

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 30/1970

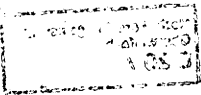
Jordan-Algebren

23. bis 28.8.1970

Unter der Leitung von Prof.Dr.M.Koecher (München) fand im Mathematischen Forschungsinstitut vom 23. bis 28. August 1970 eine Tagung über Jordan-Algebren und verwandte Gebiete statt. Von den 31 Teilnehmern kamen 17 aus dem Ausland, vorwiegend aus den USA. Neben der Diskussion der verschiedensten Spezialprobleme in den Vorträgen kam es in der harmonischen Atmosphäre des Instituts zu zahlreichen persönlichen Kontakten und wissenschaftlichen Gesprächen.

Teilnehmer

- T.Anderson, Vancouver
- E.Becker, Hamburg
- R.E.Block, Nizza
- E.Bönecke, Hamburg
- H.Braun, Hamburg
- V.Dlab, Ottawa
- J.R.Faulkner, Charlottesville
- J.C.Ferrar, Los Angeles
- S.R.Gordon, Los Angeles
- V.Günther, Hamburg



K.-H.Helwig, München
J.Igusa, Towson
R.Iordănescu, Bukarest
N.Jacobson, Hamden/Conn.
G.Janssen, Lehre
M.Koecher, München
O.Kühn, München
O.Loos, München
K.McCrimmon, Charlottesville
K.Meyberg, München
R.H.Oehmke, Iowa City
J.M.Osborn, Madison
H.Petersson, München
H.L.Resnikoff, Houston
D.P.Robbins, Cambridge/Mass.
R.Sacher, München
R.D.Schafer, Cambridge/Mass.
P.Seibt, München
H.Strade, Hamburg
E.Taft, New Brunswick
A.Thedy, Aarhus

Vortragsauszüge

T.ANDERSON: Levitzki radical in varieties of algebras

Let $V(I)$ be a variety of Φ -algebras defined by a set I of identities, where Φ is a commutative associative ring with unity. Let $U(A)$ denote the universal enveloping algebra of A .

Then we have the following results regarding the existence of the Levitzki radical in $V(I)$.

Theorem 1. Let $V(I)$ satisfy the conditions (i) I^2 is an ideal of A whenever I is an ideal of A , for all $A \in V(I)$ and (ii) $U(A)$ is nilpotent whenever $A \in V(I)$ is finitely generated and $A^2 \neq 0$. Then local nilpotence is a radical property in the sense of Kurosh-Amitson for the variety $V(I)$.

Theorem 2. If local nilpotence is a Kurosh-Amitson radical in $V(I)$ then $U(A)$ is nilpotent for all finitely generated solvable algebras A in $V(I)$.

E.BECKER: Halbeinfache quadratische Algebren endlicher Dimension

Über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ lassen sich alle quadratischen Algebren aus einer antikommutativen Algebra U , einer Bilinearform v und einem Einselement e konstruieren: $[U, v, e]$.

Die orthogonale Summe zweier quadratischer Algebren $[U_i, v_i, e_i]$, $i = 1, 2$, wird wie folgt definiert: $[U_1, v_1, e_1] \perp [U_2, v_2, e_2] := [U_1 \oplus U_2, v_1 \perp v_2, e]$. Halbeinfachheit ist bezüglich des Braun-Koecher-Radikals definiert. Die halbeinfachen Algebren sind nicht-kommutative Jordan-Algebren. Ihre Isomorphieklassen bilden unter der orthogonalen Summe ein abelsches Monoid Q . In Q gilt die Kürzungsregel. Q ist direktes Produkt dreier Untermonoide; eines davon ist das Witt-Monoid der Isometrieklassen nicht-ausgearteter quadratischer Formen, das man erhält, wenn man quadratische Formen mit den durch sie definierten Jordan-Algebren vom Grad 2 identifiziert.

