MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 2/1971

Arbeitsseminar über Modelltheorie

11.1. - 16.1.1971

Das vom Heidelberger Institut vorbereitete Seminar hatte als Hauptziel, einen vollständigen Beweis des Satzes von Morley zu geben: "Jede vollständige abzählbare Theorie erster Stufe, die in <u>einer</u> nicht-abzählbaren Mächtigkeit kategorisch ist, ist in <u>allen</u> nicht-abzählbaren Mächtigkeiten kategorisch". Einige Vorträge erweiterten das Thema.

Da Prof. Gert H. Müller (Heidelberg) wegen eines Todesfalles in der Familie nicht anwesend sein konnte, übernahm Herr Prof. E. J. Thiele (Hannover, jetzt Berlin) kurzfristig die Leitung.

<u>Tagungsteilnehmer</u>

Belger, J.(Münster)
Braun, J.(Bonn)
Diener, K.(Köln)
Drewitz, E.(Heidelberg)
Felgner, U.(Heidelberg)
Fricke, D.H. (Macheim)
Gloede, K. (Heidelberg)
Hübschmann, (Heidelberg, jetzt Zürich)
Jung, J. (Heidelberg)
Klaas, G. (Heidelberg)
Klingen, N. (Köln)
Koppelberg, B.-J. (Bonn)
Makowsky, J. (Zürich)
Mathias, A.R.D. (Cambridge,U.K.)
Niefnecker, D. (Heidelberg)
Podewski, K. (Hannover)
Prestel, A. (Bonn)
Reinecke, J. (Hannover)
Rheinwald, R. (Heidelberg)
Rutsch, G. (Heidelberg)
Sartoris, T. (Oberhausen)
Schmidt, N. (Bonn)
Schmitt, P. (Heidelberg)
Seeland, H. (Heidelberg)
Sieg, W. (Ibbenbüren)
Thiele, E.J. (Hannover, jetzt Berlin)
Weispfenning, V. (Heidelberg)
Woitecki, U. (Oberhausen)
Ziegler, M. (Köln)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

1) $\aleph_1$-kategorische Theorien

Die folgenden Vorträge sind dem Beweis der Vermutung von Łos gewidmet:

Satz: Sei T eine abzählbare vollständige Theorie. Wenn T κ_0 -kategorisch ist für $\kappa_0 > \omega$, dann ist T κ-kategorisch für alle $\kappa > \omega$.

Der erste Beweis dieser Vermutung stammt von Morley (TAMS 114).

1. Vortrag: Ulrich Felgner

Wir beweisen erst folgenden schwächeren Satz:

Satz: Falls eine abzählbare vollständige Theorie T $\aleph_1$-kategorisch ist, dann ist sie auch κ -kategorisch für alle $\kappa > \omega$.

Der Beweis folgt Keisler (Israel J. Math. 4 (1966) pp. 249-261). Wir brauchen dazu ein 2-Kardinal-Theorem von R. L. Vaught:

Satz: Falls $\kappa > \lambda$, dann: $\langle \kappa, \lambda \rangle \longrightarrow \langle \omega_1, \omega \rangle$.

Im nächsten Schritt zeigen wir: Falls alle Modelle von T der Mächtigkeit $\aleph_1$, homogen sind, dann sind alle überabzählbaren Modelle von T homogen. Nach Morley-Vaught (Math. Scand. 11 (1962) pp. 37-57) weiss man, falls CH gilt, dass jede Theorie erster Stufe, welche unendliche Modelle hat, ein homogenes Modell der Mächtigkeit $\aleph_1$, hat. Daraus folgt sofort der obige Satz von Morley. //

Für den verbleibenden Teil des Satzes (Abwärtsteil) liegt eine Arbeit von Rowbottom zu Grunde. Darin wird der Begriff "κ -kategorisch" schrittweise vereinfacht. Zunächst überlegt man sich, für welche Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, beide von der gleichen Mächtigkeit, elementare Aequivalenz und Isomorphie zusammenfallen. Dies führt uns auf saturierte Modelle.

