

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 39/1970

FUNKTIONALANALYSIS UND NUMERISCHE MATHEMATIK

15.11.70 bis 21.11.70

Zu dieser unter der Leitung von L. Collatz und H. Werner durchgeführten jährlichen Tagung kamen in diesem Jahr mehr als 50 Mathematiker aus dem Aus- und Inland. Das dicht gedrängte Programm von 24 Vorträgen verdeutlichte, daß die Nachfrage nach Tagungen, die die Verbindung zwischen Theorie und Anwendung zu pflegen versuchen, außerordentlich groß ist. Es zeigte sich, daß die Funktionalanalysis als wichtiges Hilfsmittel für viele Gebiete der Numerischen Analysis, z. B. für die konvexe Optimierung, für die diskrete Approximation, für die numerische Behandlung der Eigen- und Randwertaufgaben, für die Approximationstheorie und für Iterationsverfahren unentbehrlich geworden ist. Am Ende der Tagung wurde in einer Diskussion versucht, eine Standortbestimmung der Numerischen Mathematik vorzunehmen.

Die Tagungsteilnehmer danken der Leitung und den Mitarbeitern des Hauses für die herzliche Aufnahme und die ausgezeichnete Betreuung, die wie stets eine anregende Atmosphäre und somit die Grundlage für das Gelingen der Tagung schufen.

T e i l n e h m e r

Albrecht, J.	Clausthal	Schäfke, F.W.	Köln
Ansorge, R.	Hamburg	Schnabl, R.	Wien
Bendisck, J.	Münster	Schock, E.	Bonn
Braess, D.	Münster	Schröder, J.	Köln
Breckner, W.W.	Cluj	Schwanenberg, P.	Birlinghoven
Brosowski, B.	Göttingen	van der Sluis, A.	Utrecht
Cimoca, Gh.	Cluj	Steinhausen, D.	Münster
Collatz, L.	Hamburg	Stetter, H.-J.	Wien
Dahlquist, G.	Stockholm	Stoer, J.	Würzburg
Dieter, U.	Karlsruhe	Stummel, F.	Frankfurt
Dirschmid, H.	Florenz	Törnig, W.	Jülich
Elsner, L.	Hamburg	van de Vooren, A.	Groningen
Everitt, W.N.	Dundee	Wacker, H.	München
Gekeler, E.	Mannheim	Weinitschke, H.	Berlin
Georg, K.	Bonn	Werner, H.	Münster
Gutknecht, M.	Zürich	Werner, J.	Hamburg
Hadeler, K.P.	Erlangen	Wetterling, W.	Enschede
Hämmerlin, G.	München	Witsch	Köln
Hornung, U.	Münster	Zeller, K.	Tübingen
Joubert, G.	Pretoria		
Kleinert, W.	Wien		
Kornstaedt, H.-J.	Berlin		
Krawczyk, R.	Clausthal		
Laasonen, P.	Helsinki		
de Ledesma, L.	Madrid		
Metelmann, K.	Köln		
Nickel, K.	Karlsruhe		
	(z.Z.Madison/USA)		
Opfer, G.	Hamburg		
Pävåloiu, I.	Cluj		
Rathscheck, V.	Hamburg		
Runge, R.	Münster		
Schaback, R.	Münster		

V o r t r a g s a u s z ü g e

BENDISCH, J.:

Approximation von Eigenwerten und Eigenfunktionen bei einem  
singulären Sturm-Liouvilleschen Randwertproblem

Es wird das EWP

$$\begin{aligned} (r(x)y'(x))' + (\omega p(x) - q(x))y(x) &= 0 \\ ay(0) + by'(0) = 0 \quad cy(1) + dy'(1) &= 0 \\ (a \cdot b \leq 0, \quad c \cdot d \geq 0) \end{aligned}$$

unter Zulassung gewisser Singularitäten für  $p(x)$  und  $q(x)$  mit  
einem Differenzenverfahren numerisch behandelt in den beiden  
Fällen ( $b \neq 0, d = 0, c = 1$ ) und ( $b \cdot d \neq 0$ ).

Die Existenz von Eigenlösungen wird nachgewiesen, ein Satz über  
die Konvergenz von Näherungslösungen gegen Eigenlösungen aufge-  
stellt, schließlich erfolgt eine Abschätzung der Konvergenzge-  
schwindigkeit der Näherungswerte für die Randbedingungen  
 $y'(0) = y(1) = 0$  und zum anderen für  $y'(0) = y'(1) = 0$ .