R.E.BLOCK: Associative and non-associative differential ring theory

We first discuss the author's theorem on differentiably simple rings with a minimal ideal (which says that they are a tensor product of a simple algebra and a truncated polynomial algebra) and give applications to semisimple Lie algebras and simple flexible algebras, and also discuss D-semisimple rings, with an application to semisimple flexible algebras. We then discuss differential modules of an associative ring A . If $\delta \in \text{der } A$, ${}_A M$ is an A -module and $d \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M)$, d is a differential transformation corresponding to δ if $d(am) = adm + (\delta a)m$ for all a in A , m in M . Theorems on differential modules are given, one of which says: If A is artinian and M is differentiably irreducible and faithful then $A = S \otimes B_n(F)$ and $M = V \otimes B_n(F)$ where V is an S -module (and so known). Applications are given to representations of Lie algebras (including a generalization of Lie's theorem and the Cartan-Jacobson theorem) and of flexible algebras.

J.R.FAULKNER: A geometry for E_7

If $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}(\sigma_3)$, the 27 dimensional exceptional simple Jordan algebra over a field Φ , we construct $\mathfrak{M} = \{ \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \Phi, a, b \in \mathfrak{A} \}$, a nondegenerate alternating bilinear form \langle, \rangle and a ternary product \langle, \rangle which satisfy

$$(T1) \quad \langle x, y, z \rangle = \langle y, x, z \rangle + \langle x, y \rangle z$$

$$(T2) \quad \langle x, y, z \rangle = \langle x, z, y \rangle + \langle y, z \rangle x$$

$$(T3) \quad \langle \langle x, y, z \rangle, w \rangle = \langle \langle x, y, w \rangle, z \rangle + \langle x, y \rangle \langle z, w \rangle$$

$$(T4) \quad \langle \langle x, y, z \rangle, v, w \rangle = \langle \langle x, v, w \rangle, y, z \rangle + \langle x, \langle y, v, w \rangle, z \rangle + \langle x, y, \langle z, w, v \rangle \rangle$$

for $x, y, z, v, w \in \mathfrak{M}$. Let $\Pi = \{ \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix} \mid a^\# = \alpha b, b^\# = \beta a, N(a) = \alpha^2 \beta, N(b) = \alpha \beta^2, T(a, b) = 3\alpha\beta, V_{a, b} = 2\alpha\beta 1 \}$ and let $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \{ \hat{x} = \Phi * x \mid x \in \Pi \}$. Define $\hat{x} | \hat{y}$ if $\langle \mathfrak{M}, x, y \rangle = 0$ and $\hat{x} \simeq \hat{y}$ if $\langle x, y \rangle = 0$. This defines a "geometry" on $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$. Every collineation of $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ is induced by a semisimilarity of \mathfrak{M} , and the image of the automorphism group of \mathfrak{M} in the collineation group is simple.

J.C.FERRAR: Freudenthal Triple systems

A Freudenthal Triple system is reduced if there is $x \in \mathfrak{M}$ such that $\{\mathfrak{M}xx\} = Fx$, F the field of definition of the system \mathfrak{M} . A Peirce decomposition and subsequent classification of reduced triple systems, analogous to that developed by Brown and Meyberg, is given. Each such system is isomorphic to the system of matrices $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in F$, a, b elements of a Jordan algebra \mathfrak{U} of a particular type, with a skew bilinear form and quartic form defined in terms of generic polynomials for a and b . We show directly that the algebra \mathfrak{U} is an invariant, up to generic norm equivalence, of the system \mathfrak{M} and consequently obtain information about the conjugacy of certain elements of \mathfrak{M} , in particular those elements with $\{\mathfrak{M}xx\} = Fx$, under the group G of transformations preserving both forms on \mathfrak{M} .

