MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 31|1971

Grundlagen der Geometrie

18. 7. bis 24. 7. 1971

Unter Leitung der Herren Professoren F. Bachmann (Kiel), A. Barlotti (Perugia), H. Freudenthal (Utrecht) und E. Sperner (Hamburg) fand die Tagung über "Grundlagen der Geometrie" in diesem Jahr vom 18. bis 24. Juli statt.

Mit 60 Teilnehmern war diese Tagung ausserordentlich gut besucht. 35 Vorträge wurden gehalten, zu viele, als dass man von einer strengen Einhaltung der Vortragszeiten hätte absehen können. So fanden die meisten Diskussionen im Anschluss an die Vorträge Fortsetzungen zu einem späteren Zeitpunkt in interessiertem Kreise; Gelegenheiten dazu bietet Oberwolfach genug - ein hervorragendes Kennzeichen solcher Tagungen. Trotz der beachtlichen Teilnehmerzahl liess das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach keine Wünsche offen.

Die Referate und Diskussionen erstreckten sich in diesem Jahr über die verschiedensten Gebiete der Geometrie, zahlreiche Einzelergebnisse wurden vorgetragen; besonders viele betrafen die Gebiete der Spiegelungsgeometrie, Hjelmslev-Geometrie sowie der Inzidenzgeometrie.

Teilnehmer

J. André, Saarbrücken
H.-J. Arnold, Bochum
B. Artmann, Giessen
F. Bachmann, Kiel
A. Barlotti, Perugia
A. Basile, Perugia
D. Biallas, Hamburg
L. Bröcker, Kiel
S. S. Cairns, Cambridge/Engl.
H. S. M. Coxeter, zZt. Oberwolfach
K. J. Dienst, Darmstadt
D. A. Drake, Gainesville

G. Dühl, Hamburg
E. W. Ellers, Toronto
G. Ewald, Bochum
E. Fick, Dortmund
H. Freudenthal, Utrecht
C. W. L. Garner, Ottawa
M. Girardi, Rom
A. Giuculescu, Bukarest
M. Götzky, Kiel
H. Groh, Aachen
W. Heise, Hannover
H. Hotje, Hannover
J. Joussen, Dortmund
W. Junkers, Bonn
G. Kaerlein, Bochum
H. Karzel, Hannover
H. Kinder, Kiel
P. Klopsch, Kiel
H.-J. Kroll, Hannover
R. Lingenberg, Darmstadt
H. Mäurer, Darmstadt
A. Maschietti, Rom
K. Mathiak, Braunschweig
U. Melchior, Bochum
G. Menichetti, Florenz
K. Meyer, München
J. Misfeld, Hannover
J. Nalbach, Saarbrücken
W. Nolte, Darmstadt
U. Ott, Darmstadt
J.C. Petit, Limoges
I. Pieper, Hannover
E. Salow, Kiel
H. Salzmann, Tübingen
E. Schröder, Hamburg
W. Schwabhäuser, Bonn
W. Seier, Hamburg
J.T. Smith, San Francisco
K. Sörensen, Hamburg
U. Spengler, Kiel
E. Sperner, Hamburg
R. Stölting, Kiel
K. Strambach, Tübingen
J. Timm, Hamburg
V. Tomasic, Rijeka
H. Weiss, Braunschweig
D. Windelberg, Hannover
J. L. Zemmer, zZt. Giessen

Vortragsauszüge

J. ANDRE: Über nichtkommutative affine Räume

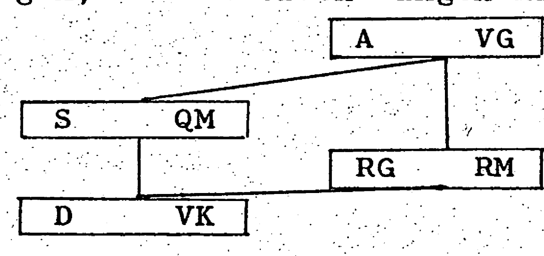
In affinen Räumen und vielen anderen geometrischen Strukturen stimmt die Verbindungsgerade von x mit y mit der von y mit x überein (x, y verschiedene Punkte). Beispiele von Inzidenzstrukturen, in denen diese Kommutativität der Bildung von Verbindungsgeraden nicht mehr stets gilt, sind die vom Vortragenden eingeführten pseudoaffinen Räume (Math.Z. 119, 254-266 (1971)); man kann sie in natürlicher Weise als Geometrien über Frobeniusgruppen beschreiben.

- 3 -

Eine rein geometrische Kennzeichnung dieser Räume wird angegeben unter der Voraussetzung der Kommutativität der Translationsgruppen.

