MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 40/1970

Geometrie

22.11. bis 28.11. 1970

Die diesjährige Geometrietagung stand wieder unter der Leitung von K.H. Weise (Kiel) und K. Leichtweiß (Stuttgart). Die große Zahl der Teilnehmer und nicht zuletzt die Zahl der angemeldeten Vorträge bewies wieder einmal die Aktualität geometrischer Forschung.

Die Vortragsthemen gaben einen eindrucksvollen Überblick über die gegenwärtigen Entwicklungstendenzen verschiedener geometrischer Disziplinen. Differentialtopologie, algebraische Geometrie, Liniengeometrie, Kinematik, Beiträge zur Theorie der konvexen Körper sowie projektive und klassische Differentialgeometrie waren die tragenden Pfeiler eines massiven Brückenbogens, der heutzutage die geometrische Forschung überspannt und zusammenhält.

<u>Teilnehmer</u>

St. Bilinski, Zagreb (Jugoslawien)
W. Böhm, Braunschweig
G. Bol, Freiburg
H. Brauner, Wien (Österreich)
W. Burau, Hamburg
H.E. Debrunner, Bern (Schweiz)
W. Degen, Stuttgart
R.Z. Domiaty, Graz (Österreich)
G. Ewald, Bochum
A. Florian, Salzburg (Österreich)
H. Florian, Graz (Österreich)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. Frank, Freiburg
O. Giering, Karlsruhe
W. Grimm, Karlsruhe
W. Gröbner, Innsbruck (Österreich)
K.P. Grotemeyer, Bielefeld
E. Heil, Darmstadt
W. Henke, Köln
J. Hoschek, Darmstadt
H. Huck, Berlin
Reinhild Jürgensen, Kiel
H. Karcher, Bonn
G. Kastner, Darmstadt
B. Kind, Bochum
P. Kirsche, Freiburg
E. Kreyszig, Düsseldorf
R.S. Kulkarni, Bonn
D. Laugwitz, Darmstadt
P. Mani, Hünibach (Schweiz)
F. Münzner, Bielefeld
R. von Randow, Köln
H. Reckziegel, Aachen
H. Reitberger, Innsbruck (Österreich)
E.J. Rettel, Stuttgart
R. Roitzsch, Berlin
H. Sachs, Stuttgart
R. Schneider, Berlin
U. Simon, Berlin
J. Tölke, Stuttgart
D. Treiber, Köln
H. Viesel, Karlsruhe
W.O. Vogel, Karlsruhe
O. Volk, Würzburg
W. Vortisch, Berlin
K. Voss, Zürich (Schweiz)

R. Walden, Berlin
B. Wegner, Berlin
W. Wendland, Darmstadt
T.J. Willmore, Durham (England)
R. Wodicka, Aachen

Vortragsauszüge

ST. BILINSKI: Über die Ptolemäischen Funktionen der Zweiindizesfiguren

Eine "Figur" wird definiert als eine diskrete geordnete Menge von Elementen einer gegebenen Mannigfaltigkeit. Es werden "Zweiindizesfiguren" betrachtet, und für diese eine "Ptolemäische Funktion" definiert als jene Funktion zweier Indizes a_{ij}, bei welcher für jeden zugelassenen Indizesquadrupel die "Ptolemäische Relation" $a_{ij}a_{kl}+ a_{ik}a_{lj}+ a_{il}a_{jk} = 0$ gültig ist. Die Werte einer Ptolemäischen Funktion bilden eine "Ptolemäische Matrix", d.h. eine schiefsymmetrische Matrix vom Rang 2. Als Ptolemäische Funktion des Simplexes erweist sich sein Inhalt. Daraus ergeben sich als Spezialfälle eine Reihe "Ptolemäischer Sätze", und zwar für n=1,2,3 und 4. der Reihe nach die Sätze von L. Euler (1748), G. Monge (18o9), A. Möbius (1827), N.A. Lapteva (1964). Es werden von diesem allgemeinen Standpunkt aus auch mehrere andere bekannte und neue scheinbar ganz unabhängige Sätze der Elementargeometrie betrachtet.

G. BOL: Zur metrischen Differentialgeometrie der Geradenkongruenzen

Ein vereinfachter Aufbau der Theorie der zweiparametrigen Geradensysteme im euklidischen R^3 mit reellen Brennflächen nach S. Finikow wurde dargelegt. Es wurde eine Theorie der Geradenkongruenzen vorgeführt, bei der sich die Invarianten besser geometrisch deuten lassen und die Integrierbarkeitsbedingungen einfachere Gestalt annehmen. Weiters wurden nicht nur die Eigenschaften der Fokalflächen, sondern auch die der Fokalkurven herangezogen. Erwähnt sei hier nur die für jede Kongruenz der betrachteten Klasse mit nicht ausgearteten Fokalflächen gültige Relation $g^2K_1K_2 = w_1w_2$, in der g den Grenzpunktsabstand eines Strahls, K_1 und K_2 die Gaußschen Krümmungen der zugehörigen Stellen der Fokalflächen und w_1, w_2 die Windungen der Fokalkurven bedeuten.

W. BURAU: Über quadratische Geradenkomplexe des P_3 und ihre Verallgemeinerungen unter Benutzung mehrdimensionaler Hilfsmittel