2. Vortrag: Gernot Klaas

Für eine Struktur $\mathfrak{A}$, $\kappa \leq \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, werden die Begriffe "homogen", "universell" und "κ-saturiert" eingeführt und folgende Sätze bewiesen:

Satz: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ κ-saturiert, $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \kappa$ und $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, dann $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Satz: $\mathfrak{A}$ κ-saturiert genau dann wenn $\mathfrak{A}$ homogen und universell.

Satz: $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \leq 2^\kappa$, dann existiert $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ κ^+-saturiert und $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = 2^\kappa$. //

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Im nächsten Schritt beweist man nun:

Satz: T ist κ-kategorisch, $\kappa > \omega$, genau dann, wenn alle Modelle von T der Mächtigkeit κ saturiert sind.

Zum Beweis benötigt man Stabilitätsbetrachtungen. Diese ergeben sich unter anderem aus Resultaten der Ehrenfeucht-Mostowski-Theorie.

3.Vortrag: Klaus Gloede

(Übersicht über die Theorie von Ehrenfeucht-Mostowski)

Unter Benutzung des Kompaktheitssatzes und des Satzes von Ramsey beweist man den folgenden

Satz: (Ehrenfeucht-Mostowski) T sei eine Theorie in einer abzählbaren Sprache mit einem unendlichen Modell, $\langle X, < \rangle$ eine (linear) geordnete unendliche Menge. Dann existiert ein Modell $\mathfrak{M}$ von T mit folgenden Eigenschaften:

(i) $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ und $\mathfrak{M}$ ist die Skolemhülle von X bzgl. einer Menge von Skolem-Funktionen von $\mathfrak{M}$, insbesondere $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \overline{\overline{X}}$.

(ii) $\langle X, < \rangle$ ist nicht unterscheidbar in $\mathfrak{M}$, d.h. für jede Formel φ der Sprachen von $\mathfrak{M}$ und je zwei Folgen $x_o < \ldots < x_n$ und $x'_o < \ldots < x'_n$ aus X gilt $\mathfrak{M} \models \varphi(x_o, \ldots, x_n)$ genau dann wenn $\mathfrak{M} \models \varphi(x'_o, \ldots, x'_n)$.

(iii) Für jedes $A \subseteq |\mathfrak{M}|$ realisiert $\mathfrak{M}$ höchstens $\bar{A} + \aleph_o$ Typen in der Theorie Th $(\langle \mathfrak{M}, x \rangle_{x \in A})$. //

Die in der Definition von "saturiert" auftretenden Bedingungen für die Realisierbarkeit gewisser Typen ist noch unhandlich. Man vereinfacht sie durch Einführung atomarer Modelle.

4. Vortrag: Jochen Jung

Die Existenz atomarer Modelle wird bewiesen. Dies zusammen mit einer leichten Verschärfung des Satzes von Ehrenfeucht-Mostowski ergibt das

Lemma: Sei $\kappa > \omega$ und jedes Modell von T der Mächtigkeit κ sei $\aleph_1$-saturiert. Dann realisiert jedes Modell von T der Mächtigkeit $\aleph_1$ jeden Typ von T.

Daraus folgt sofort der

Satz: Unter den obigen Voraussetzungen ist jedes Modell der Mächtigkeit $\aleph_1$ saturiert.

Korollar: Sei $\kappa > \omega$. Wenn T κ-kategorisch, dann ist T auch $\aleph_1$-kategorisch. //

2) Omitting Types

(Elmar Drewitz)

Es werden Mächtigkeiten von Modellen einer abzählbaren Theorie, die einen Typ Σ verletzen, untersucht. Folgender Satz von Morley wird bewiesen:

Satz: Wenn T für alle $\alpha < \omega_1$ Modelle der Mächtigkeit $\geqslant \beth_\alpha$ hat die Σ verletzen, so hat T Modelle in jeder Mächtigkeit $\geqslant \aleph_0$, die Σ verletzen.