H.-J. ARNOLD: <u>Die Geometrie der Ringe im Rahmen allgemeiner affiner Strukturen</u>

S bezeichne <u>die Klasse</u> der SPERNERschen schwach affinen Räume; QM die der zugeh. Quasimoduln; D die der desarguesschen Geom.; VK die der Vektorräume über Körpern; RM die der Ringmoduln. Da jeder S - Raum, der sich durch einen Ringmodul darstellen lässt, bereits ein D - Raum ist, führt der Verfasser eine "affine Liniengeometrie" A ein mit zugehörigen "vektoriellen Gruppoiden" VG , welche einen $\boxed{S \quad QM}$ und $\boxed{RG \quad RM}$ umfassenden Oberbegriff $\boxed{A \quad VG}$ liefern. Diese Begriffsbildungen führen auch zur geometrischen Axiomatik der RG, welche zu freien (hochrangigen) Moduln über beliebigen, assoziativen Ringen mit Eins gehören. Diese Ringgeometrien (RG) bestimmen ihren Ring bis auf Isomorphie eindeutig.



Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst in der Reihe : Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Heft 4.

A. BARLOTTI: <u>Construction of S-spaces using spreads</u>.

The construction given by J. André (1954, see also R. H. Bruck and R. C. Bose 1964, 1966 and B. Segre 1964) for translation planes can be used to obtain translation S-spaces.

Conditions on the spread are given which imply that the S-space is an ordinary affine space.

The results are obtained in a research done jointly with Dr. J. Cofman .

A. BASILE: On the completeness of regular $\{q(n-1)+m\,;\,n\}$ -arcs in finite projective planes.

The notion of regularity for $\{q(n-1)+m\,;\,n\}$ -arcs in finite projective planes is given and results on their completenes are obtained.

L. BRÖCKER: Ein neuer Beweis eines Satzes von Wähling

Jede zweiseitige projektive desargues'sche Inzidenzgruppe von dim. $\geqslant 2$ ist isomorph zu $D^*/_{K^*}$, D Divisionsalgebra über dem komm. Körper K. Für diesen zuerst von H. Wähling bewiesenen Satz wurde ein neuer einfacher Beweis vorgeführt.

H. S. M. COXETER: Inversive distance and the hyperbolic angle of parallelism

For 2 circles α , β in the Euclidean plane with radii a , b and distance c between their centres, the number

$$k = \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right|$$

is an inversive invariant because, when a , b , c satisfy the triangle inequalities , k is the cosine of the smaller angle of intersection of the circles. When the circles have at most one common point, their inversive distance δ is defined by $\cosh \delta = k$. When α reduces to a straight line and A is its nearest point to the centre of β , let 2θ be the angle subtended by β at A ; then the inversive distance δ between α and β ist given by

$$\cosh \delta = \operatorname{cosec} \theta \,|\, \text{whence } e^{-\delta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta .$$

If the circle with centre A orthogonal to β is chosen as the absolute circle for a Poincaré model of the hyperbolic plane, the tangents from A to β represent the lines through A parallel to the hyperbolic line β, inversive distance represents hyperbolic distance, and the equation

$$\theta = 2 \arctan e^{-\delta}$$

becomes Lobatschewsky's formula for the angle of parallelism corresponding to the distance δ.

K. J. DIENST: Beispiele nichtkommutativer PAPPUSscher affiner zweiseitiger Inzidenzgruppen.

Ist (G,S) eine S-Gruppe mit dreieckschneidenden Geraden - eine Gruppe, die nach U. Ott isomorph ist zu der erweiterten Spiegelungsgruppe einer PAPPUSschen affinen Ebene von Char. $\neq 2$ (die duale Gruppenebene von (G,S) ist eine affine Ebene) - so besitzt $K := [G,G]$ eine normale Partition

$$\Omega := \{ L^2 \mid L := G(pq),\ p,q \in S,\ p \neq q \} \cup \{ Z(G) \} .$$

Die Restklassengeometrie von K bezüglich Ω ist ein PAPPUSscher dreidimensionaler affiner Raum von Char $\neq 2$ und es gelingt eine gruppentheoretische Kennzeichnung dieser affinen Räume.
K ist bezüglich dieser Inzidenzstruktur eine nichtkommutative PAPPUSsche affine zweiseitige linear gefaserte Inzidenzgruppe. Insbesondere gilt $\mathrm{Exp}(K) = p$ für jede Primzahl $p \neq 2$, wenn die duale Gruppenebene von (G,S) eine affine Ebene von Char p ist. Damit sind die von H. Karzel und I. Pieper in "Bericht über geschlitzte Inzidenzgruppen" (Jber. Deutsch. Math.-Verein. 72 (1970) 70-114) gestellten Probleme 6.,7. und 8. gelöst. Ferner ist K eine nichtkommutative scharf transitive Kollineationsgruppe.

D. A. DRAKE: Structure of n-Uniform Translation Hjelmslev Planes

Let $S(n)$ denote the class of strongly n-uniform translation Hjelmslev planes. Then if $A \in S(n)$, A contains subincidence structures with induced parallelisms: ${}^1A, {}^2A, \ldots, {}^nA = A$. Each ${}^iA \in S(i)$. For $0 \leq j < i \leq n$,

${}^{i}A$ has an epimorphic image $({}^{i}A)_j \in S(i - j)$. Suppose the order of ${}^{1}A$, an ordinary affine plane, is $r = p^x$. Then the translation group of A is an abelian p-group with 2xw cyclic summands, w an integer $\leq n$. Then $({}^{i-w}A)_{j-w} \cong ({}^{i}A)_j$ for $w \leq j < i \leq n$. A method is given for constructing each $A \in S(n)$ from its substructure ${}^{n-1}A$. Using this constructive characterization of S(n), one obtains the following theorem: let P1,...,Pn be any sequence of ordinary translation planes with common order r. Then there exists an $A \in S(n)$ (for which $w = n$) such that $({}^{i}A)_{i-1} \cong Pi$ for $1 \leq i \leq n$.