Nach einigen einleitenden Erläuterungen über die V_n^t und die Graßmannschen $G_{n,k}$ wird das mit $G_{n,k}^t$ bezeichnete V^t-Bild der $G_{n,k}$ eingeführt und folgendes definiert: Diejenigen Räume $X_k < X_n$, deren Bildmenge durch einen hyperebenen Schnitt aus der $G_{n,k}^t$ ausgeschnitten wird, bilden einen X_k-Komplex t-ten Grades des X_n. Enthält diese Hyperebene den Tangentialraum $T_{(n-k)(k+1)}$ (P_o) an die $G_{n,k}^t$ im Punkte P_o, so sagt man, der Komplex ist in dem auf P_o abgebildeten Raum A_k stark singulär. In der Spezialisierung auf den Fall n=3, k=1, t=2 haben wir dann die den $\langle G_{3,1}^2 \rangle_{19} = A_{19}$ aufspannende $G_{3,1}^2$ als Teilmenge des $\langle V_5^2 \rangle_{20}$ zu betrachten. Im Punkt $P_o \in G_{3,1}^2$ hat man dann den Tangentialraum T_4 (P_o) zu betrachten. $P_{18} < A_{19}$, die T_4 (P_o) enthalten, definieren einen Komplex mit stark singulärer Geraden g_1, deren Bild P_o ist. In T_4 (P_o) liegt noch ein ausgezeichneter Tangentialkegel Q_3 mit Spitze P_o. Wenn P_{18} zwar nicht T_4 (P_o) enthält, wohl aber Q_3 speziell schneidet, so heißt g_1 schwach singulär für den Komplex. Es wird ferner noch darauf hingewiesen, daß die quadratischen Komplexe von X_1 des X_n auch den, die Veronesesche V_n^2 enthaltenden Quadriken bijektiv zugeordnet werden können, was schon auf Reye (1879) zurückgeht.

H.E. DEBRUNNER: Der Hellysche Satz in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Ist eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n von einer Familie offener konvexer Teilmengen überdeckt, so läßt sich eine Teilfamilie mit k oder weniger Mengen finden, deren ge-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

meinsamer Durchschnitt leer ist; für Homotopiesphären gilt diese Aussage mit $k = n+2$, für jede andere geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $k = n+1$.
Ebenso gilt die nachfolgende Verallgemeinerung des Hellyschen Satzes für Homotopiesphären mit $k = n+2$, für alle übrigen (offenen oder geschlossenen) Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit $k = n+1$: Hat eine endliche Familie offener konvexer Teilmengen einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit die Eigenschaft, daß je k Mengen der Familie einen Punkt gemeinsam haben, so gibt es einen Punkt, der allen Mengen der Familie angehört.

R.Z. DOMIATY: <u>Metrische Räume mit einer Elementarlänge</u>

Unter einem metrischen Raum mit einer Elementarlänge versteht man einen metrischen Raum, dessen Metrik nur nicht-negative ganze Zahlen annehmen kann. (R,d) sei ein solcher Raum. Es wurde der Versuch unternommen, in einem derartigen Raum eine innere Metrik zu konstruieren. Dazu waren im wesentlichen drei Schritte notwendig: Erstens hat man die Zuordnung einer Topologie zu (R,d) zu verallgemeinern. Zweitens hat man den Bogenbegriff etwas zu modifizieren (dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten) und drittens den Begriff der Bogenlänge zu diskretisieren.

A. FLORIAN: <u>Integrale auf konvexen Polyedern</u>

Es sei im dreidimensionalen euklidischen Raum V ein konvexes Polyeder mit gegebenem Volumen v und gegebener Eckenzahl e, O ein beliebiger (fester) Punkt des Raumes und $g(x)$ eine in $x \geq 0$ monoton abnehmende Funktion. ABC sei das Basisdreieck des Tetraeders $OABC = T$ mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$ bei A und $\frac{\pi}{2}$ bei B, OA normal auf der Ebene von ABC, $\frac{v}{12(e-2)}$ das Volumen von T und $\frac{4\pi}{12(e-2)}$ der räumliche Winkel bei O. Dann gilt

$$\int_V g(OX)\, dv \leq 12(e-2) \int_T g(OX)\, dv$$

mit Gleichheit für die drei regulären Dreieckpolyeder mit dem Zentrum O. Falls g streng monoton ist, tritt Gleichheit nur in diesem Fall ein. Der Satz stellt ein räumliches Analogon eines von

L. Fejes Tóth für Flächen konstanter Krümmung bewiesenen "Momentenlemmas" dar, das vielgestaltige Anwendungen gestattet.

O. GIERING: Verallgemeinerung eines Satzes von Jacobi und Scherrer

Nach C.G.J. Jacobi (Ges. Werke, Bd. 7, S.39) hälftet das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Raumkurve die Einheitssphäre. W. Scherrer hat die Voraussetzungen präzisiert, unter denen dieser Satz des dreidimensionalen euklidischen Raumes in der Fassung von Jacobi gilt und unter denen er allgemeiner gilt. Allgemein umschließt das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Raumkurve ein natürliches Vielfaches der halben Oberfläche der Einheitssphäre. Dieser Satz wird auf das Zentralnormalenbild geschlossener windschiefer Flächen verallgemeinert. Das Zentralnormalenbild entspricht bekanntlich in der Kruppaschen Strahlflächentheorie dem Hauptnormalenbild der gewöhnlichen Kurventheorie.

W. GRIMM: Über Flächen mit zwei Scharen kubischer Asymptotenlinien

Zweisinnige Komplexflächen gestatten nach K. Strubecker die Quaternionendarstellung $x(u,v)=p(u)q(v)$, wobei $p(u)$ und $q(v)$ den linearen Komplexen $p_{03} \pm p_{12}=0$ angehören. Wählt man speziell für $p(u)$ und $q(v)$ kubische Raumkurven dieser Komplexe, so erhält man die Flächen mit zwei Scharen kubischer Asymptotenlinien. Es ergeben sich rationale algebraische Flächen $x_i = \varphi_i(u_o, u_1, u_2)$, wobei die φ_i homogene Formen vom Grad 6 sind. Mit Hilfe der Quaternionendarstellung und klassischen Sätzen über Linearsysteme ergeben sich Aussagen über deren Ordnung, die im allgemeinen 18 ist, aber durch das Vorhandensein von Nullteilern in der Quaternionenalgebra reduziert werden kann. Es werden bekannte Flächen in die allgemeine Theorie eingeordnet und neue Flächen konstruiert.