S.R.GORDON: An integral basis theorem for Jordan algebras

If \mathfrak{U} is a semi-simple Jordan algebra over an algebraically closed field Φ of characteristic zero, then it is possible to choose a Chevalley basis of the Koecher algebra $\mathfrak{K} = \mathfrak{U} \oplus \overline{\mathfrak{U}} \oplus \mathfrak{Q}$ in such a way that those basis elements belonging to \mathfrak{U} form an integral basis for \mathfrak{U} in the following sense: if $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$ is the integral span

of this basis then $1 \in \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$ and for $x, y \in \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$ $xU_y \in \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$. If we interpret the resulting multiplication tables of \mathfrak{U} and \mathfrak{R} over an arbitrary field F of char $\neq 2$ (after reducing modulo p if char $F = p$) we obtain corresponding Jordan and Lie algebras \mathfrak{U}_F , \mathfrak{R}_F over F . We can show that \mathfrak{U}_F is semi-simple and simple as \mathfrak{U} is in two ways: by showing that the generic trace of \mathfrak{U} remains non-degenerate upon reduction mod p , and by showing that $\mathfrak{R}_F/\mathfrak{Z}$ is isomorphic to the Koecher algebra of \mathfrak{U}_F (here \mathfrak{Z} is the center of \mathfrak{R}_F ; $\mathfrak{R}_F/\mathfrak{Z}$ is a Lie algebra of classical type). We obtain a decomposition of the structure group of \mathfrak{U}_F into components, analogous to what is known for \mathfrak{U} , by using the Chevalley group of \mathfrak{R}_F .

K.-H.HELWIG: Jordan-Algebren und symmetrische Räume

Sei \mathfrak{U} eine reelle endlich-dimensionale Jordan-Algebra mit einem Einselement e und σ sei eine Involution von \mathfrak{U} . Ferner sei M die Komponente von e des topologischen Unterraumes von \mathfrak{U} aller invertierbaren Elemente q von \mathfrak{U} mit $q^{-1} = \sigma q$. M ist in natürlicher Weise ein homogener symmetrischer Raum, welcher pseudo-Riemannsch ist, falls \mathfrak{U} halbeinfach ist. Im Falle, daß M Riemannsch symmetrisch ist, lassen sich alle Riemannsch symmetrischen Räume vom Rang 1, alle Graßmann-Mannigfaltigkeiten, die kompakten Gruppen $O(n)$, $U(n)$ und $Sp(n)$, sowie deren nicht kompakte Zwillinge erfassen (und einige mehr). Ist M kompakt, dann läßt sich unter anderem die folgende Verallgemeinerung des Dualitätsprinzips der projektiven Geometrie beweisen: Verschiedene Punkte von M haben verschiedene Antipodenmengen. Dies läßt sich aus der (nicht für beliebige symmetrische Räume vom kompakten Typ gültigen) Aussage herleiten, daß jeder durch einen Punkt q von M gehende maximale Torus von M genau einen Antipoden von q enthält.

J.IGUSA: Construction of absolutely admissible representations
by Jordan algebras

In an attempt to find a natural domain of validity for all Siegel formulas, we introduced the concept of absolutely admissible representations (of connected semi-simple algebraic groups). Roughly speaking, these are the representations for which one side of a conjectural Siegel formula is meaningful. Instead of talking about this conjecture, which has now become a "common theorem", we shall limit ourselves to describing all k -forms of absolutely admissible representations, in which k is an algebraic number field. One of the points that we would like to make is that all "non-standard" absolutely admissible representations are related not only over \mathbb{R} or \mathbb{C} but over k to Jordan algebras.

R.IORDANESCU: Graduations spéciales réelles simples

Définition. Soient \mathfrak{A} une algèbre de dimension finie sur K commutatif et Γ un groupe abélien fini. Supposons qu'il existe une base $B = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de \mathfrak{A} tel, que $e_\alpha e_\beta = \theta(\alpha, \beta) e_{\alpha+\beta}$ ($\alpha, \beta \in \Gamma$) où $\theta : \Gamma \times \Gamma \rightarrow K$. Alors $G = \{\Gamma, B, \theta\}$ s'appelle gradation maximale de \mathfrak{A} .

