MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 22/1970

Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen

28.6. bis 4.7.1970

Die diesjährige Tagung "Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen" stand unter der Leitung von D. Derry (Vancouver, Kanada), G. Ewald (Bochum), O. Haupt (Erlangen) und P. Scherk (Toronto, Kanada).
Auch in diesem Jahr hat sich die Zusammenlegung der Tagung über die Theorie der konvexen Körper einerseits und der Tagung über die Theorie der geometrischen Ordnungen andererseits wieder bestens bewährt. Insbesondere drückte sich dieses in mehreren Vorträgen aus, die eine Beziehung zwischen beiden Gebieten herstellten. Es wäre zu begrüßen, wenn auch im nächsten Jahr beide Tagungen gleichzeitig stattfinden könnten.

Teilnehmer

Aumann, G.	München
Derry, D.	Vancouver/Kanada
Ewald, G.	Bochum
Fenchel, W.	Söborg/Dänemark
Firey, Wm. J.	E. Lansing/USA
Grassmann, E.	Zürich/Schweiz
Haupt, O.	Erlangen
Heil, E.	Darmstadt
Kind, B.	Bochum
Klein, F.	Bochum
Kömhoff, M.	Bad Homburg
Künneth, H.	Erlangen
Lane, N.D.	Hamilton /Kanada
Mandrella, R.	Frankfurt
Park, R.	Calgary/Kanada

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Reay, J.R.	Bellingham/USA
Roman, T.	Bukarest/Rumänien
Scherk, P.	Toronto/Kanada
Schneider, R.	Frankfurt
Schneider, H.	Madison/USA
Stoka, M.	Bukarest/Rumänien
Strambach, K.	Tübingen
Turgeon, J.	Montreal/Kanada
Valette, G.	Brüssel/Belgien
Voss, K.	Esslingen/Schweiz
Weil, W.	Frankfurt
Wills, J.M.	Berlin
Zamfirescu, T.	Bukarest/Rumänien
Barner, M.	Freiburg

Vortragsauszüge

D. DERRY: Konvexe Hülle von den Polygonen der Ordnung n in einem affinen Raum.

Es sei π_n: $A_1 \dots A_r$ ein Polygon der Ordnung n in einem reellen projektiven Raum L_n, und H_{n-1} eine Hyperebene, für welche $A_i \notin H_{n-1}$, $1 \leq i \leq r$. Ist $A_iA_{i+1} \cap H_{n-1} = \emptyset \, (\neq \emptyset)$ so heißt die Seite A_iA_{i+1} endlich (unendlich). Es bedeute $H(\pi_n)$ die konvexe Hülle der Eckpunkte von π_n innerhalb des affinen Raumes $L_n \setminus H_{n-1}$. Ein Bogen $A_iA_{i+1} \dots A_{i+h}$ von π_n heißt ein maximaler Bogen der Länge h, wenn jede seiner Seiten unendlich ist, aber $A_{i-1}A_i$ und $A_{i+h}A_{i+h+1}$ beide endlich sind. Man nennt zwei Poygone äquivalent, wenn es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Eckpunkten von π_n und σ_n gibt mit der Eigenschaft, daß $H(\pi_n)$ $[A_{i_1}, \dots, A_{i_1}]$ dann und nur dann stützt, wenn $H(\sigma_n)$ $[f(A_{i_1}), \dots f(A_{i_n})]$ stützt. $\mathfrak{z}(\pi_n)$ ist der Zyklus, den man erhält, wenn man jeder Seite A_iA_{i+1} die Zahl

0 oder 1 zuordnet, jenachdem ob sie endlich oder unendlich ist. Haben zwei Polygone weniger als n unendliche Seiten, so hat man den Satz: $\pi_n \sim \sigma_n \rightleftarrows \mathfrak{z}(\pi_n) = \mathfrak{z}(\sigma_n)$. Haben zwei Polygone beide n unendliche Seiten, dann ist $\sigma_n \sim \pi_n$ dann und nur dann, wenn σ_n, π_n beide dieselbe Anzahl von maximalen Bögen der Länge l, $0 < l \leq n$, haben.

W.J. FIREY: Local behaviour of area functions of convex bodies.