E. ELLERS: Kennzeichnung involutorischer Geometrien

H. Karzel gab kürzlich eine Charakterisierung der Bewegungsgruppen absoluter Ebenen durch Gruppenräume. Dabei ist die geometrische Struktur i.a. nur ein echter Teil eines projektiven Raumes. Für die zugrunde gelegte Gruppe wird gefordert, dass sie ein Erzeugendensystem D besitzt, so dass A) $x^2 = 1$ ist für $x \in D$, B) $x D x \subset D$ für $x \in D$ und C) in D gibt es Elemente a, b, c mit $(a\ b\ c)^2 \neq 1$. Wird die letzte Forderung durch ihre Negation ersetzt, so ergeben sich neue Geometrien, die involutorischen Geometrien, die linear gefaserte kommutative Inzidenzgruppen mit Eigentlichkeitsbereich sind. Für diese Geometrien wird eine algebraische Darstellung durch kommutative lokale Algebren angegeben.

G. EWALD: Über Spiegelungsgeometrie beliebiger Dimension

In Verallgemeinerung von Ergebnissen Bachmanns, Ahrens' und Kinders wird ein Axiomensystem für metrische Räume beliebiger Dimension angegeben. Ausgangspunkt ist eine Gruppe B mit einem System $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{G}$ von involutorischen Erzeugenden, so dass $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ je unter inneren Automorphismen festbleiben ($\mathfrak{P}$: Punkte; $\mathfrak{G}$: Geraden). Man kann dann B als Untergruppe einer projektiv-metrischen Gruppe darstellen.

H. GROH: Aus Moebius-Ebenen erzeugte Laguerre-Ebenen

Moebius planes are axiomatic abstractions of the system of planar cuts of the 2-sphere S_2. Laguerre planes are axiomatic abstractions of the system of non-vertical planar cuts of the cylinder $S_1 \times R$ in R^3. In spite of similarity in the axioms, there exists non connection between these two classes of structures. Here we consider, as special instances of topological geometries, topological Moebius (resp. Laguerre) planes, i.e. such planes where point set P (resp. S) and circle set K (resp. cycle set Z) are endowed "compatibly" with extrinsic topologies. Under the assumption of flat topologies (P and S are surfaces, i.e. locally homeomorphic to R^2), we find such a connection by showing that each flat Moebius plane P and a point $p \in P$ generates a flat Laguerre plane.

W. HEISE: 3-ovale in Möbiusebenen

Eine Punktmenge Q einer Möbiusebene heisst 3-Oval, wenn jeder Kreis mit Q höchstens 3 Punkte gemeinsam hat und wenn es zu je 2 Punkten aus Q genau einen Kreis K gibt, der mit Q nur diese beiden Punkte gemeinsam hat. In einer ebenen Möbiusebene ist jedes 3-Oval bogenweise total unzusammenhängend. Das besagt für die klassische Möbius-ebene, dass kein 3-Oval eine algebraische Menge ist.

H. HOTJE: Projektive G-Faserräume

Es sei $P > 0$ eine ganze Zahl. Ein projektiver P - Faserraum wird gebildet durch eine Überdeckung eines projektiven Raumes mit $P - 1$ isomorphen Räumen. Der sphärische Raum ist ein Beispiel eines 2- Faserraumes. Es wird über projektive G - Faserräume berichtet, die durch mehrwertige Ordnungs-funktionen strukturiert sind. Ein angeordneter projektiver G - Faserraum, dessen Ordnungsgruppe G sei, heisst projektiver G - Faserraum, wenn $|G| = P$ gilt. Es wird gezeigt, dass

- 8 -

die desargues'schen projektiven G - Faserräume S gerade diejenigen sind, die durch einen Vektorraum (V, K) induziert werden, für den $K^*(\cdot)$ einen Normalteiler besitzt, der die Kommutatorgruppe $K^{*\prime}$ enthält. Und zwar ist $G \cong K^*/P$ und $S \cong V^*/P$. Für $P = K^*$ ergibt sich gerade der Fundamentalsatz der proj. Geometrie.

W. JUNKERS: <u>Universelle Ordnungsfunktionen</u>

Der Begriff "Ordnungsfunktion" wird hier in der gleichen Allgemeinheit verstanden wie in der Abhandlung "Mehrwertige Ordnungsfunktionen" des Verfassers (Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Heft 3). Das Motiv der Untersuchung ist das Bestreben, bei vorgegebener Inzidenzstruktur R für jede Gruppe G einen möglichst guten Überblick über alle regulären G - Ordnungsfunktionen auf R zu gewinnen. Dieses Problem wird hier mit Hilfe des Begriffs "universelle reguläre Ordnungsfunktion auf R" präzisiert, aufgrund einer neuen - graphentheoretischen - Interpretation des Begriffs "Ordnungsfunktion" verallgemeinert und mit den Mitteln der kombinatorischen Topologie gelöst. Besonders untersucht werden die Ordnungsfunktionen auf projektiven Ebenen und ihre Beziehungen zu Ordnungsfunktionen auf affinen Ebenen.