Notations. \mathfrak{A} sur K étant donnée, \mathfrak{A}_J (resp. \mathfrak{A}_L) désignera l'algèbre dans laquelle la multiplication ab a été remplacée par $a \circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$ (resp. $[a, b] = ab-ba$), $a, b \in \mathfrak{A}$. S étant une sous-algèbre de \mathfrak{A}_J (resp. \mathfrak{A}_L), $\mathfrak{A}(S)$ désignera la sous-algèbre de \mathfrak{A} engendrée par S .

Définition. S étant une algèbre spéciale (de Jordan ou de Lie) et $G = \{\Gamma, B, \theta\}$ une gradation maximale de $\mathfrak{A}(S)$, supposons qu'il

existe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tel que $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_0}$ soit une base pour S . Alors $S = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_0} Ke_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Gamma - \Gamma_0} V_\alpha \right)$, où $V_\alpha = \{0\}$, nous donne une graduation de S , appelée spéciale. On détermine toutes les graduations spéciales des formes réelles de Jordan et de Lie.

N. JACOBSON: Some remarks on a Lie-Jordan algebra correspondence and forms of E_7

Let \mathfrak{J} be an exceptional simple Jordan algebra, \mathfrak{U}_1 a three dimensional simple Lie algebra, $\mathfrak{X} = \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{U}_1 \oplus \text{Der } \mathfrak{J}$ the Tits Lie algebra over a field Φ of characteristic $\neq 2, 3$. If \mathfrak{U}_1 is split, $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{R} = \mathfrak{J} \oplus \bar{\mathfrak{J}} \oplus \mathfrak{Q}$, Koecher's Lie algebra, where here $\mathfrak{Q} = R(\mathfrak{J}) + \text{Der } \mathfrak{J}$. If \mathfrak{J} is split, \mathfrak{R} is the split Lie algebra E_7 . \mathfrak{R} has the irreducible module \mathfrak{M} of 56 dimensions defined by Freudenthal and \mathfrak{M} is equipped with a non-degenerate skew bilinear form $\{, \}$ and a quartic form q . Identifying \mathfrak{R} with the corresponding Lie algebra of linear transformations in \mathfrak{M} it has been shown by Seligman that the automorphisms of \mathfrak{R} have the form $A \rightarrow \eta^{-1} A \eta$ where η is a similarity of q . Using this form of $\text{Aut } \mathfrak{R}$ we apply Galois cohomology to obtain results on forms of E_7 . If P is a Galois extension field of Φ , $\tilde{\mathfrak{J}}$ the split exceptional Jordan algebra over P , $\tilde{\mathfrak{R}}$ the corresponding Koecher Lie algebra, $\tilde{\mathfrak{M}}$ Freudenthal's $\tilde{\mathfrak{R}}$ -module then any Φ -form \mathfrak{R} of $\tilde{\mathfrak{R}}$ generates an associative algebra \mathfrak{A} which is central simple of exponent two. We construct a \mathfrak{R} for which $\{\mathfrak{A}\} = \{Q\}$ for any given quaternion algebra. This has the form $\mathfrak{R} = \mathfrak{J} \otimes \mathfrak{U}_1 \oplus \text{Der } \mathfrak{J}$ where \mathfrak{U}_1 is the Lie algebra of elements of trace 0 of Q . It follows that isomorphism of the Tits Lie algebras \mathfrak{X} implies isomorphism of the Lie algebras \mathfrak{U}_1 .

G.JANSSEN: Formal-reelle Jordan-Algebren beliebiger Dimension

Bekannte Resultate für endlichdimensionale formal-reelle Jordan-Algebren werden auf eine Klasse unendlichdimensionaler Jordan-Algebren mit assoziativer Spur übertragen, die den assoziativen W^* -Algebren vom Typ II_1 entsprechen. Insbesondere bilden die Quadrate einen verallgemeinerten homogenen Positivitätsbereich. Unter gewissen Bedingungen kann zu einem Positivitätsbereich eine formal-reelle Jordan-Algebra konstruiert werden. Wesentliches Hilfsmittel ist der Satz von Choquet-Bishop-de Leeuw über die Existenz von Integraldarstellungen. Die Beziehung zwischen gewissen Positivitätsbereichen und den formal-reellen Jordan-Algebren ist eineindeutig. Man hat damit eine Verallgemeinerung der Koecherschen Theorie ohne Einschränkung der Dimension.

