MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 39 / 1969

Anwendung der Modelltheorie in Algebra und Zahlentheorie

30.11. bis 4.12.1969

Die Tagung, die in erster Linie von Dr. Michler (Tübingen) geplant worden war, setzte eine ähnliche Braunschweiger Veranstaltung vom April dieses Jahres fort und hatte das Ziel, einen möglichst vollständigen Überblick über den Begriff und die Anwendungsmöglichkeiten der Ultraprodukte zu vermitteln. Die meisten Vorträge hatten deshalb auch nicht eigene Arbeiten der Referenten zum Gegenstand, sondern beschäftigten sich mit Ergebnissen aus der neueren Literatur. Durch die Anwesenheit der Herren Thiele und Felscher (nur am ersten Tag) war es möglich, die Bedeutung der Ultraprodukte in der Modelltheorie ausführlicher zu diskutieren. Die folgenden Vorträge behandelten Arbeiten aus Zahlentheorie, Algebra und topologischer Algebra, in denen Ultraprodukte eine Rolle spielen, sei es als zentrales Beweismittel wie im Satz von Ax und Kochen oder auch nur am Rande zur Konstruktion geeigneter Beispiele.

Die folgenden Vortragsauszüge sind entsprechend der zugrunde liegenden Literatur zusammengefaßt.

Teilnehmer

Bergmann (Düsseldorf)
Felscher (Freiburg und Halifax)
Grölz (Braunschweig)
Heine (Hannover)
Janssen (Braunschweig)
Kerner (Düsseldorf)
Lenzing (Bielefeld)
Mathiak (Braunschweig)
Michler (Tübingen)
Plaumann (Tübingen)
Ringel (Tübingen)
Schwarz (Saarbrücken)
Thiele (Hannover)
Wille (Bonn)
Windelberg (Hannover)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

W. Felscher: Ein algebraischer Beweis des Satzes von der Charakterisierung axiomatischer Klassen

Eine mittels der neu definierten Begriffe "Prästruktur" und "Struktur" gewonnene Verallgemeinerung des Satzes von Birkhoff über gleichungsdefinierte Klassen führt zu einem neuen Beweis des Satzes:

Die Klasse K von Strukturen ist axiomatisch gdw
K ist abgeschlossen gegenüber Isomorphismen, Ultraprodukten und elementaren Submodellen.

E.-J. Thiele

E.-J. Thiele: Algebraische Charakterisierung der elementaren Äquivalenz nach Kochen:
nach Kochen: Ultraproducts in the theory of models (Annals of Math. 74(1961), 221-261)

Im Anschluß an die Arbeit von Kochen wird über die Definition von Ultralimiten von Relationenstrukturen berichtet. Die beiden Einbettungslemmata

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist elementar einbettbar in eine Ultrapotenz von $\mathfrak{B}$,
und
$\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ist elementare Einbettung gdw es gibt eine Ultrapotenz $\mathfrak{A}^I/\mathcal{D}$ und eine elementare Einbettung $\phi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}^I/\mathcal{D}$, so daß $\phi \circ \psi$ die kanonische Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}^I/\mathcal{D}$ ist,

werden bewiesen. Daraus wird der Hauptsatz von Kochen hergeleitet

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gdw es gibt isomorphe Ultralimiten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Janssen, Lenzing, Plaumann: Diophantine problem over local fields
nach J. Ax und S. Kochen, Annals of Math. 83(1966), p 437-56.

Definitionen 1) Eine Z-Gruppe ist eine geordnete abelsche Gruppe mit einem kleinsten positiven Element, in der $|G: nG| = n$ für alle natürlichen Zahlen n gilt.

2) Ein bewerteter Körper V heißt Hensel-Körper, wenn er folgenden beiden Bedingungen genügt:

a) In V gilt das Henselsche Lemma.
b) Die Wertegruppe von V ist eine Z-Gruppe.