W. GRÖBNER: Der Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie

Grundsätzliche Bedeutung des Multiplizitätsbegriffes, insbesondere für den Bezoutschen Satz. Die Definitionen von Macaulay l(q) und Samuel e(q)wurden gegeben. Beide erfüllen den speziellen Bezoutschen Satz, aber nicht den allgemeinen. Es werden Formeln mitgeteilt, welche die effektive Berechnung der Samuelschen Multiplizität ermöglichen; so kann gezeigt werden, daß in den Fällen, wo $l(q)$ mit Rücksicht auf den Bezoutschen Satz zu groß ist, was vor 30 Jahren zur Verwerfung des Macaulayschen Begriffes und zur Einführung des Samuelschen geführt hat, immer $e(q) > l(q)$ ist, also der Samuelsche Begriff noch weniger genügt.

Eine zweite Unterscheidung betrifft statische und dynamische Multiplizitäten: bei den letzteren wird nach Severi der spezielle Fall als Grenzfall eines allgemeinen Falles betrachtet. Da unter allgemeinen Bedingungen der Bezoutsche Satz immer erfüllt ist, bleibt er dann auch im Grenzfall gültig. Aber hier genügt jeder beliebige Multiplizitätsbegriff, der nur jedem "einfachen" Schnittpunkt die Multiplizität 1 zuordnet.

Eine bisher noch nicht beachtete Unterscheidung betrifft Schnittmultiplizitäten und Basismultiplizitäten: Es zeigt sich, daß für die ersten die Macaulaysche Definition paßt, für die zweiten dagegen die Samuelsche Definition.

W. HENKE: Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter positiver Krümmung in euklidischen Räumen der Kodimension 2

Sei $f: M \to \tilde{M}$ eine riemannsche C^∞-Immersion, dim $M=m$, dim $\tilde{M}=m+k$. Dann existiert genau eine Funktion $\varkappa: M \to \mathbb{R}$, die "mittlere Krümmung von f", mit $\varkappa(p) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{k} (\mathrm{Spur}\ S_{n_i})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ für alle $p \in M$ und jede Orthonormalbasis $(n_1, \ldots, n_k)$ von $(f_* T_p M)^\perp$, (S:= zweiter Fundamentaltensor von f). Nimmt man an, daß M konstante riemannsche Krümmung 1 besitzt und daß $\tilde{M} = \mathbb{R}^{m+k}$, dann gilt $\varkappa \geq 1$. $p \in M$ heiße "sphärischer Punkt von f" genau dann, wenn $\varkappa(p) = 1$. Folgende Sätze können bewiesen werden

Satz 1: Sei $m \geq 4$, M eine m-dimensionale riemannsche C^∞-Mannigfaltigkeit von konstanter riemannscher Krümmung 1 und sei $f: M \to \mathbb{R}^{m+2}$ eine riemannsche C^∞-Immersion ohne sphärischen Punkt. Dann gilt:

(i) Es existiert genau eine (m-1) - dimensionale C^∞-Blätterung L von M, sodaß für jedes Blatt B von L f(B) offene Teilmenge einer euklidischen (m-1)-Sphäre im $\mathbb{R}^{m+2}$ ist.

(ii) Ist B ein Blatt von L, so berührt f längs B eine euklidische m-Sphäre der riemannschen Krümmung 1 im $\mathbb{R}^{m+2}$ von mindestens erster Ordnung.

(iii) Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß M offene riemannsche C^∞- Untermannigfaltigkeit von S^m $(\subset \mathbb{R}^{m+1})$ ist, ist jedes Blatt B von L offene Teilmenge einer (in S^m gelegenen) euklidischen (m-1)-Sphäre im $\mathbb{R}^{m+1}$ und f bildet B starr in den $\mathbb{R}^{m+2}$ ab.

<u>Satz 2:</u> Sei $m \geq 4$ und sei $f: S^m \to \mathbb{R}^{m+2}$ eine riemannsche C^∞- Immersion. Dann besitzt f mindestens zwei sphärische Punkte.

Satz 1 ist ein Analogon zu dem bekannten Blätterungssatz für riemannsche C^∞- Immersionen einer m-dimensionalen flachen riemannschen C^∞-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{m+1}$ ohne Flachpunkt. Satz 2 ist ein globales Resultat.

J. HOSCHEK: <u>Regelflächen im Großen</u>

Eine windschiefe Regelfläche im dreidimensionalen euklidischen Raum soll geschlossen heißen, wenn für ihre Parameterdarstellung gilt $\mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{x}(u+L,v)$ mit u als Bogenlänge und L als Länge der Striktionslinie. Ist die Striktionslinie konvex und Krümmungslinie, so gelten Vierscheitelsätze für die ganze natürliche Krümmung, polare Krümmung, geodätische Krümmung und Normalkrümmung der Striktionslinie. Übertragung in die scherungsaffine Geometrie führt auf einen Vierscheitelsatz für K' - T (mit K als affiner Krümmung, T als affiner Torsion). Über geeignet definierte Parallelregelflächen und Regelflächen konstanter Breite lassen sich im Bereich der Regelflächen Verallgemeinerungen der Formeln von Steiner und Barbier finden. Für windschiefe Böschungsflächen gilt ein Vierscheitelsatz auch bei nichtkonvexer Striktionslinie für den Abstand A der Momentanachse der Bewegung des Kruppa-Dreibeins. Für konvexe windschiefe Böschungsflächen können die Ergebnisse von Hayashi und Süss verallgemeinert werden.

H. KARCHER: <u>Über Shikatas Abstand zwischen differenzierbaren Strukturen</u>

Es seien M,M' kompakte, homöomorphe, differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Riemannschen Metriken ϱ, ϱ' und es bezeichne $f: M \to M'$ Homöomorphismen. $L(f; \varrho, \varrho') := \inf \{ k \geq 1; \bigwedge_{x,y \in M} \frac{1}{k} \varrho(x,y) = \varrho'(f(x), f(y)) \leq k \varrho(x,y) \}$ $= L(f^{-1}; \varrho', \varrho)$, d.h. L ist Lipschitzkonstante für f und f^{-1} bezüglich der Metriken ϱ, ϱ'. Falls f diffeomorph ist, so ist $L(f; f_* \varrho', \varrho') = 1$. $d(M,M') := \inf_f \inf_{\varrho, \varrho'} L(f; \varrho, \varrho')$ ist daher ein Pseudoabstand. Das Resultat Shikatas : $d(M,M') < \frac{1}{(n!)^n} \Longrightarrow$ M diffeomorph M' wird verbessert auf : $d(M,M') < \frac{1}{3n^2} \Longrightarrow$ M diffeomorph M'. Eine Beweisskizze und eine Anwendung auf das differentiable Pinching Problem wird gegeben.