P. KLOPSCH: <u>Bewertungskonvexe vollständige Spiegelungsgruppen</u>

Sei $V = V_{n+1}(K,f)$ ein $(n+1)$-dimensionaler metrischer Vektorraum $(n \geq 1)$ über einem kommutativen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ mit beliebigem Radikal. $O = O(V)$ sei die engere orthogonale Gruppe von V. Die involutorischen Elemente aus O heissen Spiegelungen. Eine Untergruppe G von O heisst eine vollständige Spiegelungsgruppe von V, wenn G von Spiegelungen erzeugt wird und folgende Bedingungen erfüllt sind: 1) Die Bahnen der Spiegelungen aus G sind anisotrop, 2) G enthält mit einer

Spiegelung σ auch jede Spiegelung, deren Bahn in der Bahn von σ enthalten ist, 3) Es gibt in G Spiegelungen mit n-dimensionaler Bahn. Die vollständigen Spiegelungsgruppen sind - von Extremfällen abgesehen - genau die Bewegungsgruppen der absoluten Geometrie im Sinne von BACHMANN, AHRENS und KINDER. Sei R ein Bewertungsring von K. Eine vollständige Spiegelungsgruppe G von V heisst R-konvex, wenn die zu G gehörige Punktmenge $\{P | \sigma_p \in G, \dim P = n\}$ im projektiven Raum PV konvex ist bezüglich R im Sinne von Pejas, Math. Zeitschr. 83, S. 440/441. Es wurde ein Satz angegeben, welcher die Klasse aller R-konvexen vollständigen Spiegelungsgruppen von V beschreibt und für globales K einen vollständigen Überblick über diese Klasse liefert.

Literatur: W. Pejas, Eine Klasse von Untergruppen orthogonaler Gruppen über bewerteten Körpern, Hamburger Abhandlungen, Band 34 (1969).

KROLL, H.-J.: <u>Ordnungsfunktionen von $\varkappa$-affinen Räumen</u>

Der von Sperner eingeführte Begriff der Ordnungsfunktion wird auf $\varkappa$-affine Räume angewendet. Für $\varkappa$-affine Räume, deren Punktmenge sich als Teilmenge O der Punktmenge eines projektiven Raumes π und deren Kurven sich als Schnitt von O mit $\varkappa$-dimensionalen Teilräumen von π darstellen lassen, erhalten wir folgende Ergebnisse:

1.) Die Beschränkung einer projektiven Ordnungsfunktion von π auf $(O,\mathfrak{K})$ ergibt eine Ordnungsfunktion von $(O,\mathfrak{K})$, und umgekehrt lässt sich jede Ordnungsfunktion von $(O,\mathfrak{K})$, so darstellen.

2.) Ist $M \subset O$, $|M| \leq \varkappa - 1$ und $(\,|\, , \,)_M$ eine Ordnungsfunktion des $(\varkappa - |M|)$-affinen Raumes $(O \setminus M, \mathfrak{K}(M))$, der durch Herausnahme von M aus $(O,\mathfrak{K})$ entsteht, so gibt es genau $2^{|M|}$ Fortsetzungen von $(\,|\, , \,)_M$ auf $(O,\mathfrak{K})$. Je zwei Fortsetzungen sind äquivalent.

3.) Die Ordnungsfunktion $(\ |,\ )$ von $(O,\mathfrak{K})$ sei durch $(\ |,\ )_\pi$ von π induziert. $(\ |,\ )$ ist genau dann normal, wenn für $(\ |,\ )_\pi$ gilt: Ist H eine Hyperebene von π mit $|H \cap O| = \varkappa - 1$, so liegt $O \setminus H$ auf einer Seite von H.

K. MATHIAK: Bewertete Vektorräume und Hjelmslev'sche Geometrie

K sei ein bewerteter Körper mit der Wertegruppe W. Ein Vektorraum T über K heisst ein bewerteter Vektorraum, wenn eine Funktion ord : $T \to W$ definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

V_1 : ord $x = o \rightleftarrows x = o$

V_2 : ord $(x\alpha) = $ ord $x \cdot |\alpha|$

V_3 : ord $(x+y) \leq$ Max (ord x, ord y)

V_4 : Ist X ein endlich dimensionaler Unterraum von T, so ist $X_1 = \{ x \in T \mid \text{ord } x \leq 1\}$ ein endlich erzeugter B-Modul, wobei B der Bewertungsring von K ist.

Zu jedem Hauptideal I von B lässt sich eine Hjelmslev'sche Geometrie H_I erklären. In diesen Geometrien werden die Vereinigungs- und Schnittmengen bestimmt und gezeigt, dass die Dimensionalformel gilt.