Area functions $S_p(K;\omega)$, $0 \leq p \leq n-1$ of a convex body K in Euclidean n-space were introduced by W. Fenchel and B. Jessen as well as A. D. Aleksandrov in 1938 as measures over Borel sets ω on the unit sphere Ω which generalize elementary symmetric functions of the principal radii of the boundary of K. Thus $S_{n-1}(K;\omega)$, as the generalization of reciprocal Gauss curvature, is the area of that part of the boundary of K whose spherical image is ω. Aleksandrov noted that, if $p < n-1$, then $S_p(K;\omega) = 0$ whenever ω has only a finite number of points. As a refinement of that observation: $S_p(K;\omega_\alpha) \leq A D^p \sin^{n-p-1}\alpha \sec\alpha$, where ω_α is a disc of geodesic radius $\alpha < \pi/2$, D is the diameter of K and A depends only on p and n. This gives a new necessary condition for a measure over Borel sets ω to be, for preassigned $p < n-1$; an area function $S_p(K;\omega)$ for some K.

B.KIND: Höhere Ableitungen von Distanz- und Stützfunktion eines konvexen Körpers.

Sei K eine kompakte, konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$ mit $0 \in \operatorname{int} K$. Mit $F: \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ werde die Distanzfunktion, mit $H: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) - \{0\} \to \mathbb{R}$ die Stützfunktion von K bezeichnet. Es gilt:

Satz 1: Ist F k-mal stetig differenzierbar, $k \geq 2$, und die Gaußsche Krümmung von bd K überall ungleich 0, dann ist H k-mal stetig differenzierbar.

Satz 2: Ist F k-mal stetig differenzierbar, $k \geq 2$, und H 2-mal differenzierbar, dann ist die Gaußsche Krümmung von bd K überall ungleich 0.

Die Beweise sind völlig koordinatenfrei.
Satz 1 und Satz 2 sind mit ihren Beweisen lokaler Natur. Die Bedingung, daß $K=\{u \in \mathbb{R}^n: F(u) \leq 1\} \cup \{0\}$ konvex ist, ist unwesentlich.

E. Grassmann: Charakterisierung von Projectivitäten durch ordnungsgeometrische Eigenschaften.

Folgender Satz wird bewiesen:
Vor: Es seien D und E Gebiete der projectiven Ebene und $f: D \to E$ ein Homöomorphismus, der Bogen der festen Ordnung k in Bogen der Ordnung $\leq 2k-1$ überführt.

Beh: f ist die Restriction einer Projectivität.

G. EWALD: Über Geradensegmente auf dem Rand konvexer Körper

Vor einigen Jahren hat V. Klee die Frage aufgeworfen, ob es auf dem Rande eines konvexen Körpers in jeder Richtung ein Geradensegment geben kann. Für Räume der Dimension ≥ 4 blieb die Frage bisher offen. Sie ist nunmehr in einer gemeinsamen Arbeit mit Larman und Rogers gelöst worden.

R. PARK: The rank numbers of elementary points.

We consider only arcs in real projective n-space P^n which have osculating space of every dimension at each point. Scherk introduced the characteristic of a point on such a curve: $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$. A point is elementary on such a curve if it has a right and a left neighbourhood of order n. The k-rank of an arc is the maximum number of osculating k-spaces which can meet an (n-k-1)-space. The k-rank of a point in the minimum k-rank a neighbourhood of p can possess.

Let p be an elementary point.

Theorem 1: If n=3 then 1-rank(p) = $\alpha_0+2\alpha_1+\alpha_2$

Theorem 2: $\sum_{i=0}^{n-k-1}\ \sum_{j=i}^{i+k}\alpha_j \leq$ k-rank(p)

E. HEIL: Linienfamilien ebener konvexer Bereiche.

Bei einer strecken- und eckenfreien konvexen Kurve bilden die Mittelparallelen (zwischen parallelen Tangenten) und die Schwerlinien (Mitten paralleler Sehnen) stetige Kurvenfamilien im Sinne Grünbaums. Die Menge M der Schnittpunkte ist für beide dieselbe. Der Rand von M liegt auf der Medialen (der Einhüllenden der Mittelparallelen). Die Mediale ist gleich der Einhüllenden der Schwerlinien und gleich dem Ort der Durchmessermitten. Durch jeden Punkt von M gehen mindestens 4 Normalen und 6 Affinnormalen. Vermutung: Die Mediale liegt "innerhalb" der Evolute und der Affinevolute.

H. KÜNNETH: Entartete Limiten von Ordnungscharakteristiken.

In einem System k von Ordnungscharakteristiken (OCh) mit einer Grundzahl k>3 gibt es immer k-tupel von Punkten des Grundgebietes, durch die keine OCh geht, und nicht jeder Limes eine Folge konvergierender OCh ist eine OCh. Es gilt aber: Jede maximale k-entartete Menge ist abgeschlossen und Randmenge, wenn k das Grundgebiet überdeckt. Jeder Limes einer Folge konvergierender OCh ist OCh oder k-entartete Menge, wenn das Grundgebiet die projektive oder affine Ebene ist. Für k>3 ist jede k-ordinäre Menge Randmenge.