BRECKNER, W.W.:

Zur Charakterisierung von Minimallösungen

Es sei  $y_0$  ein Element eines reellen oder komplexen Vektorrau-  
mes  $Y$ ,  $V$  eine nichtleere Teilmenge von  $Y$  und  $F$  ein reelles,  
auf  $Y$  definiertes Funktional. Ein Element  $v_0 \in V$  heißt Minimal-  
lösung für  $y_0$  bezüglich  $(V; F)$ , wenn es der Gleichung

$$F(v_0 - y_0) = \inf \{ F(v - y_0) : v \in V \}$$

genügt. Die Menge der Minimallösungen für  $y_0$  bezüglich  $(V; F)$   
wird mit  $\mathcal{M}[y_0; V; F]$  bezeichnet. - Ziel der Arbeit ist es,  
Kriterien zur Charakterisierung der Elemente von  $\mathcal{M}[y_0; V; F]$

anzugeben. Besonders eingehend wurde dieses Problem bisher in dem Spezialfall untersucht, wenn  $Y$  ein normierter Vektorraum und  $F$  die Norm dieses Raumes ist. Wir zeigen nun, daß man die dabei erhaltenen Sätze auf natürliche Weise verallgemeinern kann und beweisen Kriterien zur Charakterisierung der Minimallösungen, wenn  $V$  eine konvexe Teilmenge eines beliebigen (bzw. lokalkonvexen topologischen) reellen oder komplexen Vektorraumes  $Y$  ist und  $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$  ein

- a) beliebiges (bzw. stetiges) konvexes Funktional oder
- b) die Gestalt  $G \circ T$  hat, wobei  $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear und  $T : Y \rightarrow Y$  ein stetiger Operator ist.

Als Anwendungen ergeben sich Kriterien zur Charakterisierung von Sonnen bezüglich sublinearer Funktionale.

#### CIMOCA, Gh.:

Über die gleichmäßige Approximation mit Bedingungen

Die vorliegende Arbeit enthält ein einheitliches Studium des folgenden Approximationsproblems der stetigen Funktionen:

Es seien  $T, U, L$  kompakte, nicht unbedingt disjunkte Mengen des metrischen Raumes  $S = T \cup U \cup L$ ,  $S \subset [a, b]$ , und es sei  $C[S]$  der lineare Raum aller auf  $S$  definierten reellwertigen stetigen Funktionen. Man betrachtet einen  $n$ -dimensionalen Haar'schen Unterraum  $M$  des Raumes  $C[S]$  und es seien  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $l : L \rightarrow \mathbb{R}$  fest vorgegebene Funktionen, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$(i) \quad \begin{aligned} \{s \in U : u(s) = -\infty\} &= \emptyset && \text{aber} \\ \{s \in U : u(s) = +\infty\} &= U_{+\infty} && \text{kann nichtleer sein,} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \{s \in L : l(s) = +\infty\} &= \emptyset && \text{aber} \\ \{s \in L : l(s) = -\infty\} &= L_{-\infty} && \text{kann nichtleer sein,} \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} U_{+\infty} &\text{ ist eine offene Untermenge von } U, \text{ und } L_{-\infty} \\ &\text{ ist eine offene Untermenge von } L, \end{aligned}$$

(iv)  $u$  ist auf  $U^* = U - U_{+\infty}$  stetig und  $l$  ist auf  $L^* = L - L_{-\infty}$  stetig,

(v) Für  $s \in U \cap L$  folgt  $l(s) < u(s)$ .

Man definiert die Menge der approximierenden Funktionen:

$$\bar{M} = \{ p \in M : l(s) \leq p(s), s \in L \text{ und } p(s) \leq u(s), s \in U \}$$

und es sei:  $\|f\| = \max \{ |f(s)|, s \in T \}$ ,  $f \in C[S]$ .

Eine Funktion  $p_0 \in \bar{M}$  nennt man Minimallösung in  $\bar{M}$  für  $f \in C[S]$ , falls:

$$\|f - p_0\| = \inf \{ \|f - p\|, p \in \bar{M} \}.$$

In der Arbeit werden Existenz-, Charakterisierungs- und Eindeutigkeitssätze der Minimallösungen gegeben.

DAHLQUIST, G. and GUSTAFSON, S.Å.:

Computation of Slowly Convergent Fourier Integrals

Problem: Compute

$$\hat{f}(w) = e^{-iwk} \int_k^\infty e^{iwt} f(t) dt, k > 0,$$

when the values  $f(k+rh)$  are given numerically for  $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $h$  is a positive constant. The method should work well, when  $f$  is a slowly decreasing function, if there exists a representation of the form,

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(x),$$

where  $\alpha$  is a function of globally bounded variation. ( $\alpha$  can be unknown. Criteria for this representation are known: see e.g. Bernstein, Doetsch, Schoenberg, Widder).