B. KIND: Einbettung einer kompakten Untermannigfaltigkeit des R^n in eine konvexe Hyperfläche

Es wurde der Beweis des folgenden Satzes skizziert:

Voraussetzung: Sei M eine m-dimensionale kompakte C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $k \geq 2$ und $a: M \to S^{n-1}$ eine C^k-Abbildung, mit:

(i) $\langle a(x), y-x \rangle < 0 \quad \forall\, x,y \in M,\ x \neq y$

(ii) für jeden C^2-Weg $\varphi: I \to M$ mit Bogenlänge s gilt: $\langle a \circ \varphi(s), D^2 \varphi(s) \rangle < 0 \quad \forall\, s$

Behauptung: Es existiert eine (n-1)-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit:

(i) M ist differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N

(ii) N ist lokal konvex mit Gaußkrümmung $\neq 0$

(iii) es existiert $\bar{a}: N \to S^{n-1}$ (Flächennormale) mit $\bar{a}|_M = a$ und $\langle a(x), y-x \rangle < 0 \quad \forall\, x,y \in N,\ x \neq y$.

P. KIRSCHE: Zur Möbiusgeometrie der Kreiskongruenzen

Es wurden Kreiskongruenzen mit Methoden der Möbiusgeometrie sowie den Methoden der projektiven Differentialgeometrie im P_4 behandelt. Die Aufgabe bestand darin, die Kreiskongruenzen zu klassifizieren sowie die Geometrie ihrer Brennflächen zu untersuchen. Das wesentliche Hilfsmittel für die Klassifikation ist der Kommerellkegelschnitt. An einer festen Stelle der Kongruenz ist dieser definiert als der geometrische Ort der Schnittpunkte der Kreisebene an dieser

Stelle mit ihren infinitesimal benachbarten. Zu den Brennflächen wurden begleitende Kugelscharen konstruiert. Ferner wurden auf den Brennflächen, Torsallinien, Krümmungslinien, verallgemeinerte Asymptotenlinien sowie Geodätische eingeführt. Den Schluss bildet ein Hinweis auf die Behandlung von Kreiskongruenzen mit ausgearteten Brennflächen.

R.S. KULKARNI: Curvature Structures

We develop a general theory of curvature structures. Examples of curvature structures range from Riemann curvature tensor and its higher order generalizations, Ricci tensor, 2 nd fundamental form of a hypersurface, conformal curvature tensor etc. Main ideas are already in the papers:

1. Curvature and Metric. Annals of Math. vol 91 (2), March 1970
2. Curvature structures and conformal transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 91 - 94

D. LAUGWITZ: Messung von Kontingenzwinkeln

Der Begriff "Kontingenzwinkel" tritt schon bei Euklid auf: Winkel zwischen einander berührender Kurven. Das Problem, ob man diesen Winkeln als geometrischen Figuren "Maße" zuordnen kann hat eine lange Geschichte. Man kann das, wenn man den Wertebereich der Maße als eine abelsche Gruppe G ansieht. Es werden dafür die additiven Gruppen von gewissen angeordneten Körpern herangezogen, deren Elemente verallgemeinerte Potenzreihen sind. Die Isomorphie solcher Maße kann bewiesen werden.

P. MANI: Automorphismen von polyedrischen Graphen

Zu jedem konvexen dreidimensionalen Polyeder $P \subset E^3$ gibt es ein kombinatorisch isomorphes konvexes Polyeder $Q \subset E^3$ so, daß jeder kombinatorische Automorphismus des Randkomplexes ∂Q durch eine Deckisometrie von Q induziert wird.

F. MÜNZNER: Hyperflächen mit konstanten Hauptkrümmungen in Sphären

Cartan (Oeuvres complètes III, vol. 2, S. 1431 - 1492, 1513 - 1530) untersuchte diejenigen Hyperflächen in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung $K = \pm 1$, bei denen die Invarianten der 2. Grundform II relativ zur 1. Grundform I konstant sind. Während sich im Fall $K = -1$ analoge Resultate ergeben wie beim entsprechenden Problem in euklidischen Räumen - u.a. besitzt II bezüglich I höchstens zwei Eigenräume und die Hyperflächen lassen sich explizit angeben, treten im Fall $K = +1$ auch Hyperflächen auf, bei denen II bezüglich I mehr als zwei Eigenräume besitzt. Es ergibt sich folgender Struktursatz

Satz: Es sei $M \subset S^n$ eine Hyperfläche mit konstanten Hauptkrümmungen. k_α $(\alpha = 0, \ldots, p-1)$ seien die auftretenden Werte der Hauptkrümmungen und μ_α die Vielfachheit von k_α. Dann gilt:

(1) Es gibt ein $t \in (0, \pi)$ und eine Reihenfolge der k_α so, daß $k_\alpha = \operatorname{cotg}(t + \frac{\alpha}{p}\pi)$; $(\alpha = 0, \ldots, p-1)$.

(2) Es gibt 2 Fälle: Fall A: $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{p-1}$ $(n-1 = p\mu)$
Fall B: p ist gerade $\mu_0 = \mu_2 = \ldots = \mu$ und $\mu_1 = \mu_3 = \ldots = \mu'$ mit $\mu \neq \mu'$ $(n-1 = \frac{p}{2}(\mu+\mu'))$.
In beiden Fällen gibt es ein homogenes Polynom p-ten Grades F so, daß die Punkte von M den Gleichungen $|\varphi|^2 = 1$, $F(\varphi) = \cos pt$ genügen, wobei im Fall A: $\Delta F \equiv 0$, $|\operatorname{grad} F(\varphi)|^2 = p^2 \, |\varphi|^{2p-2}$ und im Fall B: $\Delta F(\varphi) = (\mu - \mu')\frac{p^2}{2}|\varphi|^{p-2}$, $|\operatorname{grad} F(\varphi)|^2 = p^2 \, |\varphi|^{2p-2}$ gilt.