G. VALETTE: About some normed vector spaces consisting of classes of convex bodies.

It has been proved by Radström that the spaces $\mathcal{K}_n$ of all convex bodies of R^n appears as a generating cone of a normed vector spaces $\mathcal{R}_n$; furthermore, the metric of the norm is, on the cone, equal to the Hausdorff metric. These properties may be used to construct easily a family of normed vector spaces consisting of classes of convex bodies. Some of these spaces were already considered by Ewald and Shephard, but with other norms; we prove that they are nevertheless equivalent. A fundamental problem in this study is the determination of "interesting" closed subspaces of $\mathcal{R}_n$. We prove that the subspace $\mathcal{W}_n$ generated by the bodies of constant width is not closed in $\mathcal{R}_n$, although the bodies of constant width form a closed subset of $\mathcal{K}_n$. We also characterize the closure of $\mathcal{W}_n$.

R. SCHNEIDER: Krümmungsschwerpunkte.

Jedem konvexen Körper K der Dimension $\geq r-1$ im n-dimensionalen euklidischen Raum läßt sich ein Punkt $S_r(K)$ $(r \in \{1,2,\dots,n+1\})$ zuordnen derart, daß $S_r(K)$ für $1 \leq r \leq n$ und hinreichend glatte Körper der Schwerpunkt des Randes von K ist, wenn dieser mit der (n-r)-ten elementarsymmetrischen Funktion der Hauptkrümmungen als Massendichte belegt wird. Speziell ist S_1 der Steinerpunkt, S_n der Oberflächenschwerpunkt; S_{n+1} sei der gewöhnliche Schwerpunkt. Satz 1: Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{K}^n_{r-1} \to E^n$ ($\mathcal{K}^n_i$ = Menge der mindestens i-dimensionalen Körper des E^n, $r \in \{1,\dots,n+1\}$) stimmt genau dann mit S_r überein, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat: (1) Bewegungsäquivarianz, d.h. $\varphi(TK)=T\varphi(K)$ für alle Bewegungen T des E^n, (2) gewogene Additivität mit Gewicht V_{r-1} (= Quermaßintegral W_{n+1-r}), d.h. $V_{r-1}(K\cup\bar{K})\varphi(K\cup\bar{K})+V_{r-1}(K\cap\bar{K})\varphi(K\cap\bar{K})=V_{r-1}(K)\varphi(K)+V_{r-1}(\bar{K})\varphi(\bar{K})$, falls $K,\bar{K}, K\cup\bar{K} \in \mathcal{K}^n_{r-1}$, (3) Stetigkeit. Dieser

Satz ist analog zu einer Kennzeichnung der Quermaßintegrale durch Hadwiger; er läßt sich zurückführen auf den folgenden <u>Satz 2:</u> Ist $\varphi: \mathfrak{K}_o^n \to E^n$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1') Bewegungsäquivarianz, (2') Additivität im Minkowskischen Sinn, d.h. $\varphi(K+\overline{K})=\varphi(K)+\varphi(\overline{K})$, (3') Stetigkeit, so ist $\varphi(K)$ der Steinerpunkt.

T. ROMAN: <u>Gruppen von verallgemeinerten Symmetrien.</u>

Es werden Arbeitsmethoden und Resultate gegeben für ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten wie: Rosetten, Bandornamente, Kolumnen und Ornamente, in welchen die verallgemeinerten Symmetrien als ω-Transformationen der entsprechenden Mannigfaltigkeiten in sich selbst definiert sind, also außer Isometrien treten auch ihre logarithmischen Transformierten, Inversionen in Bezug auf einen Pol, Homothetieen in Bezug auf einen Pol, Ähnlichkeiten und zusammengesetzte Transformationen der vorhergehenden auf.

K. Strambach: <u>Sphärische Kreisebenen, geometrische Ordnungen und konvexe Körper.</u>

Am Beispiel von sphärischen Kreisebenen (das sind auf der 2-Sphäre realisierbare Geometrien, indem man dort ein System γ von Jordankurven so auswählt, daß durch drei verschiedene Punkte genau eine Kurve aus γ geht) wurden Anwendungen der Theorie der geometrischen Ordnungen und der Theorie der konvexen Körper auf Grundlagen der Geometrie diskutiert.