3) Stabile Theorien und Konstruierbarkeit

(Klaus-Peter Podewski)

Es ist angenommen, dass im Universum ZF+AC+ $\neg$CH gültig ist. Sei T eine Theorie, die vollständig ist und unendliche Modelle hat. Formalisiert man T in üblicher Weise, dann ist in $L[T]$: ZF+AC+GCH gültig.

Sei $N[T] := \{\mathfrak{A} ; \mathfrak{A} \models T \text{ und } \mathfrak{A} \in L[T]\}$. Dann gilt:

(i) Gibt es ein $\aleph_1$-saturiertes Modell von T in $N[T]$, dann ist T stabil.

(ii) Ist T stabil, dann gibt es zu jedem κ ein κ^+-saturiertes Modell $\mathfrak{A} \in N[T]$.

4) Streng minimale Mengen und der Satz von Morley

(Johann-Andreas Makowski)

Die folgenden Resultate stammen von Baldwin-Lachlan (JSL 36.1)

Es wird, ausgehend von den algebraisch abgeschlossenen Körpern, der Begriff der Transzendenzbasis verallgemeinert zur Basis einer streng minimalen Menge. Unter iterierter Anwendung des Vaught'schen 2-Kardinal-Theorems folgt dann

Theorem: Eine vollständige Theorie T ist $\aleph_1$-kategorisch genau dann, wenn sie stabil ist und keine unwesentliche Erweiterung von T den Voraussetzungen zu Vaughts 2-Kardinal-Theorem genügt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

<u>Theorem:</u> Jede $\aleph_1$-kategorische Theorie hat eine unwesentliche Erweiterung mit einer streng minimalen Menge.

Mit diesen Sätzen beweist man dann:

<u>Theorem:</u> Eine $\aleph_1$-kategorische Theorie hat entweder genau ein oder $\aleph_0$ viele abzählbare Isomorphietypen von Modellen.

<u>Theorem:</u> Für $\aleph_1$-kategorische Theorien ist $\alpha_T < \omega$. (Notices AMS 1970).

Damit sind zwei offene Probleme aus Morley (TAMS 114) gelöst.

5) Neuere Resultate über Ultrafilter

(Adrian R.D. Mathias)

Folgendes spielt sich in ZF+AC ab. Wir betrachten erst Ulam-Matrizen. (cf. Ulam, Fund. Math., 1930)

<u>Lemma:</u> $\exists A_\varrho^\xi \subseteq \lambda^+$ $(\xi < \lambda^+, \varrho < \lambda)$ derart dass (a) $\varrho < \lambda \; \& \; \xi < \eta < \lambda^+ \Longrightarrow A_\varrho^\eta \cap A_\varrho^\xi = 0$, (b) $\xi < \lambda^+ \Rightarrow [\lambda^+ - \bigcup\{A_\varrho^\xi ; \varrho < \lambda\}]^{=} \leq \lambda$,
(Dabei ist $\overline{X}$ =card(X)).

<u>Beweis:</u> Für $\alpha < \lambda^+$, sei $f_\alpha : \alpha \xrightarrow[1-1]{} \lambda$. $A_\varrho^\xi = \{\alpha ; \xi < \alpha \wedge f_\alpha(\xi) = \varrho\}$

<u>Definition:</u> $i(\lambda, \kappa) \Longleftrightarrow \exists J$ (J ideal auf λ, λ-vollständig, λ-saturiert)

<u>Korollar:</u> (Ulam) $\neg i(\lambda^+, \lambda^+)$.

Folglich gilt: λ^+ hat kein reelles Mass.

<u>Beweis:</u> Wenn J Ideal auf λ, λ-vollständig, κ-saturiert. dann nach dem Lemma (b): $\forall \xi \exists \varrho : A_\varrho^\xi \notin J$, $\exists_\varrho \exists A \subseteq \lambda^+, \overline{\overline{A}} = \lambda^+ . \forall \xi \in A : A_\varrho^\xi \notin J$

<u>Problem:</u> Gibt es ein λ mit $i(\lambda^+, \lambda^{++})$?

<u>Problem:</u> Sei J das Ideal auf ω_1, das erzeugt ist von den Komplementen der unbeschränkten abgeschlossenen Teilmengen von $\aleph_1$. Ist J $\aleph_2$-saturiert ?