A. MASCHIETTI: An axiomatic characterization of affine spaces

We are considering particular Sperner spaces, (briefly, S-spaces), "regular" S-spaces, so defined : If Σ is an S-space and Σ_1 , Σ_2 are subspaces of Σ, the union of Σ_1 and Σ_2 is obtainable in this way : $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ consists of all points which are on :

i) lines joining a point of Σ_1 with a point of Σ_2;
ii) lines parallel to lines of Σ_1 (or Σ_2) and coming out of point of Σ_2 (or Σ_1).-

This condition is verified by any affine space . The main result is the converse: <u>Every regular S-space is an affine space</u> .

G. MENICHETTI: <u>Quasicorps distributifs et commutatifs d'ordre p^3</u>

Si on désigne par R l'anneau des matrices 3×3 sur un corps de Galois G F (p) , p premier ≥ 3 , on donne une caractérisation géométrique de certains sous-groups de R , associés de façon biunivoque à des quasi-corps distributifs et commutatifs d'ordre p^3 . Cela nous permet de déterminer tous les quasicorps distributifs et commutatifs d'ordre p^3 .

K. MEYER: <u>Die WITTsche Halbgruppe bei endlichen Körpern</u>

V, ein metrischer Vektorraum über dem endlichen Körper K (dim V = n). Die quadratische Form q sei durch $f(\xi, \eta) = q(\xi + \eta) - q(\xi) - q(\eta)$ mit der symmetrischen Bilinearform f verknüpft. $Q := \{\xi \in V : q(\xi) = 0\}$, L (M) := lineare Hülle von M für $M \subseteq V$. Für $U_i \subseteq V$ schreiben wir $U_1 \oplus U_2$ für:
1) $U_1 \oplus U_2 = L(U_1, U_2)$,
2) $U_1 \perp U_2$,
3) $U_1 \cap U_2 = 0$.
Ferner gelte: $H_i := L(\alpha,\beta)$ mit $f(\alpha,\alpha) = f(\beta,\beta) = 0$, $f(\alpha,\beta) = 1$, sowie : R:= (anisotroper) Kernraum U_o bei char $K \neq 2$, so dass $R \oplus (V^{\perp} \cap Q) = V^{\perp}$, genannt Defektraum, bei char K = 2. Dann ist $V = H_1 \oplus \dots \oplus H_p \oplus R \oplus (V^{\perp} \cap Q)$.
Es gibt ein U mit $V = V^{\perp} \oplus U$, dim U = u und $U = L(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_u)$. Dann ist $D := (-1)^{\frac{u(u-1)}{2}} \det f(\varepsilon_i, \varepsilon_k) \bmod K^{*2}$ eine GL_n - Invariante und es folgt: n,p,d = dim R , i = Dimension eines maximalen Teilraumes auf Q und D bilden ein vollständiges $GL_n(K)$-Invariantensystem für die Menge $\mathfrak{D}$ der quadratischen Formen auf V. Für $q_i \in \mathfrak{D}$ erklärt man : $(V_1, q_1) \times (V_2, q_2) \doteq (V_1 \times V_2, q := q_1 + q_2)$. Auf der abelschen Halbgruppe $(\mathfrak{D}, +)$ mit Null führt der übliche Äquivalenzbegriff quadratischer Formen zur abelschen Halbgruppe $\tilde{\mathfrak{D}}$ der Äquivalenzklassen. Rechnet man

modulo derjenigen Formen, die zur Basis $H_1 \oplus \ldots \oplus H_p$ gehören, so erhält man die WITTsche Halbgruppe (abelsch mit Null). Bei endlichen Körpern ergibt sich bei char $K \neq 2$ die KLEINsche Vierergruppe bzw. $\mathbb{Z}/(4)$(PFISTER?), bei char $K = 2$ die multiplikative Halbgruppe des Ringes aus $\mathbb{Z}/(3)$.

J. NALBACH: Über das spezielle Austauschaxiom (A_2) in einer Kongruenzklassengeometrie

Die Kongruenzklassengeometrie $\Gamma(\mathfrak{A})$ einer Algebra $\mathfrak{A}$ ist d. u. n. d. eine Geometrie mit eindeutigen Verbindungsgeraden, wenn im Verband $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ der Kongruenzrelationen von $\mathfrak{A}$ die Atome von der Form $\Theta(a,b)$, $(a,b) \in A^2 - 1_A$ sind. Hieraus folgt z.B., dass im Falle der Gültigkeit von (A_2) in $\Gamma(\mathfrak{A})$ der Verband $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ geometrisch ist.

W. NOLTE: Metrische Räume mit dreiseitverbindbaren Teilräumen

Es wird ein Axiomensystem $\mathfrak{A}_n$ mit folgender Eigenschaft angegeben: Man erfasst als Modelle die engeren orthogonalen Gruppen $O^*_{n+1}(K,f)$ (n+1)-dimensionaler metrischer Vektorräume (V,f) über beliebigen Körpern K (char. $K \neq 2$) mit beliebigem Index und dim Rad $V \leq 1$ sowie eine Klasse von Untergruppen der genannten Gruppen.