(3) Jedes Polynom F der beschriebenen Art liefert eine Parallelschar von Flächen mit konstanten Hauptkrümmungen in der S^n.

Hsiangs Liste der Hyperflächen $M \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, auf denen eine Untergruppe der $O(n+1)$ transitiv operiert, lehrt, daß beide Fälle vorkommen. Cartan behandelt nur Fall A, wobei (1) als Folgerung der Zusatzvoraussetzung $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{p-1}$ erscheint.

R. VON RANDOW: "Complete Lift" von Tensorfeldern zum Basisbündel und die Walkersche Ableitung

Betrachtet man die Formeln für die lokalen Komponenten der folgenden Ableitungen eines Tensorfeldes auf einer n-dim. Mannigfaltigkeit M: die kovariante bzgl. eines Zusammenhangs auf M, die Liesche bzgl. eines Vektorfeldes X auf M, und die Walkersche bzgl. einer fast-komplexen Struktur J auf M, so weisen diese eine grundlegende strukturelle Ähnlichkeit auf. Diese Struktur läßt sich algebraisch klarstellen, indem man folgendermaßen zum Basisbündel B(M) von M übergeht: bekanntlich besteht eine Bijektion zwischen den $T^r_s(M)$-wertigen Formen auf M und den horizontalen äquivarianten $\overset{r}{\underset{1}{\otimes}}\mathbb{R}^n \overset{s}{\underset{1}{\otimes}}\mathbb{R}^n$ -wertigen Formen auf B(M). Damit entspricht der Ableitung auf M eine Derivation von Formen auf B(M), auf welche man nun die von Frölicher und Nijenhuis eingeführte Klassifikation von Formen anwenden kann. Die obigen Ableitungen ergeben Derivationen vom Typ d_P, und die zugehörige T(B(M))-wertige horizontale Form P auf B(M) wird folgendermaßen bestimmt. Zu einer gegebenenT(M)-wertigen Form L auf M definiert man den "complete lift" auf B(M), d.h. eine T(B(M))-wertige Form L^c auf B(M). (Allgemeiner definiert man den "complete lift" und "vertical lift" für Tensorfelder vom Typ (0,k) und (1,k) auf M, $k \in \mathbb{N}$, analog zu den Methoden von Yano und Kobayashi für T(M) statt B(M).) Läßt sich L^c als Summe einer T(B(M))-wertigen horizontalen Form und einer VT(B(M))-wertigen Form auf B(M) schreiben, wobei VT(B(M)) das Vektorbündel der Tangentenvektoren zu den Fasern von B(M) ist: $L^c = P + Q$, so ist $d_P = d_{L^c} - d_Q$ eine Derivation welche auf M eine Ableitung von Tensorfeldern ergibt, dessen lokale Formel mittels eines lokalen Kartenschnittes von B(M) gewonnen wird. Im Falle der (a) kovarianten Ableitung ist L = Identitäts-T(M)-wertige 1-Form I_M, $I_M^c = I_{B(M)} = H + V$, (b) Lieschen: $L = X$, $X^c = X^c + 0$, (c) Walkerschen: L = Nijenhuis Torsion N von J, und die Aufspaltung von N^c wird durch den von Walker definierten Non-Tensor h^i_{jrs} ermöglicht.

H. REITBERGER: Über den Bezoutschen Satz

Eine der möglichen Verallgemeinerungen des klassischen Bezoutschen Satzes über die Anzahl der Schnittpunkte zweier ebener algebraischer Kurven ist die folgende: Bezeichne $P_r(k)$ den projektiven Raum der Dimension r über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Seien V und W algebraische Varietäten mit den definierenden homogenen Idealen $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$. Wann gilt Bezout: $h_o(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_o(\mathfrak{a})\, h_o(\mathfrak{b})$, wobei h_o die Ordnung der entsprechenden Ideale bezeichne, d.h. den ersten Koeffizienten des Hilbertpolynoms. Daß diese Aussage nicht voraussetzungslos richtig ist, überlegt man sich an klassischen Beispielen (Macaulay). O.H. Keller, Renschuch, Budach, Vogel und Herrmann konnten den Gültigkeitsbereich charakterisieren. Vogel und der Vortragende haben nun eine Kohomologiebedingung gefunden, die hinreichend für die Übereinstimmung der Schnittmultiplizität nach Serre und der idealtheoretischen nach Macaulay-Gröbner in jeder Schnittkomponente ist, und damit für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes. Singularitätenfreie und auch perfekte Varietäten erfüllen die Bedingung; ein Beispiel zeigt aber, daß sie nicht notwendig ist.

E.J. RETTEL: Zur arithmetischen Theorie algebraischer Mannigfaltigkeiten, deren H-Ideale durch Hauptklassenmatrizen nach Macaulay erzeugt werten

Die Arbeiten von Eagon, Northcott, Buchsbaum und Rim lenkten von neuem das Interesse auf Determinantenideale von zugehörigen Matrizen. Unter Hauptklassenmatrizen versteht mannach F.S. Macaulay jene Matrizen, bei denen das äußere Produkt der Zeilen das den Determinantenmannigfaltigkeiten zugehörige H-Ideal erzeugt, das den Höchstrang besitzt und damit eine perfekte Mannigfaltigkeit beschreibt. Durch Verknüpfung des äußeren Produktes mit den Matrizen der Syzygienkette des einzeiligen Falles eines Hauptklassenideales wird zuerst eine neue Basisdarstellung als Matrizenprodukt sowie eine Neuformulierung des Macaulayschen Syzygiensatzes gegeben. Dies erlaubt dann den Aufbau der Syzygienkette als Kette von Blockmatrizen durch Induktion bezüglich der Zeilen, wobei die Herleitung nur auf dem Syzygiensatz von Macaulay und einem die Höchstrangbedingung garantierenden Zeilenergänzungssatz beruht. Die Syzygienkette ermöglicht dann die Berechnung der Hilbertfunktion und ihrer Hilbertkoeffizienten, womit die arithmetische Theorie beschrieben ist.