M. STOKA: <u>Formules intégrales concernant les systèmes de figures convexes aléatoires.</u>

Soit E_3 l'espace euclidien à trois dimensions, K_o un corps convexe fixe de volume V_o et dont la frontière ∂K_o;

a l'aire S_0 et l'intégrale de la courbure moyenne $\overline{H}_0$ et $\{K_1,\ldots,K_m\}$ un systéme de m corps convexes aléatoires, indépendants mais égaux entre eux, de volume V et dont les frontières ont l'aire S et l'intégrale de la courbure moyenne $\overline{H}$. Soit $\mathcal{K}_m^r$ la figure obtenue comme intersection seulement à r des m corps convexes et v_m^r le volume du corps $K_0 \cap \mathcal{K}_m^r$. Alors, si nous notons par dK la mesure élémentaire cinématique dans l'espace E_3, nous avons

$$\int\limits_{\{K_0\cap K_1\neq\emptyset,\ldots,K_0\cap K_m\neq\emptyset\}} v_m^r \, dK_1\ldots dK_m = \binom{m}{r}(8\pi^2 V)^r\left[8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)\right]^{m-r} V_0$$

Nous avons des formules analogues pour l'aire s_m^r du $\partial(K_0 \cap \mathcal{K}_m^r)$ et pour un espace V_2 à courbure constante.

W. WEIL: Über die Projektionenkörper konvexer Polytope.

Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller konvexen, zu O symmetrischen Polytope mit inneren Punkten im E^n, $n\geq 2$. Sei P die Abbildung, die jedem $K\in\mathcal{K}$ seinen Projektionenkörper PK zuordnet. P ist eineindeutig und es gilt für $n\geq 3$ $\mathcal{K}\supsetneqq P\mathcal{K}\supsetneqq \ldots \supsetneqq P^\infty\mathcal{K} := \bigcap_{i=0}^{\infty} P^i\mathcal{K} \neq \emptyset$. Ist $K\in P\mathcal{K}$, so ist K ein Zonotop (endliche Streckensumme) mit der Stützfunktion $H_K(u) = \int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle| \mu_K(dx)$, $u\in S^{n-1}$. Dabei ist das erzeugende Maß μ_K ein diskretes Maß auf den Borelteilmengen von S^{n-1}. Der Träger von μ_K heiße invariant, wenn die Menge der Schnittpunkte von Verbindungshyperkreisen von Punkten aus dem Träger gleich dem Träger ist. Ein konvexer Körper K heiße Häufungspunkt einer Projektionenfolge, wenn es einen konvexen Körper $\tilde{K}$, eine Folge j_i und Zahlen $\alpha_{j_i} > 0$ gibt mit $\lim_{i\to\infty} \alpha_{j_i} P^{j_i}\tilde{K} = K$. Dann wird $P^\infty\mathcal{K}$ wie folgt charakterisiert:

Satz: Sei $n\geq 3$; für $K\in P\mathcal{K}$ sind äquivalent:

(a) $K\in P^\infty\mathcal{K}$

(b) $\forall s\geq 0\, \exists K(s): P^s K(s) = K$

(c) Träger von μ_K ist invariant

(d) K ist für gerades n Summe von $\frac{n}{2}$ zentralsymmetrischen Polygonen. K ist für ungerades n Summe von $\frac{n-1}{2}$ zentralsymmetrischen Polygonen und einer Strecke

(e) $P^2K=\lambda K$ für ein $\lambda>0$
(f) K ist Häufungspunkt einer Projektionenfolge.

Für n=2 gilt $P^{\infty}\mathcal{K}=\mathcal{K}$.
Zum Beweiß werden wesentlich die schon von KELLY, MOSER und COXETER benutzten projektiven Diagramme gebraucht.

J. TURGEON: <u>Fondements d'une théorie générale de la différentiabilité, de la caractéristique et de l'ordre des courbes planes.</u>

Il s'agit d'établier les fondements d'une théorie générale qui englobe, comme cas particuliers, les géométries où différentiabilité, caractéristique et ordre sont définis à l'eide de droites (en particulier dans les travaux de P. Scherk), de cercles (Scherk et Lane), de coniques (Lane et Singh) ou de graphes de polynômes (théorie encore peu explorée, inspirée de Popoviciu).

N.D. LANE: <u>Generalized Differentiability, Characteristik and Order.</u>

N.D. Lane, Peter Scherk and Jean Turgeon are laying the foundations of generalized theory of differentiability, characteristic and order, which includes, as particular cases, the projective differentiability of Scherk, the conformal differentiability of Lane and Scherk, the conical differentiability of Lane and Singh and the generalized parabolic differentiability of Popoviciu.

