Eigenwerte weit außerhalb des Einheitskreises liegen, zum anderen die Konvergenz vieler einstufiger Verfahren beschleunigen kann.

E. GEKELER: Relaxation bei einer Klasse nichtlinearer
Gleichungssysteme

Bei der numerischen Behandlung der Integralgleichung von Hammerstein entsteht ein Gleichungssystem der Form $X + K F(X) = 0$, in dem die Matrix K vom Kern der Integralgleichung herrührt und F eine vektorwertige Funktion ist, deren k -te Komponente nur von der k -ten Komponente von X abhängt. Dieses Gleichungssystem gestattet in sinnvoller Weise die Anwendung von Relaxation sowohl bei der direkten Iteration als auch beim Newtonverfahren. Am Beispiel der Theodorsen-Integralgleichung werden einige spezielle Aussagen über den Relaxationsfaktor erläutert, die auch für den linearen Fall interessant sind.

- 10 -

B.DÖRING: Über gewisse Klassen von Iterationsverfahren
höherer Ordnung in Banach-Räumen

Ehrmann hat 1958 eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man Iterationsverfahren höherer Ordnung unter Verwendung von höheren Ableitungen in sehr übersichtlicher Weise konstruieren kann. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich diese Ableitungen leicht bilden lassen, was z.B. bei vielen in der Praxis auftretenden nichtlinearen Integralgleichungen vom Hammerstein-Typ der Fall ist. Das Ehrmann'sche Konstruktionsprinzip wird hier verallgemeinert und einem einfachen Prinzip zur Konstruktion von verschiedenen Klassen von in gleicher Weise übersichtlichen Iterationsverfahren höherer Ordnung untergeordnet. Hieraus lassen sich eine Reihe von bisher isoliert voneinander betrachteten Verfahren bzw. Klassen von Verfahren ableiten. Das erwähnte Prinzip besteht in der auf verschiedene Weise realisierten Linearisierung der abgebrochenen Taylorreihe der gegebenen Funktion an der Stelle x_n hinsichtlich der durch Nullsetzen definierten Korrektur. Diese Verfahren gelten formal auch in Banach-Räumen. Es wird ein Satz mit Beweisskizze angegeben, wonach unter ein und denselben schwachen und praktisch leicht nachprüfbaren Bedingungen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung einer Operatorgleichung, die Konvergenz, die (pos.-ganzz.) "schwache Ordnung" dieser Konvergenz sowie Fehlerschranken für die wichtigsten Klassen der konstruierten Verfahren gesichert sind. Daß die Fehlerschranken - besonders in Funktionen-Räumen - wesentlich schärfer sind als die bisher in der Literatur bekannten, wird an einer gewöhnlichen, einer unter- sowie überlinearen Hammerstein'schen Integralgleichung und einem Matrix-Eigenwert-Problem illustriert.

K.H.MÜLLER: Zum schwachen Zeilensummenkriterium bei nichtlinearen Gleichungssystemen

Bekanntlich konvergieren Gesamt- und Einzelschrittverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wenn die Matrix A das "schwache Zeilensummenkriterium" erfüllt und "nicht zerfällt". Diese Begriffe werden auf nichtlineare Gleichungssysteme verallgemeinert und die entsprechenden Konvergenzaussagen hergeleitet. Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich wieder für lineare Gleichungssysteme und die durch Approximation von Randwertaufgaben zweiter Ordnung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen entstehenden Differenzgleichungen.

I.KUPKA: Abschätzungen bei Matrizeigenwertaufgaben

Im Anschluß an die Bestimmung von Eigenvektoren zu reellen Matrizeigenwertaufgaben

$$(1) \quad Ax = \lambda Bx ,$$

wobei $Bx = 0$ auch als Lösung zählen möge, ist insbesondere nach vielen iterativen Verfahren eine verfahrensunabhängige Abschätzung vonnöten. Neben der Abschätzung in Bezug auf eine exakte Lösung (Vorwärtsabschätzung) interessiert häufig die Zugehörigkeit zum Lösungsbereich der "ungenauen Aufgabe"

$$(2) \quad \begin{aligned} (A + dA)x &= \lambda(B + dB)x , \\ \|dA\| &\leq \alpha , \quad \|dB\| \leq \beta , \quad dA, dB \text{ sonst beliebig,} \end{aligned}$$

wobei $\|\dots\|$ die Spektralnorm oder euklidische Norm für Matrizen bedeute (Rückwärtsabschätzung). Ausgehend von der Identität

$$Ax = \lambda Bx \quad \text{oder} \quad Bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax \otimes Bx - Bx \otimes Ax = 0$$

mit \otimes als Tensorprodukt, hier speziell dyadisches Produkt, bekommt man die genannten Abschätzungen nebst einem Verfahren zur iterativen Verbesserung. Zur Rückwärtsabschätzung sind nur Skalarprodukte zu berechnen, während zur Vorwärtsabschätzung eine Matrizeninversion nötig ist.

J. Kupka (Hamburg)