Axiomensystem $\mathfrak{A}_n$: Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, γ ein bei inneren Automorphismen invariantes Erzeugendensystem aus involutorischen Elementen. Eine Teilmenge T von γ heisst Teilraum, wenn gilt : $a,b \in T;\ a \neq b;\ a\,b\,x \in \gamma \rightarrow x \in T$. Zwei Elemente a,b aus γ heissen orthogonal, wenn a b involutorisch ist. Als Axiome werden im wesentlichen gefordert : Das Austauschaxiom und die Existenz eines dreiseitverbindbaren Teilraumes, der von n paarweise orthonalen Elementen aus γ erzeugt wird. Es lässt sich zeigen : Jedes Modell von $\mathfrak{A}_n$ ist isomorph einer der oben genannten Gruppen (γ entspricht dabei einer Teilmenge der Menge der Symmetrien längs nichtisotropen Vektoren).

U. OTT: Endliche Polardreiseitgeometrien

Sei G eine endliche Gruppe und S ein Erzeugendensystem involutorischer Elemente, in dem der Dreispiegelungssatz gilt :

Aus abx , aby , abz inv. , $a, b, x, y, z \in S$
und $ab \neq 1$ folgt $x y z \in S$.

Ferner enthalte S drei Involutionen, die eine KLEINsche Vierergruppe erzeugen. Wenn man triviale Fälle durch eine Existenzmindestforderung ausschliesst, ist S genau dann eine Konjugiertenklasse, wenn G/Z(G) einfach ist. Und G/Z(G) ist einfach, falls G zu keiner $PGL_2(n)$, $n \equiv 1\ (2)$, isomorph ist.

J. C. PETIT: Projective ternary fields and their use in homomorphisms of projective planes

Any ternary field K used to coordinate a projective plane can be embedded into a "projective ternary field" . Each point P of the plane is identified with a subset of K^3; any element (x,y,z) of this subset is called a set of projective coordinates of P; the same is done for lines obtaining thus a kind of homogeneous coordinates. Incidence of points and lines is described with the ternary law of the projective ternary field. Homomorphisms of projective planes are characterized by "homomorphisms of ternary projective fields" defined in a suitable way.

A "ternary class-field" can be defined from any ternary field with a valuation. There exists a natural way of defining a homomorphism between the corresponding planes; it can be proved by considering a homomorphism of projective ternary fields. As these results include the case of fields there appears a kind of connexion between geometric algebra and algebraic geometry.

I. PIEPER: Über zwei nicht-zweiseitige Klassen von Inzidenzgruppen

Der Vortrag handelt von a-zweiseitigen und kernzweiseitigen geschlitzten Inzidenzgruppen. Beide Begriffe sind Verallgemeinerungen des Begriffs der zweiseitigen Inzidenzgruppe. Sie umfassen alle projektiven Inzidenzgruppen und unter den affinen gerade die zweiseitigen. Die beiden Klassen enthalten sich nicht gegenseitig, wie man bei der Untersuchung der endlichen Modelle feststellt. Eine nicht projektive Inzidenzgruppe aus dem Durchschnitt der beiden Klassen ist zweiseitig, wenn sie zerfällt. Diese Eigenschaft ist kennzeichnend im Falle von endlichen Inzidenzgruppen.

E. SALOW: Singuläre Hjelmslev-Gruppen

Die enklidischen Bewegungsgruppen lassen sich mit Hilfe von Matrizen über einem Körper von Charakteristik $\neq 2$ darstellen. Ersetzt man dabei den Körper durch einen kommutativen Ring mit 1 und 1/2, in dem 1 und 0 die einzigen idempotenten Elemente sind, so erhält man eine singuläre Hjelmslev-Gruppe im Sinne von F. Bachmann. Verzichtet man auf die Voraussetzung, dass 0 und 1 die einzigen idempotenten Elemente sind, so ergibt sich eine singuläre Fast-Hjelmslev-Gruppe. Zu jeder singulären Fast-Hjelmslev-Gruppe $\mathfrak{H}$ gibt es eine singuläre Hjelmslev-Gruppe $\mathfrak{G}$ und einen punkt- und geradentreuen Gruppenhomomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$, dessen Kern im Zentrum Z ($\mathfrak{G}$ger) der Menge der geraden Elemente von $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Setzt man für eine singuläre Hjelmslev-Gruppe $\mathfrak{G}$ voraus, dass gewisse Punkte eine Verbindungsgerade besetzen, so ist $\mathfrak{G}$ in dem Sinne algebraisierbar, dass ein punkt- und geradentreuer Gruppenhomomorphismus von $\mathfrak{G}$ in eine Matrizengruppe der angegebenen Art zu einem kommutativen Ring mit 1 und 1/2 existiert, dessen Kern Z ($\mathfrak{G}$ger) ist.

H. SALZMANN: 4-dimensionale homogene affine Ebenen

Let $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{O})$ be a topological affine plane with pointset A homöomorphic to $\mathbb{R}^4$. If a connected collineation group Δ

of $\mathfrak{A}$ acts transitively on the line of infinity, then either Δ fixes a point $a \in A$, or $\mathfrak{A}$ is arguesian (isomorphic to the complex plane). Cor.: $\mathfrak{A}$ line homogeneous locally compact 4-dimensional affine plane is arguesian.