O.KÜHN: Über das Gebiet vom Typ E_6

Sei \mathbb{C}_0 die Cayleydivisionsalgebra über den reellen Zahlen, \mathbb{C} deren Komplexifikation. Man betrachtet die Ausnahme-Jordanalgebra $\mathfrak{J}_3(\mathbb{C})$. Sei $c \in \mathfrak{J}_3(\mathbb{C})$ ein primitives Idempotent und $V := (\mathfrak{J}_3(\mathbb{C}))_{1/2}(c)$. Auf V ist ein Jordan-Tripelsystem definiert. Durch das Jordan-Tripelsystem wird ein beschränktes symmetrisches Gebiet definiert, das in diesem Vortrag beschrieben wird.

O.LOOS: Jordan-Tripelsysteme und beschränkte symmetrische Gebiete

Ein Jordan-Tripelsystem \mathfrak{B} über \mathbb{R} heißt formal reell, wenn die quadratische Form $x \mapsto \text{Spur}(x \square x)$ positiv definit ist. Durch $|x|^2 = \text{Maximum der Eigenwerte von } x \square x$ wird dann auf \mathfrak{B} eine Norm erklärt. Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{S} \oplus \tilde{\mathfrak{B}}$ die Koecher-Tits-Algebra zu \mathfrak{B} , und $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{R} = \text{Der } \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} = \{x - \tilde{x} : x \in \mathfrak{B}\}$. In der adjungier-

ten Gruppe L von \mathfrak{g} seien G und K die zugehörigen analytischen Untergruppen. Als Verallgemeinerung der Harish-Chandra-Realisierung eines Hermite'schen symmetrischen Raumes gilt: Der "Einheitskreis" $D = \{x \in \mathfrak{B} : |x| < 1\}$ ist in natürlicher Weise ein zu G/K isomorpher symmetrischer Raum. D ist direktes Produkt eines Euklidischen Raumes und eines symmetrischen Raumes vom nicht-kompakten Typ, und hat klassisches Wurzelsystem. Alle solchen Räume lassen sich auf diese Weise realisieren.

K.McCRIMMON: The radical of a Jordan algebra

The Jacobson radical for Jordan algebras is defined, in analogy with the associative theory, to be the maximal ideal consisting entirely of quasi-invertible elements. This radical enjoys many of the properties of its associative analogue. The radical can be characterized in terms of its elements: The radical consists precisely of the elements which are properly quasi-invertible in the sense that they stay quasi-invertible in all homotopes. This is used to determine the radicals of related algebras. A similar program can be applied to alternative algebras and the Jacobson-Smiley radical.

K.MEYBERG: Jordan-Tripelsysteme

Ein Vektorraum \mathfrak{B} zusammen mit einer trilinearen Komposition

$(x, y, z) \mapsto \{xyz\} = (xoy)z$ von $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ in \mathfrak{B} heißt ein Jordan-Tripelsystem, wenn für alle $x, y, z, u, v, w \in \mathfrak{B}$ gilt: $\{xyz\} = \{zyx\}$ und $\{xy\{uvw\}\} - \{uv\{xyw\}\} = \{\{xyu\}vw\} - \{u\{yxv\}w\}$.

Jordan-Tripelsysteme bilden eine natürliche Verallgemeinerung von Jordan-Algebren, denn jede Jordan-Algebra ist mit $\{abc\} =$

$a(bc) - b(ac) - (ab)c$ ein Jordan-Tripelsystem. Mit Jordan-Tripelsystemen kann man die Koecher-Tits-Konstruktion durchführen und erhält so eine interessante Klasse von Lie-Algebren. Für die Strukturtheorie von Jordan-Tripelsystemen von Bedeutung ist, daß die Fundamentalformel $\{\{xyx\}u\{xyx\}\} = \{x\{y\{xux\}y\}x\}$ gilt, und daß für festes $y \in \mathfrak{B}$ die Abbildung $(x, z) \mapsto \{xyz\}$ eine Jordan-Algebra in \mathfrak{B} definiert (falls die Charakteristik des Grundkörpers $\neq 2, 3$ ist). Für nicht-ausgeartete Jordan-Tripelsysteme, d.h. die durch $\lambda(x, y) = \text{Spur}(xoy + yox)$ definierte Bilinearform λ ist nicht-ausgeartet, wird gezeigt, daß sie direkte Summen von einfachen Idealen sind.