H. SACHS: Die Strahlflächen mit durchwegs ebenen Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden

J. Krames bewies 1963, daß die einzigen windschiefen Flächen mit durchwegs ebenen Fallinien (bezüglich einer festen Bezugsebene) die Drehhyperboloide und jene geraden Kugelkonoide sind, deren Leitkugel die Konoidachse berührt; auf letzteren Flächen sind die Fallinien mit den Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden der Fläche identisch. Im gehaltenen Referat wurde nun gezeigt, wie man alle abwickelbaren bzw. windschiefen Strahlflächen (Regelflächen) des dreidimensionalen euklidischen Raumes bestimmen kann, deren Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden durchwegs ebene Kurven sind. Man findet an abwickelbaren Flächen: Böschungstorsen, Drehkegel und alle Zylinder. An windschiefen Lösungsflächen stellt sich neben dem geraden Kugelkonoid, dessen Achse die Leitkugel berührt eine einparametrige transzendente Flächenschar ein, die in Abhängigkeit vom Scharparameter α folgende Darstellung - bis auf Ähnlichkeiten gestattet:

$$\Phi_\alpha : \{ x = \varphi \operatorname{ctg} \alpha + v \sin\alpha \cos\varphi \,,\ y = v \sin\alpha \sin\varphi \,,\ z = \sin\varphi - v \cos\alpha \} .$$

Die Untersuchung läuft über die Diskussion einer partiellen Differentialgleichung 3. Ordnung und das Studium der Hülltorse 3. Klasse der Trägerebenen der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden. Diese Hülltorse erweist sich als reduzibel (parabol. Zylinder) und gestattet die Ermittlung aller Lösungsflächen.

R. SCHNEIDER: Konvexe Körper und Drehungen

Bei einer Reihe verschiedener Fragen über konvexe Körper, und zwar insbesondere bei Aufgaben, bei denen Drehungen eine wesentliche Rolle spielen, lassen sich Kugelfunktionen mit Erfolg benutzen. Es wurden drei geometrische Probleme über konvexe Körper angeschnitten (Kennzeichnung des Steinerpunktes, Gleitkörper in konvexen

Polytopen, Körper mit konstanten p-dimensionalen Quermaßen), und es wurde zu zeigen versucht, warum und wie sie sich unter Verwendung von Kugelfunktionen behandeln lassen. Dabei kommt naturgemäß der Zusammenhang der Kugelfunktionen mit gewissen Darstellungen der Drehgruppe entscheidend ins Spiel.

U. SIMON: x) Kongruenzsätze für II- und III- isometrische Flächen (Ausbau der Indexmethode)

Sei $x:S^2 \longrightarrow E_3$ eine C^3-Immersion der 2-Sphäre in den dreidimensionalen euklidischen Raum. Seien G_{ik}, $G^*_{ik} \in C^{2+\alpha}$ positiv definite, symmetrische Tensoren mit kovarianten (zugehörigen) Differentiationsoparatoren ∇_j, ∇^*_j; b_{ik}, b^*_{ik} seien symmetrische Tensoren aus $C^{2+\alpha}$ und es gelte $\nabla_j b_{ik} = \nabla_k b_{ij}$, $\nabla^*_j b^*_{ik} = \nabla^*_k b^*_{ij}$. Man unterscheidet zweckmäßig 4 Fälle:

I) Sei $b_{ik} = b^*_{ik}$ positiv definit und gelte:

Ia) Es existiert c=konst. und $S^{ik} \in C^{1+\alpha}$ mit $S^{ik}(G_{ik}-cG^*_{ik}) = 0$

Ib) Es existiert c=konst. und $S_{ik} \in C^{1+\alpha}$ mit $S_{ik}(G^{ik}-cG^{*ik}) = 0$, wobei $G^{ik}G_{kl} = \delta^i_{\cdot l}$

II) Sei $G_{ik} = G^*_{ik}$ und es gelte:

IIa) Es existiert c=konst. und $S^{ik} \in C^{1+\alpha}$ mit $S^{ik}(b_{ik}-cb^*_{ik}) = 0$

IIb) Es existiert c=konst. und $S_{ik} \in C^{1+\alpha}$ mit $S_{ik}(b^{ik}-cb^{*ik}) = 0$, wobei $b^{ik}b_{kl} = \delta^i_{\cdot l}$

weiterhin gelte:

(IA) $\frac{\|E_{ik}\|}{\|S_{ik}\|} > \frac{1}{4}\left(S^{ik}E_{ik}\right)^2$ mit $E_{ik} := b_{is}(G^{rs}+G^{*rs})\varepsilon_{rk}$, $\varepsilon_{rk} := \|S_{ik}\|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(i,k)$

(IB) $\|E^{ik}\|\|S_{ik}\| > \frac{1}{4}(S_{ik}E^{ik})^2$ mit $E^{ik} := b_{js}(G^{ir}+G^{*ir})\varepsilon^{jk}$, $\varepsilon^{jk} := \|S_{ik}\|^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}(j,k)$

(IIB) $\|b_{ik}\| > 0$, $\|b^*_{ik}\| > 0$

x) Arbeitsgemeinschaft zusammen mit: H. Huck, R. Roitzsch, W. Vortisch, R. Walden, W. Wendland

Behauptung: Auf $x(S^2)$ gilt im Fall I: $L_{ik} = G_{ik} - cG^*_{ik} \equiv 0$, im Fall II $\tilde{L}_{ik} = b_{ik} - b^*_{ik}\,c \equiv 0$