E. SCHRÖDER: Axiomatische Kennzeichnung von kinematischen Räumen

Es wird das folgende Axiomensystem angegeben : Ist G eine Gruppe mit dem Erzeugendensystem E, und ist $\pi = (\mathfrak{P},\mathfrak{G},\mathfrak{E},I)$ ein projektiver Raum (Hüllenoperator: " $\sqcap$ "), so heisst das Tripel (G,E,π) kinematischer Raum, wenn gilt:

(O) (Involut.): $x \in E \Rightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 1$.

(A) (Invarianz): $x , y \in E \Rightarrow x\,y\,x \in E$.

(E) (Einbettung): E_g (= Menge der gerade erz. Elem. von G) $\subset \mathfrak{P}$ (= Punktmenge von π) $\wedge\ E_u$ (= Menge der ungerade erz. Elem. von G) $\subset \mathfrak{E}$ (= Ebenenmenge von π)

(I) (Inzidenz): $\alpha\ I\ \epsilon \rightleftarrows \alpha\,\epsilon \in E$ für $\alpha \in E_g \wedge \epsilon \in E_u$.

(R) (Reichhaltigkeit): $g \in \mathfrak{G}$ (=Geradenmenge von π) $\wedge\ \ulcorner g \urcorner \cap E_g \neq \emptyset \Rightarrow |\ulcorner g \urcorner \setminus E_g| \leq 2$.

Sei nun $x \in E$. Besteht $\ulcorner x \urcorner \cap (\mathfrak{P} \setminus E_g)$ aus zwei Geraden (Axiom(M)) bzw. aus einem Punkt (Axiom(U)) bzw. aus der leeren Menge (Axiom(L)), so entstehen die kinematischen Räume Minkowskischer bzw. euklidischer bzw. elliptischer Ebenen oder involutorische Geometrien. Zur Kennzeichnung der kinematischen Räume von hyperbolischen Ebenen wird man in x eine geeignete Eikurve auszeichnen (Axiom(H)).

W. SCHWABHÄUSER: Ein affiner Raum als Vereinigung von Räumen höherer Dimension

Affine (euklidische) Räume werden hier betrachtet als Relationalstrukturen $\langle A,B \rangle$, die (bis auf Isomorphie) aus Vektorräumen über angeordneten Körpern durch die übliche geometrische Interpretation von A als Menge der Punkte, B als Zwischenbeziehung (dreistellige Relation zwischen Punkten) entstehen.

Für gewisse Klassen von angeordneten Körpern ergibt sich aus modelltheoretischen Überlegungen die Existenz von Ketten n-dimensionaler affiner Räume über Körpern der Klasse ($n \geq 3$), deren Vereinigung eine kleinere Dimension $m \geq 2$ hat. Hier wird direkt gezeigt:

Satz: Vor.: (i) $2 \leq m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. (ii) $\langle \mathfrak{K}_\nu \mid \nu \in \mathbb{N} \rangle$ ist eine Kette von angeordneten Körpern, so dass $(\mathfrak{K}_{\nu+1} : \mathfrak{K}_\nu) \geq (n-m+1)^m$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ (der Körpergrad darf auch eine unendliche Kardinalzahl sein).

Beh.: Es gibt eine Folge $\langle \mathfrak{A}_\nu \mid \nu \in \mathbb{N} \rangle$, so dass stets $\mathfrak{A}_\nu$ Unterstruktur von $\mathfrak{A}_{\nu+1}$ (Ketteneigenschaft), $\mathfrak{A}_\nu$ ein n-dimensionaler affiner Raum über $\mathfrak{K}_\nu$ und $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_\nu$ ein m-dimensionaler affiner Raum über $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{K}_\nu$ ist.

W. SEIER: Kollineationen von Translationsstrukturen

Translationsstrukturen werden algebraisch durch Gruppenpartitionen beschrieben. Ist (G,P) eine Gruppenpartition, so sei $\bar{G}$ die Menge aller Translationen der Form $\bar{a} : x \to a+x$ mit $a \in G$. Ist $\Gamma(G,P)$ die Kollineationsgruppe von (G,P) und Γ_0 die Standuntergruppe des neutralen Elements, so ist $\Gamma(G,P)$ Komplexprodukt von $\bar{G}$ und Γ_0. Es gilt:

Satz: Γ_0 besteht aus allen bijektiven Abb. f von G in sich die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) $f(V) \in P \;\forall V \in P$

(2) Zu $a,b \;\exists\; b'$ aus der Komponente von b mit $f(a+b) = f(a) + f(b')$.

Es wurde untersucht, unter welchen Voraussetzungen Abb. dieser Art Automorphismen sind.