R.H.OEHMKE: Generic norms for commutative power-associative algebras

For finite dimensional commutative power-associative algebras over an algebraically closed field of characteristic not 2 and of degree 2 it is shown that the generic minimal polynomial is $(\lambda^{2p^e} - t_0(x)\lambda^{p^e} + N_0(x))^t$ if the characteristic is $p \neq 0$ and $(\lambda^2 - t_0(x)\lambda + N_0(x))^t$ if the characteristic is 0. This result is used to show that if the algebra is simple the polynomial is a power of an irreducible polynomial and if the algebra is simple and nilstable it is of the second type. The first of these results can be further extended to show that the generic minimal polynomial for any algebra of degree greater than one is a power of an irreducible polynomial. This proof does not involve the characterization theorems.

J.M.OSBORN: Periodic Rings

An element a in a power-associative ring A is called periodic if there exists an integer $n > 1$ such that $a^n = a$, and A is called periodic if every $a \in A$ is periodic. A periodic ring can be shown to be a (discrete) direct sum of algebraic algebras over finite fields in which no nonzero element is nilpotent. Conversely such a ring is periodic. Every periodic Jordan ring of characteristic not 2 is a subdirect sum of simple periodic Jordan rings, and every simple periodic Jordan ring is either a periodic field or else a Jordan algebra of dimension 3 over its center which is a periodic field. Every flexible strictly power-associative periodic ring of characteristic not 2 is a Jordan ring. A strictly power-associative periodic ring of characteristic not 2 which contains only one idempotent is a field. An associative ring with involution of characteristic not 2 whose symmetric elements are periodic is a subdirect sum of fields and simple algebras of dimension 4 over their centers.

H.PETERSSON: Jordan-Divisionsalgebren über lokalen Körpern

Dieser Vortrag skizziert eine systematische Theorie endlichdimensionaler quadratischer Jordan-Divisionsalgebren A über einem lokalen Körper K . Das Hauptergebnis der Untersuchung besagt: Ist A zentral über K , so gilt $\dim A \leq (\text{Grad } A)^2$. Folgerungen:

- 1) (Hasse) Jede quadratische Form über K in wenigstens fünf Variablen ist isotrop.
- 2) Jede zentral-einfache Ausnahme-Jordan-Algebra über K ist split.
- 3) Sei $\text{Char } K \neq 2$ und N eine Form über K vom Grade d in wenigstens $d^2 + 1$ Variablen, die nicht-ausgeartet ist und Jordan-Komposition

gestattet (K.McCrimmon, Pac.J.Math. 15 (1965), 925 - 956). Dann hat N eine nicht-triviale Nullstelle in K .

4) (Albert) Sei $D \neq K$ eine endlich-dimensionale assoziative Divisionsalgebra über K , versehen mit einer Involution von erster Art. Dann ist D eine Quaternionen-Algebra über ihrem Zentrum.

H.L.RESNIKOFF: Differential Equations on Complex Spaces and Jordan Algebras

\mathfrak{A} = compact real Jordan algebra, $Z(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} + i\exp\mathfrak{A}$. Using the Jordan structure, one constructs certain non linear polynomial differential operators mapping the field of functions and associated graded ring of forms (defined on appropriate quotient spaces of $Z(\mathfrak{A})$ by discrete groups of biholomorphic automorphisms) into themselves. It follows that every such function or form satisfies an algebraic differential equation. By restricting attention to small values of $\dim \mathfrak{A}$, sharper results can be obtained. For instance:

Theorem: $\dim \mathfrak{A} < 2 \implies$ every function or form satisfies an algebraic differential equation of order 3 but of no lower order if the function (resp. form) is not constant.