Hauptsatz: Zwei Henselkörper mit Restklassenkörpern der Charakteristik 0 sind elementar äquivalent, wenn ihre Restklassenkörper elementar äquivalent sind. Mit Hilfe des Hauptsatzes werden Fragen der elementaren Äquivalenz und der Entscheidbarkeit von Potenzreihenkörpern und -ringen untersucht. Ferner ergibt sich durch Anwendung des Hauptsatzes ein neuer Beweis, daß die p-adischen Zahlkörper für fast alle Primzahlen p die diophantische Dimension 2 haben.

Plaumann

Windelberg, Wille: BEZOUTRINGE UND IHRE UNTERRINGE nach P.M. Cohn, Proc. Camb. Phil. Soc. 64(1968), 251-264.

Es wurde über eine Arbeit von P.M. Cohn berichtet. Dabei konnte zunächst die Stellung der Bezoutringe (Integritätsbereiche, in denen die Summe zweier Hauptideale wieder ein Hauptideal ist) als verallgemeinerte Hauptidealringe unter den ggT-Ringen, den Schreier-, Prüfer-, Bewertungs-, lokalen Ringen und Ringen mit eindeutiger Faktorzerlegung diskutiert werden.

Dann konnte gezeigt werden, daß sich jeder ggT-Ring R "gut" in einen Bezoutring B(R) einbetten läßt, wobei ein Ring R gut in einen Ring S eingebettet heißt, wenn R und S dieselbe "1" besitzen und wenn ein Element aus R in R dieselbe Faktorzerlegung besitzt wie in S.

Auf der Suche nach echten Bezoutringen kann der folgende Satz helfen:
"B(R) ist ein Hauptidealring $\Leftrightarrow$ R ist ein Ring mit eindeutiger Faktorzerlegung".

Der Bezug zu den Ultraprodukten wird dadurch hergestellt, daß sich Bezoutringe durch Aussagen in der Prädikatenlogik der ersten Stufe definieren lassen:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

"$\forall x_1, x_2 \exists y_1, y_2 \forall z_1, z_2 \exists z_3 (x_1 z_1 + x_2 z_2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2) \cdot z_3)$"

und daß daher das Ultraprodukt von Bezoutringen wieder ein Bezoutring ist.

Windelberg

Schwarz: Ultraprodukte von Ringen
nach G. Santusnossu, Rendiconti di Mathematica, Roma, (VI), 1 (1968), 82-99.

Es werden Ringeigenschaften und Beziehungen diskutiert, die in gewisser Weise mit der Bildung von Ultraprodukten verträglich sind. So übertragen sich Bildung und Existenz von Quotientenringen bezüglich eines multiplikativen Systems auf Ultraprodukte, relative ganz - abgeschlossen bezüglich Oberringen (jedoch nicht vollständig ganz - abgeschlossen) bleibt erhalten, und das Jacobsenradikal eines Ultraprodukts ist das Ultraprodukt der Radikale. Ultraprodukte von Prüferbereichen und Bezoutringe sind wieder solche Strukturen.

Grölz

Kerner, Mathiak, Ringel, Grölz: Prime Ringe mit Polynomidentitäten
nach S.A. Amitsur, Proc. London Math. Soc. (3), 17 (1967), 470-486.

Satz: Ein primer Ring R, der eine Polynomidentität von minimalem Grad d erfüllt, besitzt einen zentral einfachen Links- und Rechtsquotientenring Q der Dimension n^2 über seinem Zentrum C mit $d = 2n$, $Q = R\,C$, und Q erfüllt dieselben Identitäten wie R.