Put  $e^{-hx} = u$ ,  $d\alpha(x) = d\beta(u)$ . Then the problem is reduced to

the following moment problem:

$$\text{given } \int_0^1 u^r u^{k/h} d\beta(u) = f(k+rh), \quad (r=0,1,2,\dots,n-1), \quad (1)$$

$$\text{compute } \hat{f}(w) = \int_0^1 \frac{h}{\ln \frac{1}{u} - iwh} u^{k/h} d\beta(u). \quad (2)$$

Numerical quadrature formulae can be calculated for the integral in (2) with the use of the information in (1). Excellent results have been obtained with both Gaussian and Lagrangian formulae (with a suitable choice of abscissae in the latter case).

For the slowly decreasing function  $f(t) = 1/(1 + \ln(t+1/2))$ ,  $k = 1.5$ , the relative error was less than  $0.5 \times 10^{-7}$  for  $1 \leq w \leq 10^4$ . The method can also be interpreted as an approximation of  $f$  by a sum of exponentials.  $\hat{f}$  is obtained as a rational function: actually a piecewise rational function, since it is advisable to let  $h$  be a piecewise constant, non-increasing function of  $w$ .

Details are given in the preliminary reports NA 70.15 and NA 70.24, Department of Computer Science, Royal Institute of Technology, S-10044 Stockholm, Sweden.

DIRSCHMID, H. und SCHNABL, R.:

Zur Inversion der Laplace-Transformation nach einer Formel von POST-WIDDER

Ein von POST vorgeschlagener Weg zur Inversion der Laplace-Transformation, der von WIDDER verallgemeinert wurde, wird mit den Methoden der Theorie der linearen Operatoren untersucht und gleichzeitig der Zusammenhang mit den Gamma-Operatoren hergestellt, der eine Konvergenzaussage des Verfahrens liefert. Nach einer Idee von R. Schnabl und mit Hilfe geeigne-

ter Linearkombinationen wird die Konvergenz verbessert und der Aufwand der an sich bekannten Verbesserung durch Linearkombinationen verringert.

ELSNER, L.:

Zur Berechnung des Spektralradius nichtnegativer Matrizen

Es werden iterative Verfahren angegeben, um den Spektralradius und den zugehörigen positiven Eigenvektor einer nichtnegativen irreduziblen Matrix numerisch zu berechnen. Dabei wird in jedem Schritt nur eine Komponente des Näherungsvektors modifiziert. Für eine gewisse Klasse von Verfahren dieser Art kann Konvergenz bewiesen werden. Im Gegensatz zu manchen Verfahren zeigt sich hier, daß das Vorhandensein betragsgleicher Eigenwerte keinen Einfluß auf das Konvergenzverhalten hat. So scheint es sich insbesondere für schwachbesetzte Matrizen zu eignen.

EVERITT, W.N.:

On the Numerical Determination of the Deficiency Indices of Second Order Differential Operators

Let  $M[\cdot]$  denote the differential expression

$$M[y] = -y'' + qy \quad (' \equiv \frac{d}{dx})$$

acting on differentiable complex-valued functions defined on the interval  $[0,1)$ . The coefficient  $q$  is real-valued and continuous on  $[0,1)$  but may have a singularity at the endpoint 1.

The expression  $M[\cdot]$  may be used to generate a closed, symmetric operator  $T_0$  in the Hilbert space  $L^2(0,1)$ , which has deficiency indices  $(1,1)$  or  $(2,2)$  according to whether  $M[\cdot]$  is in limit-point or limit-circle case respectively.

(For details of the operator  $T_0$  see Lineare Differentialoperatoren by M.A. Neumark (Akademie-Verlag, Berlin, 1963) in particular Chapters V and VII; for the limit-classification of  $M[\cdot]$  see the memoir of Hermann Weyl in Math. Annalen 68 (1910, 222-269).)

In the lecture it will be indicated that in certain cases established techniques in numerical analysis may be applied to the solutions of the linear, ordinary differential equation

$$M[y] = \lambda y \text{ on } [0,1),$$

where  $\lambda = \mu + i\nu$  is a complex parameter, to determine whether  $T_0$  has deficiency indices (1,1), i.e. limit-point case, or (2,2) i.e. limit-circle case.

GEKELER, E.:

Über das Einzelschrittverfahren bei monotonen Gleichungssystemen

Es wird die Konvergenz des Einzelschrittverfahrens mit Relaxation (SOR-Verfahren) bei der Anwendung auf nichtlineare, stark monotone Gleichungssysteme untersucht. Die Konvergenz in der Nähe der Lösung läßt sich durch eine leichte Verallgemeinerung bekannter Sätze über lineare Systeme nachweisen. Eine weitere Aussage ist einem Ergebnis von Kellogg über eine nichtlineare Variante des ADI-Verfahrens ähnlich.