This theorem can be used to prove algebraic independence of generators of the transcendental part of the graded ring.

D.P.ROBBINS: Jordan Elements in a free associative algebra

Let A be a free associative algebra on a set X , let J be the Jordan subalgebra of A generated by 1 and X , and let G be the smallest subspace of A containing 1 and invariant under the Jordan multiplications by elements of X . The elements of J and G are

called Jordan elements and simple Jordan elements respectively. Two characterizations are given for G , one of which relates G to the Lie triple subsystem of A generated by X . A recursion formula is obtained for the dimensions of the homogeneous components of G . If X has four elements, a characterization is given for the subspace of J consisting of Jordan elements linear in three variables and of arbitrary degree in the remaining variable.

R.SACHER: Über eine Klasse von Lie-Moduln

Die Struktur der von M.Koecher in "Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras II", Am.J.Math. 90 (1968), konstruierten Lie-Moduln $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}, J)$ wird diskutiert. Das Hauptergebnis lautet: Enthält die Jordan-Algebra \mathfrak{U} keinen echten Teilraum \mathfrak{w} mit $\mathfrak{b}^+\mathfrak{w} \subset \mathfrak{w}$ und $(\mathfrak{U} \Delta \mathfrak{w})\mathfrak{U} \subset \mathfrak{w}$, so ist der Modul $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}, J)$ entweder einfach oder er besitzt genau zwei (nicht isomorphe) echte Untermoduln \mathfrak{X} und $\overline{\mathfrak{X}}$, deren direkte Summe er ist. Die Untermoduln \mathfrak{X} und $\overline{\mathfrak{X}}$ können genau beschrieben werden. Es gilt nämlich $\mathfrak{X} = \{(b \Delta z) \oplus b : b \in \mathfrak{U}\}$ und $\overline{\mathfrak{X}} = \{-(b \Delta z) \oplus b : b \in \mathfrak{U}\}$, wobei z ein Element von \mathfrak{U} mit $\mathfrak{U} \nabla z = 0$ und $4z^2 = e$ ist.

R.D.SCHAFER: A coordinatization theorem for commutative power-associative algebras

Let \mathfrak{U} be a commutative power-associative algebra with 1 which is a sum of $n \geq 3$ pairwise orthogonal idempotents e_1 . Assume there exist elements u_{1j} , $j = 2, \dots, n$, in the Peirce spaces \mathfrak{U}_{1j} which satisfy $u_{1j}^2 = e_1 + e_j$. Then there exists a Jordan matrix algebra $\mathfrak{J}(\mathfrak{D}_n)$ given by a standard involution in \mathfrak{D}_n such that $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{J}(\mathfrak{D}_n)$ if and only if any one of the following conditions holds:

(*) $\mathfrak{U}_{11}\mathfrak{U}_{12} \subset \mathfrak{U}_{12}$;

(**) $\mathfrak{B}_{e_1+e_2} = 0$ where

$$\mathfrak{B}_{e_i+e_j} = \{x \in \mathfrak{U}_1(e_i+e_j) \mid x\mathfrak{U}_{1/2}(e_i+e_j) \subset \mathfrak{U}_0(e_i+e_j)\} ;$$

(***) the only ideal J of \mathfrak{U} satisfying $J^2 = 0$ and $J \subset \sum_{i \neq j} \mathfrak{B}_{e_i+e_j}$ is $J = 0$.

An example shows that the conditions (*), (**), (***) are not redundant.