<u>Satz:</u> (Kunen) $i(\lambda^+, \lambda^{++})$ dann existiert 0^+
($0^\#$ = Theorie von L mit ω nicht unterscheidbaren Elementen,
0^+ = " " L^D " " " " " " ,
wo D ein normales zweiwertiges Mass auf κ ist.)

<u>Definition:</u> $K(\aleph_0) \Longleftrightarrow$ Exist. ein Kurepa-Baum auf $\aleph_1$.

<u>Satz:</u> (Solovay) $V = L \Longrightarrow K(\aleph_0)$ (Mit der Methode von Jensen)

<u>Satz:</u> (Prikrý) $K(\aleph_0) \Rightarrow \neg i(\aleph_1, \aleph_2)$

<u>Beweis:</u> Sei Φ die Behauptung: " $\exists \langle f_\alpha, \alpha < \aleph_2 \rangle : f_\alpha : \omega_1 \to \omega$, $\alpha < \beta \Longrightarrow \exists \gamma \forall \delta > \gamma : f_\alpha(\delta) \neq f_\beta(\delta)$ ". Dann (i) $K(\aleph_0) \Rightarrow \Phi$ und (ii) $\Phi \Longrightarrow \neg i(\aleph_1, \aleph_2)$. Zu (ii) betrachte man die Matrizen $X_\alpha^n = \{\beta ; f_\alpha(\beta) = n\} \subseteq \aleph_1$.

Problem: Gilt $\Phi \Longrightarrow K(\aleph_0)'$?
Ich glaube, dass Martins Axiom MA($\aleph_2$) $\Rightarrow \Phi$.
Sei nun U ein Ultrafilter auf λ .
Definition: U heisse uniform $\Leftrightarrow (x \in U \Rightarrow \overline{\overline{x}} = \lambda)$.
Definition: U heisse regulär $\Longleftrightarrow \exists\ S :\subseteq U,\ \lambda = \overline{\overline{S}}\ \&\ \forall T :\subseteq S$
$\overline{\overline{T}} \geq \aleph_0 \Rightarrow \bigcap T = \emptyset$.
Problem: (Keisler) Ist jeder uniforme Ultrafilter regulär ?
Satz: (Přikrý) $V = L \Rightarrow$ Jeder Ultrafilter auf $\aleph_1$ ist regulär.
Beweis: (Weiterentwicklung von Jensens Technik mittels Ulam-Matrizen) Jensen-Kunen zeigten, dass dies auch für $\aleph_n$ $(n < \omega)$ gilt.
Definition: Sei U ein Ultrafilter auf $\aleph_1$. U heisst stark irregulär $\Longleftrightarrow \forall S :\subseteq U,\ \overline{\overline{S}} = \aleph_1,\ \exists T \subseteq S,\ \overline{\overline{T}} = \aleph_0 :$
$: \overline{\overline{\bigcap T}} = \aleph_1$.
Satz: (Prikry) CH $\Longrightarrow$ Es gibt keinen stark irregulären Ultrafilter auf $\aleph_1$.

Dies ist eine schwache Antwort auf Keislers Problem.
Lemma: (Sierpinski, Přikrý) CH $\Rightarrow \exists \langle f_\alpha ; \alpha < \aleph_1 \rangle (f_\alpha : \omega_1 \to \omega_1\ \wedge$
$\forall \nu \neq 0 : f_\alpha(\nu) < \nu\ \wedge\ \forall A \subseteq \aleph_1,\ \overline{\overline{A}} = \aleph_1 \Rightarrow \overline{\overline{\{\alpha ; f_\alpha{}'' A \neq \aleph_1\}}}$
$< \aleph_0)$
Zum Beweis des Satzes: Betrachte die Matrize $B^\xi_\nu =_{Def.} f^{-1}{}''\{\nu\}$.
Weiterhin wurden die neuen Beweise ohne GCH von Přikrý bez. Kunen von Ergebnissen von Chang bez. Keisler über absteigend unvollständige und gute Ultrafilter erwähnt.