HADELER, K.P.:

Über ein Variationsproblem

Sei  $X$  ein Hilbertraum, sei  $B$  ein positiv definiter selbstadjungierter Operator mit diskretem Spektrum. Sei  $h \in X$ ,  $\|h\| = 1$ . Sei

$p$  eine stetig differenzierbare reelle Funktion auf  $(0, \infty)$  mit  $p(t) > 0$ ,  $p'(t) < 0$ . Dann hat das Variationsproblem

$$\sup \left\{ \frac{|(h, u)|^2}{(u, u)} p\left(\frac{(Bu, u)}{(u, u)}\right) : u \in D_B, u \neq 0 \right\}$$

eine Lösung. Diese Lösung ist auch Lösung der Eulerschen Gleichung

$$Bu = \nu u + \mu \|u\| h, \quad \nu = g((Bu, u)/(u, u))$$

$$g(t) = p(t)/p'(t) + t.$$

Wenn  $g$  in einer Umgebung von  $\mathbb{R}_+$  analytisch ist und einer Ungleichung  $0 < g(t) \leq t/\kappa$ ,  $\kappa > 1$ , genügt, so hat die Eulersche Gleichung nur endlich viele Lösungen (bis auf Vielfache), die vermöge der Beziehung  $u = (B - \nu J)^{-1} h$  den endlich vielen reellen Nullstellen  $\nu$  einer gewissen analytischen Funktion eindeutig entsprechen.

Der Spezialfall  $p(t) = t^{-2}$ ,  $g(t) = t/2$ , in dem alle genannten Voraussetzungen erfüllt sind, läßt sich bei der Abschätzung von Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren anwenden.

#### HÄMMERLIN, G.:

#### Fehlerabschätzung bei numerischer Integration nach Gauß

Um den Fehler einer Gaußschen Quadraturformel

$$R_n(f) = \int_{-1}^{+1} f(x) dx - \sum_{j=1}^n \gamma_{n_j} f(x_{n_j}),$$

$f(z)$  holomorph in  $|z| < r$ ,  $r > 1$ , in der ableitungsfreien Form  $|R_n(f)| \leq \zeta_n \|f\|$ ,  $\zeta_n := \|R_n\|$ , abschätzen zu können, benötigt man handliche Schranken  $\zeta_n^* \geq \zeta_n$ . Mit Hilfe einer brauch-

baren Abschätzung der Fehler  $R_n(x^{2k})$ ,  $k \geq n$ , kann man die Schranke

$$G_n^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)} \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3} S_n(r),$$

$$S_n(r) = \frac{1}{2} \frac{(2n-1)!}{r^{2n-1}} \left[ \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-2n} - \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{-2n} \right]$$

herleiten. Beispiele zeigen, daß damit auf einfache Weise gute Abschätzungen gewonnen werden können.

HORNUNG, U.:

Die approximative Lösung einer Folge von Approximationsproblemen

Es sei  $W$  die Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer Grundmenge  $A$  und für natürliches  $n$  sei  $W_n$  die Klasse der  $w \in W$  mit endlichem Träger und Werten in  $\left\{ \frac{i}{n} \mid 0 \leq i \leq n \right\}$ . Sind dann  $U$  bzw.  $T_n$  die Klasse der  $w \in W$  bzw.  $w \in W_n$  mit maximalem

$\int_{y \in A} G(x, y) dw(x)$ , so gilt unter geeigneten Voraussetzungen

an den Kern  $G$  und die Grundmenge  $A$  : 1.  $T_n$  ist nichtleer, 2. es gibt genau  $w \in U$ , 3. jede Folge  $w_n \in T_n$  konvergiert schwach gegen das  $w \in U$ . Die Bedingungen besagen, daß der Kern eine symmetrische, in beiden Argumenten in einem Gebiet  $X$  des  $R^D$  harmonische, Funktion ist, die eine Singularität für  $x = y$  hat und zum Rand von  $X$  hin abfällt, und daß  $A$  ein Kompaktum und regulärer Rand des Außengebietes zu  $A$  in  $X$  ist.

Es werden Anwendungen auf eine Klasse von Approximationsaufgaben dargestellt.

KRAWCZYK, R.:

Zur Einschließung inverser linearer Operatoren

Gegeben sei ein Operator  $T$ , welcher einen halbgeordneten linearen Raum in einen zweiten halbgeordneten linearen Raum abbildet, und es werde vorausgesetzt, daß sich  $T = T^+ - T^-$  als Differenz zweier positiver Operatoren darstellen läßt. Außerdem werde vorausgesetzt, daß der inverse Operator  $T^{-1}$  existiert. Ausgehend von einem Intervall, welches  $T^{-1}$  enthält, wird eine Folge von Intervallen zur Einschließung von  $T^{-1}$  konstruiert. Es werden Voraussetzungen angegeben, unter denen der Durchmesser dieser Intervalle quadratisch gegen Null konvergiert, dies ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Intervalle gegen die Lösung  $T^{-1}$ . Diese Methode wird auf lineare Operatorgleichungen angewandt und insbesondere an dem Beispiel eines inhomogenen linearen Gleichungssystems praktisch erprobt.