P.SEIBT: Kohomologie von nichtassoziativen Algebren

Sei k ein Körper. Die Kohomologie einer (nichtassoziativen) k -Algebra A festen Typs (Typinvarianz bei unitären kommutativen und assoziativen Ringerweiterungen $k \hookrightarrow R$) wird als Theorie der exakt verbundenen Folge $(H^n(A, -))_{n \geq 0}$ der rechtsabgeleiteten Funktoren des Derivationsfunktors betrachtet. Die Diskussion erster notwendiger und hinreichender Bedingungen, so daß für jeden Bimodul M (des betrachteten Typs) von A $H^n(A, M)$ die Menge der Äquivalenzklassen n -facher singulärer Erweiterungen von A durch M beschreibt ($n \geq 1$), führt zum Begriff der Semi-Nullseparabilität von A . Für diese sind dann die Kohomologietheorien von Gerstenhaber-Glassmann und von Barr-Pareigis äquivalent. Semi-Nullseparabilität in einigen klassischen Fällen, der Begriff der für die Theorie "natürlichen" kohomologisch inneren Derivationen, Bemerkungen zur Beziehung kohomologisch innere - klassisch innere Derivationen und zu Radikalabspaltungssätzen werden gebracht.

H.STRADE: Nodale nichtkommutative Jordan-Algebren und Lie-Algebren von Primzahlcharakteristik

Es wird die Klasse \mathfrak{S} der nodalen nichtkommutativen Jordan-Algebren

untersucht, für die die zugehörige kommutative Algebra ein reduzierter Polynomring $B_n(K)$ und die antikommutative Algebra Lie-Algebra ist. Es wird

- 1) die Idealstruktur dieser Algebren untersucht,
- 2) zu jeder Algebra A dieser Klasse eine Lie-Algebra $L(A)$ definiert, so daß die Idealstrukturen eng zusammenhängen (z.B. A einfach $\iff L(A)$ einfach),
- 3) in \mathfrak{S} ein "Tensorprodukt" definiert,
- 4) ein Konstruktionsverfahren für Algebren von \mathfrak{S} angegeben.

Als Anwendung erhält man einen Satz über die Einbettbarkeit einer Lie-Algebra E der Charakteristik > 2 mit $EE = E$ und $\text{Zentr.}E = \{0\}$ in eine Jacobson-Witt-Algebra $W_{\dim E}$ und die Konstruktion von einfachen Lie-Algebren mit Cartan-Algebren von vorgegebenem Nilpotenzgrad.

E.TAFT: Rational modules of the dual of a coalgebra

Let C be a coalgebra, C^* its dual algebra, and $(C^*)^{\circ}$ the coalgebra of linear functions on C^* whose kernels contain a cofinite ideal. A (left) module M for C^* is called rational if it is induced by a (right) comodule map of M to $M \otimes C$. Rational modules are locally finite. We answer the question of the converse with the following theorem.

Theorem: The following conditions are equivalent:

- (1) Every locally finite C^* -module is rational
- (2) $(C^*)^{\circ}$ is rational as a C^* -module
- (3) The injection of C into $(C^*)^{\circ}$ given by evaluation is surjective.

Using this theorem, we can exhibit a coalgebra C , and a locally finite C^* -module which is not rational.

A.THEDY: On algebras with the commutators in one of the nuclei

In a ring let $[x,y] = xy - yx$ and $(xyz) = (xy)z - x(yz)$. In a 3-torsionfree and also in a strictly power-associative ring A the alternative nucleus $N_\alpha := \{v \mid v \in A, (xvx) = 0, (vxy) = (xyv) = (yvx) \text{ for } x,y \in A\}$ is a subring. Block has shown that for non-commutative Jordan algebras of finite dimension over a field of char $\neq 2$ with $[A,A] \subset N_\alpha$ the Wedderburn structure theorems and a representation theory hold. An arbitrary ring is called semi-prime if no non-zero ideal squares to zero. If A is a semi-prime, 3-torsionfree ring such that $[y, (xyx)] = 0$ and $[A,A] \subset N_\alpha$, then A is a subdirect sum of a semi-prime, commutative and a semi-prime, alternative ring. Consequently, if A is prime or simple, then A is commutative or alternative. Similar results hold - with alternative replaced by associative - if N_α is replaced e.g. by the intersection of the left and the middle nucleus of A .

R.Sacher (München)

2
3
4