J. SMITH: Metric geometries of arbitrary dimension

The following synthetic axiom system for metric geometry of arbitrary dimension is presented: Wyler's Incidence Axioms [Duke j., 1953]; Lenz's Orthogonality Axioms [Math. Ann., 1962] modified to admit elliptic models; existence of point and line reflections; and the Three-Reflections Principles for these reflections. By results of Wyler and Lenz, the metric geometry can be embedded in a projective ideal geometry, and the orthogonality relation can be represented by an Hermitian form. (Wyler's special axioms for the three dimensional case follow from results of Ahrens [Math. Z., 1959]; extension of Lenz's result to the elliptic case follows arguments of Bachmann [AGS].) Arguments of Ahrens and Kinder [Diss., Kiel, 1965] are adapted to show that the field of scalars of the ideal geometry is commutative and not of characteristic two, and that the Hermitian form is bilinear. A representation theorem is obtained: the metric geometries are certain subgeometrics of affine and projective metric geometries over commutative fields of characteristic different from two. These coincide in the finite dimensional case with the metric subdomains considered by Klopsch [Diss., Kiel, 1968]; therefore, in this case, the present axiom system is equivalent to Kinder's.

A lattice theoretic characterization is given for those flats which have reflections - all finite dimensional flats are included.

An axiom system is presented for projective geometry of arbitrary dimension with an elliptic polarity - the undefined notions are "point" and "conjugary". The arguments involved here are adapted from Kinder + Wolff [Hamburger Abh., 1970]. This system is translated into group theoretic language. On addition of the Three-Reflections Axiom, a group theoretic axiom system is obtained for elliptic metric geometry of arbitrary dimension. These last arguments are analogous to those of Kinder [Arch. Math., 1970].

U. SPENGLER: Symplektische Gruppen

Wir betrachten die engeren symplektischen Gruppen G symplektischer (endlich-dimensionaler) Vektorräume (V,f) über Körpern von Charakteristik $\neq 2$. Die Elemente aus G mit 1-dimensionaler, nicht in Rad V enthaltener Bahn heissen Transvektionen. Jedes $\varphi \in G$ ist also Produkt von endlich vielen Transvektionen darstellbar. Die Länge $L(\varphi)$ sei die kleinste Anzahl von Transvektionen mit der Eigenschaft, dass φ sich als Produkt dieser Transvektionen darstellen lässt.

Für beliebiges Radikal von V gilt :

Längensatz. Ist φ involutorisch, so ist $L(\varphi)=\dim \mathrm{Bahn}\,\varphi+1$.
Ist φ nicht involutorisch, so ist $L(\varphi)=\dim \mathrm{Bahn}\,\varphi+\dim(\mathrm{Bahn}\,\varphi\cap \mathrm{Rad}\,V)$.

Relationensatz. Die Relationen zwischen Transvektionen sind Folgerelationen der ≤ 4-stelligen Relationen dieser Art.

Für Rad V = 0 und dim V ≥ 4 wird eine axiomatische Charakterisierung der symplektischen Gruppen angegeben (die auf der Kenntnis des Relationen- und des Längensatzes beruht).

R. STÖLTING: Endliche Hjelmlev-Gruppen

Das Paar (G,S) wird Hjelmslev-Gruppe genannt, wenn es einem Axiomensystem genügt, welches aus dem Bachmann'schen (in "Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff") hervorgeht, indem man nicht mehr die Existenz und die Eindeutigkeit einer Verbindungsgeraden fordert, sondern nur noch die des Lotes. Singulär heisst eine Hjelmslev-Gruppe genau dann, wenn $P^3 \subseteq P$ gilt, wobei P die Punktmenge bezeichnet.

Eine endliche Hjelmslev-Gruppe, bei der die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden gilt, ist immer singulär. Die kleinste nicht-singuläre Hjelmslev-Gruppe (G,S) hat die Eigenschaft, dass es eine Menge von Involutionen $S'\neq S$, $S'\subset G$ gibt, so dass (G,S') eine singuläre Hjelmslev-Gruppe ist. (G ist dabei die Automorphismengruppe der Pappus-Konfiguration und hat die Ordnung 108.).

Par abus de language bezeichne man G als Hjelmslev-Gruppe, wenn es eine Menge $S \subset G$ gibt, so dass (G,S) eine Hjelmslev-Gruppe ist. Es gilt der folgende Satz: Sei G eine endliche Gruppe. G ist genau dann eine Hjelmslev-Gruppe, wenn

(1) die 2-Sylowgruppen Diedergruppen der Ordnung mindestens 4 sind und

(2) für jede Klein'sche Vierergruppe $V \subseteq G$ gilt: $C_G(V) = V$ und $|N_G(V) : C_G(V)| \leq 2$.

K. STRAMBACH: Algebraische Ebenen

Es wurde gezeigt, daß die klassische Ebene über den komplexen Zahlen die einzige projektive Ebene ist, die sich auf einer projektiven Varietät so realisieren läßt, daß ihre Geraden algebraische Kurven dieser Varietät sind.

J. L. ZEMMER: Valuation Near-fields and Hjelmslev Geometry

An algebraic characterization of a place for a (not necessarily planar) near-field, due to E. Davis, is given. This is used to motivate the definition of a valuation of a near-field in such a way that a near-field with a valuation has a place.

A particular example of a near-field, given by W. Kerby, is seen to have a valuation. This example gives rise to a local near-ring, which is then used to construct an affine, translation Hjelmslev plane which is not Desarguesian.

J. Nalbach
(Saarbrücken)