NICKEL, K.:

Abbruchkriterium und Numerische Konvergenz

Es sei  $x_n \rightarrow x$  eine von einem Verfahren erzeugte Folge zur Approximation der reellen Zahl  $x$ . Es sei  $\tilde{x}_n(L)$  ein mit einer  $L$ -ziffrigen Maschine gewonnener Näherungswert zu  $x_n$  mit  $\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{x}_n(L) = x_n$ . Es wird ein Abbruchkriterium  $N(L)$  angegeben derart, daß es genügt, bei fester Zifferanzahl  $L$  allein die Werte  $\tilde{x}_0(L), \tilde{x}_1(L), \dots, \tilde{x}_{N(L)}(L)$  zu berechnen und daß unter sehr schwachen Voraussetzungen

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{x}_{N(L)}(L) = x$$

ist, d. h. daß  $\tilde{x}_{N(L)}(L)$  "numerisch konvergiert".

PĂVĂLOIU, I.:

Über iterative Verfahren mit Konvergenzordnung  $k \geq 2$

In der Arbeit wird die Konvergenz einiger iterativer Verfahren für die Lösung der Operatorgleichung der Form:

$$(1) \quad P(x) = \Theta,$$

wobei  $P$  ein auf dem Banach-Raum  $X$  definierter Operator mit Werten in dem linearen normierten Raum  $Y$  ist, untersucht.  
Es sei

$$(2) \quad x_{n+1} = Q(x_n), \quad x_0 \in X, \quad n = 0, 1, \dots$$

ein iteratives Verfahren, wobei  $Q$  ein auf  $X$  definierter Operator mit Werten in  $X$  ist. Wir nehmen an, daß jede Lösung  $x$  der Gleichung (1) ein Fixpunkt des Operators  $Q$  ist. Mit dieser Voraussetzung definiert man die Konvergenzordnung des Verfahrens (2) in folgender Weise:

Definition:

Genügen  $x_0 \in X$ , der Operator  $Q$  und die reelle nichtnegative Zahl  $\varrho$  den Bedingungen:

$$a) \quad \|P(x_{n+1})\| \leq \varrho \cdot \|P(x_n)\|^k, \quad n = 0, 1, \dots$$

wobei  $k \geq 2$  eine natürliche Zahl ist

$$b) \quad \varrho^{\frac{1}{k-1}} \|P(x_0)\| < 1,$$

so sagen wir, das iterative Verfahren (2) habe die Konvergenzordnung  $k$ .

Von dieser Definition ausgehend, wird eine Klassifizierung der iterativen Verfahren nach ihren Konvergenzordnungen durchgeführt, und es werden die Konvergenzbedingungen für diese Verfahren untersucht.

Es wird ein allgemeiner Konvergenzsatz für das Verfahren (2) angegeben, aus welchem die Resultate für das Newtonsche und

Tchebyscheffsche iterative Verfahren folgen. Die oben gegebene Definition erlaubt uns, die Konvergenzordnung des Steffensenschen Verfahrens ohne die Differenzierbarkeitsvoraussetzung der Operatoren  $P$  und  $Q$  zu charakterisieren. Die Resultate werden durch ein Beispiel veranschaulicht.

SCHABACK, R.:

Anwendungen der konvexen Optimierung auf Approximationstheorie und Spline-Funktionen

Ausgehend von einem topologischen Raum  $R$  und einer konvexen stetigen Funktion  $f$  auf  $R$  werden Charakterisierungssätze für Minima von  $f$  auf konvexen Mengen  $U \subset R$  gesucht. Man erhält durch Einführung von nicht notwendig endlich vielen konvexen und affin-linearen Restriktionen Verallgemeinerungen von Sätzen des Kuhn-Tucker-Typs. Dabei brauchen die Zielfunktion  $f$  und die Restriktionen nicht differenzierbar zu sein. Als Anwendungen ergeben sich

- 1) normunabhängige Charakterisierungssätze der linearen Approximationstheorie unter konvexen und affin-linearen Restriktionen
- 2) Charakterisierungssätze für Spline-Funktionen unter allgemeinen konvexen und affin-linearen Nebenbedingungen in Räumen mit Gateaux-differenzierbarer Norm
- 3) hinreichende Charakterisierungen aus der Control-Theorie (Maximumprinzip, adjungierte Gleichung, Transversalitätsbedingungen).