6) Konstruktibilität mit $L_{\kappa\kappa}$ -Sprachen

(Gernot Rutsch)
Für eine reguläre Kardinalzahl κ sei $L_{\kappa\kappa}$ eine Sprache mit κ vielen Variablen, höchstens κ vielen Konstanten, mit Konjunktion (Disjunktion) über weniger als κ viele Formeln, mit Quantoren über weniger als κ viele Variable und mit Prädikaten $\tilde{\in}$, $\tilde{=}$ und einem einstelligen Prädikat $\underline{p}$. $\mathfrak{M} = \langle M, \in_M, P_M \rangle$ sei eine Struktur. $\mathrm{Sat}^\kappa(\varphi, s, \mathfrak{M})$ bedeute, dass die Formel φ bei derBelegung der Variablen v_i mit $s(v_i)$ $(s(v_i) \in M)$ in $\mathfrak{M}$ gilt.

Definition: ${}^{\underline{\kappa}}M = \bigcup_{\alpha\in\kappa} {}^{\alpha}M$

$$D^{\kappa}(\mathfrak{M}) = \{\{x\in M;\ Sat^{\kappa}(\varphi,\langle x\rangle * s,\mathfrak{M})\};\ Fml^{\kappa\kappa}(\varphi)\wedge s\in {}^{\underline{\kappa}}M\}.$$

Induktiv definiert man dann den Klassenterm $L_{\kappa\kappa}(a)$ für eine Menge a wie folgt:

$$L_{\kappa\kappa 0}(a)=\emptyset\ ,\quad L_{\kappa\kappa\alpha+1}(a) = D^{\kappa}(L_{\kappa\kappa\alpha}(a))\ ,\quad \lambda=\bigcup\lambda \Rightarrow L_{\kappa\kappa\lambda}(a)=\bigcup_{\alpha\in\lambda} L_{\kappa\kappa\alpha}(a);$$

$$L_{\kappa\kappa}(a) = \bigcup_{\alpha\in On} L_{\kappa\kappa\alpha}(a)\ .$$

$L_{\kappa\kappa}(a)$ ist das kleinste transitive ZF-Modell $\mathfrak{M}$ mit: $On \subseteq M$ und $a\cap M \in M$ und ${}^{\underline{\kappa}}M \subseteq M$.

Resultate:

1. $[L_{\kappa\kappa}(a)=V]^{(L_{\kappa\kappa}(a))}$.
2. $\kappa<\lambda \wedge \lambda=\bigcup\lambda \wedge \kappa\in M \wedge \mathfrak{M} \prec_{\kappa\kappa} L_{\kappa\kappa\lambda} \Longrightarrow \exists\alpha: \mathfrak{M} \cong_{\kappa\kappa} L_{\kappa\kappa\alpha}$.
3. $\kappa<\alpha = \overline{\overline{L_{\kappa\kappa\alpha}}} \le \overline{\overline{\alpha}}^{\underline{\kappa}}$, wobei: $\overline{\overline{\alpha}}^{\underline{\kappa}} = \sum_{\mu<\kappa}\overline{\overline{\alpha}}^{\overline{\overline{\mu}}}$.
4. $L_{\kappa\kappa}=V \Longrightarrow \forall\nu\geq\kappa: 2^{\overline{\overline{\nu}}} \le (\overline{\overline{\nu}}^{\underline{\kappa}})^{+}$.
5. $L_{\kappa\kappa}=V \Longrightarrow \forall\nu\geq\kappa: 2^{(\overline{\overline{\nu}}^{\underline{\kappa}})} = (\overline{\overline{\nu}}^{\underline{\kappa}})^{+}$.
6. $L_{\omega\omega}=V \Longrightarrow GCH$.
7. $x\subseteq L_{\kappa\kappa\alpha}\wedge x\in L_{\kappa\kappa} \Longrightarrow \exists\beta<(\overline{\overline{\alpha}}^{\underline{\kappa}})^{+}: x\in L_{\kappa\kappa\beta}$.

J. A. Makowsky, Zürich