Daraus ergeben sich folgende Kongruenzsätze:

(1) Seien $G, G^* \in C^{4+\alpha}$ Eiflächen im E_3. Es gelte:

(A) G, G^* haben gleiche zweite Fundamentalform

(B) eine der folgenden Bedingungen (c=konst. $\neq 0$)

(B_1) $H = H^*\,c$ (mittlere Krümmungen)

(B_2) $K = K^*\,c$ (Gaußsche Krümmungen) (für $c=1$ Satz von Grove)

(B_3) $\frac{H}{K} = \frac{H^*}{K^*}\,c$

(B_4) $(k_1^2 + k_2^2) = c\,(k_1^{*2} + k_2^{*2})$, k_i Hauptkrümmungen

(B_5) $(R_1^2 + R_2^2) = c\,(R_1^{*2} + R_2^{*2})$, $R_i = \frac{1}{k_i}$

Behauptung: G und G^* sind kongruent. (Beweis mit (I)).

(2) $G, G^* \in C^{4+\alpha}$ seien Eiflächen mit gleicher dritter Fundamentalform und gleichen mittleren Krümmungen im E_3. Dann sind G und G^* kongruent (A.D. Aleksandrov). (Beweis mit (II)).

Bemerkungen:

1) Analog lassen sich Lösungen für das Minkowski-Problem und das Christoffel-Problem angeben (mit (II))!

2) Mit (II) läßt sich auch der Kongruenzsatz für isometrische Eiflächen und die Kongruenz geschlossener Flächen vom Geschlecht Null mit gleicher Metrik und gleicher mittlerer Krümmung beweisen.

(3) Verbiegungsprobleme bezüglich der zweiten Grundform (II-Verbiegungen). Es bezeichne B_{ij} den Tensor der zweiten Grundform, g_{ij} den Tensor der ersten Grundform, ε_{jk} den Diskriminantentensor von g_{ij}, $\|$ die kovariante Differentiation bezüglich g_{ij} und δ die erste Variation. Aus der Differentialgleichung

$$\varepsilon^{jk}\left\{ (\delta B_{ij})_{\|k} - B_{rj}\, g^{rs} (\delta g_{sk})_{\|i} - 2H(\delta g_{ij})_{\|k} \right\} = 0$$

lassen sich die folgenden Ergebnisse herleiten:
Eine Eifläche ist starr gegenüber infinitesimalen Deformationen, falls
A) $\delta B_{ij} \equiv 0$
B) eine der folgenden Bedingungen gilt

B$_1$) $\delta H \equiv 0$ B$_2$) $\delta K \equiv 0$ B$_3$) $\delta\left(\frac{H}{K}\right) \equiv 0$

B$_4$) $\delta(k_1^2 + k_2^2) \equiv 0$ B$_5$) $\delta(R_1^2 + R_2^2) \equiv 0$.

Für III-Verbiegungen (bezüglich der dritten Grundform) gelten analoge Ergebnisse.

(4) Affine Resultate

(4a) $G, G^* \in C^3$ seien relativ normalisierte Eiflächen im affinen Raum A_3. Es gelte:
1. es existiere $\varphi: G \to G^*$ bijektiv und flächentreu,
2. φ führe Schattengrenzen in Schattengrenzen über
3. $\lambda_i = \lambda_i^*$ (Tschebyscheff-Vektor).
Dann sind G, G^* (affin) kongruent.

(4b) $G, G^* \in C^3$ seien zentroaffin normalisierte Eiflächen im A_3.
Es gelte:
1. wie 1. in (4a),
2. φ führe ebene Schnitte durch O in ebene Schnitte durch O über,
3. wie 3. in (4a).
Dann sind G, G^* (zentroaffin) kongruent.

(4c) $G, G^* \in C^{4+\alpha}$ seien relativnormalisierte Eiflächen im A_3.
Es gelte:
1. $G_{ij} = G_{ij}^*$ (relative Metriken)
2. $\frac{H}{K} = \frac{H^*}{K^*}$
3. $\lambda_i = \lambda_i^*$
4. B_{ij} (relative II. Grundform), B_{ij}^* positiv definit.
Dann sind G, G^* kongruent.

Hilfsmittel zum Beweis dieser Kongruenzsätze ist die Indexmethode, die dem Beweis des Satzes von Grove entsprechend verwendet wird (vgl. M.Z. 116, 242 - 246 (1970)).

Auf Grund eines Hinweises von Herrn H.F. Münzner konnte noch folgender Satz bewiesen werden:

$G, G^* \in C^{4+\alpha}$ seien Eiflächen im E_3. Es gelte:

A) $B_{ik} = B^*_{ik}$ (zweite Grundformen)

B) $F\left(\frac{H}{K}, \frac{1}{K}\right) = F\left(\frac{H^*}{K^*}, \frac{1}{K^*}\right)$, $F \in C^{2+\alpha}$, F gleichsinnig streng monoton in beiden Variablen.

Dann sind G, G^* kongruent.

Ein analoges Ergebnis bezüglich der dritten Grundform ist ebenso beweisbar (A.D. Aleksandrov).

J. TÖLKE: Zur projektiven ebenen Kinematik

Es wird Bezug genommen auf den Vortrag von H. Frank (Oberwolfach 1968). Für den Fall dreier reellel linear unabhängiger Pole wird gezeigt, wie sich auf sinnvolle Weise zwei "Krümmungstheorien" entwickeln lassen. Dadurch gelingt die geometrische Deutung gewisser Halbinvarianten. Als zentral erweist sich hierbei der Begriff der "speziell harmonischen Bewegungen", für die mehrere Kennzeichnungen angegeben werden.

H. VIESEL: Über einfach geschlossene geodätische Linien auf dem Ellipsoid

Die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid winden sich gleichsinnig um die "kleine" bzw. "große" Hauptachse, indem sie gleichzeitig innerhalb einer Zone beiderseits des zur Achse gehörenden Hauptschnittes oszillieren.