Schließlich wird das Verfahren der Schnittebenen allgemein formuliert und zur Berechnung von besten linearen Approximationen unter Restriktionen bei nicht notwendig erfüllter Haar'-

scher Bedingung sowie zur Konstruktion von Spline-Funktionen in  $L^p$ - oder Hilberträumen unter nicht notwendig endlich vielen konvexen und affin-linearen Restriktionen herangezogen.

SCHOCK, E.:

Über die Approximationsgüte bei projektiven Verfahren

Ein projektives Verfahren der Klasse  $P$  zur Lösung der linearen Gleichung  $Lx = y$  besteht in der Bestimmung eines  $z \in E_n := \text{spann} \{ z_1, \dots, z_n \}$ , das das lineare Gleichungssystem

$$a_j(Lx - Lz) = 0$$

mit linearen Funktionalen  $a_1, \dots, a_n$  erfüllt (Galerkin-, Kollokationsverfahren, Orthogonalitätsmethode, Teilbereichsmethode...). Die Abbildung  $P_n : x \rightarrow z$  ist dann eine Projektion. Bezeichnet man mit  $dp_n(B_L) = \sup \{ \|x - P_n x\|, x \in B_L \}$  den Projektionsdurchmesser von  $B_L := \{ x \in E, \|Lx\| \leq 1 \}$ , so gilt: Ist  $\lim dp_n(B_L) = 0$ , so ist  $L^{-1}$  kompakt. Ist  $L^{-1}$  vom Typus  $l^p$  ( $p > 0$ ), so gibt es Projektionen  $P_n$  auf  $n$ -dimensionale Teilräume  $E_n$  von  $E$  mit  $\sum (n+1)^{-p} dp_n(B_L)^p < \infty$ .

Ein projektives Verfahren der Klasse  $Q_\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  zur Lösung der linearen Gleichung  $x - Tx = y$  besteht in der Bestimmung eines  $x_n := \sum_{j=0}^{\nu-1} T^j y + z$ , so daß  $z \in E_n$  das Gleichungssystem

$$a_j(z - Tz - T^\nu y) = 0 \quad (*)$$

erfüllt. Der durch  $(*)$  definierte Operator, der  $y$  die Lösung  $z$  zuordnet, werde mit  $S_{\nu, n}$  bezeichnet. Ist  $S_\nu$  die Quasiinverse von  $T$  der Stufe  $\nu$ , definiert durch  $(I - T) \left( \sum_{j=0}^{\nu-1} T^j + S_\nu \right) = I$ , so gilt:

Ist  $T$  vom Typus  $l^p$ , so gibt es Teilräume  $E_n$  und Abbildungen

$S_{v,n} : E \rightarrow E_n$ , so daß gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (n+1)^{-p/\nu} \|S_{\nu} - S_{\nu,n}\|^{p/\nu} < \infty.$$

SCHÄFKE, F.W.:

Zur Abschätzung der Eigenwerte positiver Operatoren

Bei zugleich starker Vereinfachung der Herleitung läßt sich das von H.H. Schaefer, Numer. Math. 15, 219-223 (1970) gewonnene Resultat wesentlich verbessern:

Die Eigenwerte  $\sigma \neq 1$  einer zeilenstochastischen Matrix lassen sich

$$|\sigma| \leq \min(M - 1, 1 - \mu)$$

abschätzen, wo  $M$  bzw.  $\mu$  die Summe der Spaltenmaxima bzw. -minima ist.

SCHWANENBERG, P.:

Intervallanalytische Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die Lösung einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung bei speziellen Randbedingungen wird auf die Lösung einer zugeordneten Anfangswertaufgabe zurückgeführt, die als System von  $n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung dargestellt wird. Für eine Anfangswertmenge  $W \subset \mathbb{R}^n$  wird mittels einer Matrizantenmenge das Verhalten der zugehörigen Lösungskurven erfaßt. Für ein Ersatzproblem im  $\mathbb{R}^m$  ( $m \leq \frac{n}{2}$ ) werden eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage angegeben, die mittels einer Rechenanlage verifiziert werden können. Mit Hilfe eines Iterationsverfahrens er-

hält man eine schärfere Lösungseinschließung.

Die Intervallanalyse ist hierbei Hilfsmittel, um beim Rechnen auf einer DV-Anlage die Rundungsfehler zu erfassen, zum anderen stellt sie analytische Methoden für theoretische Aussagen bereit.

STEINHAUSEN, D.:

Fehlerschranken vom Gerschgorintyp für das Eigenwertproblem bei nichtnormalisierbaren Matrizen

Zum Eigenwertproblem  $Ax = \lambda y$  der komplexen  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit beliebigen Elementarteilern seien Näherungen für die Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren bekannt. Es werden mit Hilfe der Gerschgorin-Sätze Fehlerschranken für die Größen  $|\lambda_1 - \mu_1|$ ,  $\|y^1 - x^1\|_\infty$  hergeleitet, wobei  $\lambda_1$ ,  $y^1$  exakte und  $\mu_1$ ,  $x^1$  genäherte Größen sind. Unter der Voraussetzung der Trennungsrelation:

$$(1) \quad |\mu_1 - \mu_1| > \epsilon^{1/p^*} \max(\|X^{-1}\|_\infty, 1 + \epsilon^{1/p^*} \|X^{-1}\|_\infty) + \epsilon^{1/p_1} \max(\|X^{-1}\|_\infty, 1 + \epsilon^{1/p_1} \|X^{-1}\|_\infty), \quad 1 \geq r_1$$

gilt für den Eigenwert  $\lambda_1$  von  $A$  die Abschätzung:

$$(2) \quad |\mu_1 - \lambda_1| \leq \epsilon^{1/p^*} \max(\|X^{-1}\|_\infty, 1 + \epsilon^{1/p^*} \|X^{-1}\|_\infty).$$

Die Komponenten eines Eigenvektors  $y$  zu  $\lambda_1$  von  $A$  lassen sich einschließen

$$(3) \quad \|y - x^1\|_\infty \leq \|X\|_\infty \max_{i \neq 1} (|z_i|),$$

falls die Komponenten  $|z_i| \leq 1$  sind.

Die Größen  $|z_i|$  sind von der Größenordnung  $\epsilon^{1/p^*}$ .

Hierbei ist  $X$  die Matrix, in deren Spalten die Eigen- bzw.

Hauptvektoren stehen,  $\epsilon := \|AX - X\tilde{J}\|_\infty$ ,  $\tilde{J}$  genäherte Jordannormalform,  $p_1$  Elementarteilergrade,  $p^*$  der größte zum Eigenwert  $\lambda_1$  gehörende Elementarteilergrad,  $r_1 =$  Vielfachheit von  $\lambda_1$ .

STETTER, H.-J.:

Lokale Schätzung des globalen Diskretisierungsfehlers bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Ein Ergebnis von Butcher (Dundee, 1969) impliziert, daß es für gewisse RK-Verfahren möglich sein muß, den Wert von  $e(t)$  in der asymptotischen Entwicklung der Differenzenlösung  $p$  ist die Ordnung des Verfahrens)

$$\eta(t, h) = y(t) + h^p e(t) + O(h^{p+1})$$

aus dem Wert  $y(t)$  zu berechnen, obwohl  $e$  Lösung des Differentialgleichungssystems

$$(E) \quad e'(t) = f'(y(t))e(t) + \varphi(y(t)), \quad e(0) = e_0$$

ist, wo  $\varphi$  die "principal error function" des Verfahrens ist. (o.B.d.A. betrachten wir nun autonome Systeme  $y' = f(y)$ .) Falls jedoch  $\varphi$  die Struktur

$$\varphi(\xi) = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \left[ F_{\lambda}^{(p)}(\xi) f(\xi) - f'(\xi) F_{\lambda}^{(p)}(\xi) \right] \quad \text{hat und}$$
$$e_0 = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} F_{\lambda}^{(p)}(y_0)$$

ist, dann ist (E) ein exaktes System von Differentialgleichungen mit der Lösung  $e(t) = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} F_{\lambda}^{(p)}(y(t))$ , so daß  $e(t)$  wirklich nur von  $y(t)$  abhängt. Die  $F_{\lambda}^{(p)}$  sind hier die "elementary differentials" der Ordnung  $p$  von  $f$ . Diese Einsicht in die analytische Bedeutung des Butcher'schen Vorgehens gestattet die Übertragung auf Predictor-Corrector-Multischrittverfahren. Die Berechenbarkeit einer Näherung für  $e(t)$  sollte für eine effektivere Schrittweitensteuerung von Wichtigkeit sein.

STUMMEL, F.:

Diskrete Approximationen linearer Gleichungen und Eigenwertaufgaben

Der Vortrag soll im Anschluß an Arbeiten von AUBIN, CÉA, GRIGORIEFF, PETRYSHYN, STUMMEL über Theorie und Anwendungen sogenannter diskreter Approximationen berichten. Die Grundlage hierfür bildet eine neue, verallgemeinerte Störungstheorie linearer Operatoren in normierten Räumen, die anschließend kurz umrissen wird.