Da $R[t]$ ein primer halbeinfacher P.I.-Ring ist, der einer Minimalidentität vom Grade d genügt, kann man beim Beweis halbeinfaches R voraussetzen. Dann ist R subdirekte Summe von primitiven Ringen R_α, die einer Minimalidentität vom Grade $d_\alpha \leq d$ genügen, also zentraleinfache Algebren vom Grade n_α^2 über ihrem Zentrum mit $n_\alpha \leq 2d$ sind. Man findet einen Ultrafilter $\mathfrak{U}$ so, daß $R \to \Pi R_\alpha \to \Pi R_{\alpha/\mathfrak{U}} =: Q$ injektiv ist. Als Ultraprodukt zentraleinfacher Algebren beschränkten Ranges ist Q zentraleinfach vom Range n^2 über seinem Zentrum mit $n = \max n_\alpha = \frac{d}{2}$. Mit Hilfe einiger Sätze über Standardidentitäten in zentraleinfachen Algebren folgt, daß Q Quotientenring von R ist sowie die übrigen Behauptungen.

Grölz

Heine: Nichtstandard-Analysis in der topologischen Algebra nach A. Stone, aus: "Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, Probability", Editor: W.A.J. Luxemburg, 1969.

Es wird der Begriff einer adäquaten Ultrapotenz zu einer Menge K erklärt. Dann kann man mit Hilfe von Bewertungsringen, die in einer adäquaten Ultrapotenz des Körpers K konstruiert werden, Sätze über V - Topologien von K beweisen.

Ist $*^I_\Delta G$ eine adäquate Ultrapotenz der Gruppe G, so läßt sich eine eineindeutige Korrespondenz zwischen der Menge aller Hausdorffschen Gruppentopologien auf G und der Menge aller Untergruppen U von $*^I_\Delta G$, die normal in der von U und G (G eingebettet in $*^I_\Delta G$) erzeugten Untergruppe von $*^I_\Delta G$ und abgeschlossen in der quasidiskreten Topologie von $*^I_\Delta G$ sind, herstellen. Einen analogen Satz kann man für jede Gleichheitsklasse von Algebren beweisen, falls die Operationen der Algebren überall erklärt sind und eine zweistellige Operation existiert, mit der die Grundmenge der betreffenden Algebra zur Gruppe wird.

Schließlich werden topologische Eigenschaften von Ringtopologien eines Körpers L durch algebraische Eigenschaften von Ringhomomorphismen aus einer zu L adäquaten Ultrapotenz von L in L charakterisiert.

R. Wille: Die primitiven Klassen arithmetischer Ringe

Es wurde im Rahmen einer Diskussion gleichungsdefinierter Klassen von Ringen folgender Satz berichtet:

<u>Satz:</u> Für eine gleichungsdefinierte Klasse $\mathcal{R}$ von Ringen sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Jeder Ring aus $\mathcal{R}$ ist arithmetisch.

(2) In jedem Ring aus $\mathcal{R}$ liegt jedes endlich erzeugte Ideal in einem Hauptideal.

(3) In jedem Ring aus $\mathcal{R}$ ist die Summe zweier Hauptideale stets wieder ein Hauptideal.

(4) Jeder Ring aus $\mathcal{R}$ ist halbeinfach.

(5) Jeder Ring aus $\mathcal{R}$ hat die Null als einzigstes nilpotentes Element.

(6) $\mathcal{R}$ wird von einer endlichen Menge endlicher Körper erzeugt.

(7) Es gibt eine endliche Menge P von Primzahlen und zu jeder Primzahl $p \in P$ eine endliche Menge $N(p)$ von natürlichen Zahlen, so daß $\mathcal{R}$ die Klasse aller der Ringe ist, in denen folgende Gleichungen gelten:

$$\sum_{p\in P} \Big(\prod_{q\in P\setminus\{p\}} q\Big)^{p^{n(p)}-1} \cdot x^{p^{n(p)}} = x \quad \text{mit} \quad n(p) := \prod_{n\in N(p)} n \;)$$

$$x \cdot \prod_{p\in P} \prod_{n\in N(p)} (x^{p^n} - x) = 0 \,.$$

(Literatur: G. Michler, R. Wille: Die primitiven Klassen arithmetischer Ringe (Math. Zeitschr.) + H. Werner, R. Wille: Charakterisierungen der primitiven Klassen arithmetischer Ringe (Math. Zeitschr.)).

Rudolf Wille

Berichterstatter: Wolfgang Grölz, Braunschweig.