O. HAUPT: <u>Über einen 2n-Scheitelsatz.</u>

Es wird ein Satz über die Anzahl von k-Scheiteln auf einem Bogen bzw. einer Kurve in einem System $\mathfrak{K}$ von Ordnungscharakteristiken bewiesen. (vergl. Haupt - Künneth, Geometrische Ordnungen, Springer 1967)

J.M. WILLS: Gitterpunkte und Volumen-Oberfläche-Verhältnis konvexer Körper.

Zu einem konvexen Körper $K \subset R^n$ seien $V(K)$ sein Volumen, $F(K)$ seine Oberfläche und $G(K)$ die Anzahl der Gitterpunkte in K. Weiter sei m eine natürliche Zahl und $s(m,n)=\sup\limits_{G(k)<m}\frac{V(K)}{F(K)}$.
Für $m \geq 1$, $n \geq 1$ ist trivialerweise $s(m,n) \leq s(m+1,n)$ und $s(m,1)=\frac{1}{2}$. Weiter $s(m,n) \geq \frac{1}{2}$ und $s(m_1+m_2,n) \leq s(m_1,n)+s(m_2,n)$ und daraus $\frac{1}{2} \leq s(m,n) \leq \frac{m}{2}$.

$\frac{m}{2}$ ist wahrscheinlich nicht die beste Konstante. Dazu zwei Vermutungen: 1) $s(m,n) \geq s(m,n+1)$; 2) Zu jedem m gibt es ein n_o mit $s(m,n)=\frac{1}{2}$ für $n \geq n_o$.
Hadwiger bewies Anfang 197o: $s(1,n)=\frac{1}{2}$ für $n \geq 1$.
Beweismethoden, verwandte Ergebnisse wie:
$K \subset K' \Rightarrow \frac{V(K)}{F(K)} < n \cdot \frac{V(K')}{F(K')}$ und n ist optimal; und Vermutungen wie:
$rF \geq V+(n-1)V_i$ (r: Inkugelradius; V_i: Inkugelvolumen) werden skizziert.

P. SCHERK: Über Kurven (n+1)-ter Ordnung im R_n.

Auf einer differenzierbaren Kurve (n+1)-ter Ordnung im R_n werden ternäre Korrespondenzen definiert: Seien a_1, a_2, a_3 nichtnegative ganze Zahlen mit $a_1+a_2+a_3=n-3$. Das geordnete Tripel $\mathcal{T}=(s_1,s_2,s_3)$ habe die Eigenschaft, daß es ein "spezielles" (n-2)-flach gibt, das die Kurve in s_i genau a_i-fach trifft; i=1,2,3. Die ternäre Korrespondenz $T_{a_1a_2a_3}$ ist die Menge der Tripel $\mathcal{T}$. Die Korrespondenz $T_{n-3,oo}$ ist äquivalent zur Abbildung $t_{n-3,o}$. Im allgemeinen Falle können die s_i mit Vielfachheiten versehen werden. Die Stetigkeit und Richtung werden bestimmt, falls höchstens ein s_i mehrfach ist. Vgl. Canad. J.Math. 19(1967), 1o42-1o61.

John R. REAY: Caratheodory type theorems in Eckhoff spaces.

Various attempts have been made to place convexity in an axiomatic setting. Recently J. Eckhoff has considered the classic theorem of Radon in several different settings. Most of his work is done in what we call an Eckhoff space, i.e., in a finite product of euclidean spaces where convex sets are defined as the cartesian products of usual convex sets in each component space. The closely related theorem of Carathéodory and its various generalizations will be considered in this setting. The following theorem is typical of the results obtained. $E(X)$ denotes the generalized convex hull of the set X in an Eckhoff space.

THEOREM: If X is any subset of an Eckhoff space $E=\prod_{i=1}^{n} E_i$ of dimension $d=\sum d_i$ and if $p \in E(X)$, then $p \in E(Y)$ for some $Y \subset X$ with card $Y \leq d+\delta$ where $\delta = 1$ if $n = 1$ and $\delta = 0$ if $n>1$. Furthermore, if $m = \text{card } Y$ is the cardinality of a smallest subset Y of X for which $p \in E(Y)$, then $p \subset \text{int}_r E(Y)$ ~~E(Y)~~ where $\max(0, m-n) \leq r \leq (m-1).(\text{card}\{d_i : d_i \geq m\}) + \sum_{d_i<m} d_i$.

F. Klein (Bochum)