Die übliche Störungstheorie betrachtet etwa Folgen von Abbildungen von einem normierten Raum  $E$  in einen normierten Raum  $F$ . Die Verallgemeinerung besteht darin, auch die Räume  $E, F$  durch Folgen normierter Räume  $E_i, F_i, i = 1, 2, \dots$ , in möglichst allgemeiner Weise zu approximieren. Damit erhält man diskrete Approximationen normierter Räume und den Begriff der diskreten Konvergenz. Diese so erweiterte Theorie enthält neben der klassischen Störungstheorie für stark konvergente Operatorfolgen die funktionalanalytischen Methoden zur Behandlung wichtiger Näherungsverfahren der Analysis wie Projektionsmethoden, Differenzenapproximationen, Quadraturformelverfahren, Kollokationsverfahren usw.. Ebenso kann man in diesem Rahmen die Konvergenz der Lösungen von Rand- und Anfangswertaufgaben partieller Differentialgleichungen bei Störung nicht nur der Koeffizienten und inhomogenen Terme sondern auch des Grundgebietes und des Randes zeigen.

WACKER, H.:

Konstruktion von Iterationsketten und Auftreten von Verzweigungen

In einem Banachraum sei eine nichtlineare Operatorgleichung mit vollstetigem  $A$  gegeben:  $y = Ay$  (1). Um einen Fixpunkt  $Y$  von  $A$  zu bestimmen, erweitert man (1) zunächst zu einer Problemfamilie:  $y(s) = A(s, y)$  (2). Dabei ist

$s \in [0,1]$ ,  $A(1,y) = A(y)$  und (2) sei für  $s = 0$  einfach lösbar. Zu einer endlichen streng monotonen Folge  $(s_n)$  berechnet man die zugehörigen  $Y_n$ . Dabei kann  $Y_1$  als Näherung für  $Y_{i+1}$  benutzt werden.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Ketten werden hergeleitet. Es läßt sich eine Schrittweite  $(\Delta s)_0$  angeben, welche die Anwendbarkeit des Newtonverfahrens garantiert. Der Fall, daß die Kette nicht fortsetzbar ist oder sich Lösungen abspalten, wird mit Hilfe der Riesz-Theorie behandelt. Numerische Erfahrungen liegen für spezielle Problemklassen in größerem Umfange vor.

WERNER, J.:

Nichtnegative Lösungen nichtlinearer Randwertaufgaben

Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen eine periodische Randwertaufgabe der Form  $(*) \dot{x} = A(t)x + \lambda B(x,t)x$ ,  $x(0) = x(\omega)$  nichttriviale, nichtnegative Lösungen besitzt. Eine Umformung in eine Integralgleichung mit positivem Kern ist möglich, wenn  $A(t)$  quasipositiv (d.h.  $a_{ij}(t) \geq 0$  für  $i \neq j$ ) und nicht zerfallend ist und der Spektralradius der Monodromiematrix  $Y(\omega)$  kleiner als 1 ist:  $\rho(Y(\omega)) < 1$ . Neben der Stetigkeit von  $B(x,t)$  wird  $B(x,t) \geq B \geq 0$  mit nichtzerfallendem  $B$  vorausgesetzt. Dann gilt:  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$  derart, daß  $(*)$  eine nichttriviale, nichtnegative Lösung besitzt. Der Beweis benutzt den Satz von KREIN-RUTMAN. Setzt man zusätzlich  $B$  als monoton fallend voraus, so kann gezeigt werden, daß ein Intervall  $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$  derart existiert, daß zu  $\lambda \in \Lambda$  eine nichtnegative, nichttriviale Unterlösung  $\alpha$  und eine Oberlösung  $\beta$  zu  $(*)$  existiert mit  $\alpha \leq \beta$ . Unter zusätzlichen Annahmen kann gezeigt werden, daß zwischen der Unterlösung  $\alpha$  und der Oberlösung  $\beta$  mindestens eine Lösung zu  $(*)$  existiert. Als Beispiele werden Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Randbedingungen gegeben. Eine Übertragung auf andere Randwertaufgaben ist möglich.

WETTERLING, W.:

Einschließung von Eigenelementen

Ein streng monotoner vollstetiger linearer Operator  $A$  in einem halbgeordneten Banachraum  $R$  hat nach KREIN und RUTMAN einen dominanten positiven Eigenwert  $\lambda$  mit positivem Eigenelement  $y$ . Die Einschließung des Eigenwertes gelingt nach einer Verallgemeinerung des Quotientensatzes von COLLATZ. Es wird gezeigt, daß unter einigen zusätzlichen Bedingungen auch eine Einschließung des Eigenelements  $y$  möglich ist. Hierzu wird gezeigt, daß ein passendes Intervall durch den Operator  $T$ , wo  $Tx = Ax/|Ax|$  ist, in sich abgebildet wird; hier ist  $|\cdot|$  eine durch eine Ordnungseinheit induzierte Norm auf  $R$ . Die Methode wird an Eigenwertproblemen bei Differential- und Integralgleichungen erläutert.

V. Rathscheck (Hamburg)

R. Runge (Münster)