Das Verhältnis q der Oszillationen zu den Windungen läßt sich durch die reellen Perioden gewisser hyperelliptischer Integrale ausdrücken. Für geschlossene geodätische Linien ist q ganzzahlig. Die Untersuchung von q ergibt:

1. q hängt nicht vom Anfangspunkt, sondern nur von der Anfangsrichtung ab.

2. q wird für den großen Hauptschnitt am größten; dieser Wert q_o läßt sich leicht bestimmen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

3. Bei festem Verhältnis $r^2 = K_{min} : K_{max}$ folgt:

a: Es gibt Flächen mit nur 3 einfach geschlossenen geodätischen Linien ($q_0 < 2$; verlängertes Rotationsellipsoid).

b: Es gibt genau dann mehr als 3 einfach geschlossene geodätische Linien, wenn das Verhältnis der größten zur kleinsten Halbachse größer 2 ist (abgeplattetes Rotationsellipsoid).

B.WEGNER: Decktransformationen transnormaler Mannigfaltigkeiten

Eine zusammenhängende C^∞-Untermannigfaltigkeit V des $\mathbb{R}^n$ heißt transnormal, wenn für jeden beliebigen Punkt p aus V aus $q \in V \cap \nu(p)$ immer $\nu(p) = \nu(q)$ folgt. Die Abbildung ν ordnet jedem Punkt aus V seinen Normalenraum zu. Sie ist eine Überlagerungsabbildung von V auf eine Untermannigfaltigkeit W der offenen Grassmannmannigfaltigkeit aller k-dimensionalen affinen Unterräume des $\mathbb{R}^n$ (k = Kodimension von V). Für k = 1,2 und 3 kann man zeigen, daß (V,ν,W) immer nichttriviale Decktransformationen besitzt. Dazu wird bewiesen, daß das Zentrum der Isometriegruppe von $\nu^{-1}(\nu(p))$, die durch Hochheben von geschlossenen Wegen in (V,ν,W) entsteht, aus Einschränkungen von Decktransformationen von (V,ν,W) auf $\nu^{-1}(\nu(p))$ besteht. Unter Verwendung dieser Hilfsmittel wird gezeigt, daß jede geschlossene transnormale Kurve transnormal isotop zu einer sphärischen transnormalen Kurve ist, und daß keine unendlichtransnormalen Kurven existieren.

T.J. WILLMORE: Tight immersions

A survey was given of the present state of the theory of tight maps, fellowing the recent work of Kuiper, Little, Pohl, Jerus etc. After giving a short summary of the relevant parts of Morse Theory, the results were applied to a study of tight immersions.

Die angesetzte Diskussion zur "zweiten Grundform" hatte das Ziel:

a) Ergebnisse bezüglich der zweiten Grundform zu sammeln

b) offene Probleme anzugeben.

<u>ad a:</u>

1. (Voss und Erard): Existenz von Flächen (lokal) zu vorgegebener zweiter Grundform (Tensor B_{ik}) und vorgegebenen Anfangswerten:
(1A) falls Rg $(B_{ik}) = 2$ (vgl. Cartan, Werke)
(1B) falls Rg $(B_{ik}) = 1$ (vgl. Diss. Erard, ETH Zürich 1968).

2. Ex existieren lokal Rotationsflächen, die II-isometrisch zur Kugel sind (Voss und Erard).

3. F, F^* seien Flächenstücke, F sei Kugel(-stück). Es gelte: F, F^* haben gleiche II. Grundform und gleiche Gaußsche Krümmung $K = K^*$. Dann sind F und F^* kongruent (Voss und Erard).

4. Lokale II-Verbiegungen ($\delta II \equiv 0$)
a) die Wendelfläche ist lokal II-starr
b) die Kugel ist lokal nicht II-starr (Voss und Erard).

5. Vollständige Diskussion der II-Verbiegungen mit $\delta H \equiv 0$, $\delta K \equiv 0$, falls $K(H^2-K) \neq 0$; vgl. Diss. Erard.

6. Die Kugel (geschlossen) ist II-starr.

7. Bezüglich globaler Eindeutigkeitssätze bezüglich II vgl. U. Simon: "Kongruenzsätze für II - und III-isometrische Flächen" in diesem Bericht.

8. Globale II-Verbiegungen (vgl. 7.).

9. F sei ein Flächenstück, auf dem jede II-Geodätische gleichzeitig I-Geodätische ist. Dann ist F ein Kugelstück (Simon).

1o. II-Minimalflächen
Die Differentialgleichung für II-Verbiegungen lautet:
$2H - (B^{ik}\, T_{ik}{}^{j})_{\| j} = 0$ mit $T_{ik}{}^{j} = \Gamma_{ik}{}^{j} - \beta_{ik}{}^{j}$, $B^{ik} B_{kr} = \delta^{i}{}_{r}$
$\Gamma_{ik}{}^{j}$ bzw. $\beta_{ik}{}^{j}$ bezeichnen Christoffelsymbole bezüglich der I. bzw. II. Grundform; " $\|$ " bezeichnet die kovariante Ableitung bezüglich B_{ik} (Leichtweiß und Glässner).

11. Die Wendelfläche ist die einzige Fläche, die gleichzeitig I-Minimalfläche, II-Minimalfläche und Affinminimalfläche ist (Leichtweiß und Glässner).

12. Kennzeichnend für Flächen, die gleichzeitig I- und II-Minimalflächen sind, ist die Bedingung $(\log g)_{12} = 0$ (Leichtweiß u. Glässner).

13. Herr Voss gibt Gegenbeispiele zu der folgenden Vermutung von R. Gardner: Die mittlere Krümmung H hängt nur von der zweiten Grundform ab.

14. Die zweite Grundform läßt sich rein algebraisch aus der ersten Grundform und H bestimmen (Thomas).

ad b:

1. Sind Eiflächen mit gleicher zweiter Grundform im E_3 kongruent?
2. Läßt sich analog zu a, 14. die erste Grundform aus H und der zweiten Grundform rein algebraisch bestimmen?

H. Sachs (Stuttgart)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft