MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 33/1971

Endliche Gruppen und Permutationsgruppen

1.8. bis 7.8.1971

Die Tagung stand unter der Leitung von Herrn Prof.Dr.B.Huppert (Mainz). Es haben 36 Mathematiker (davon 13 aus dem Ausland) teilgenommen, 22 Vorträge wurden gehalten.
Behandelt wurden Probleme aus der Theorie der endlichen Gruppen, insbesondere aus dem Gebiet der endlichen einfachen Gruppen, der Permutationsgruppen und der endlichen auflösbaren Gruppen. Daneben wurden in einem Vortrag auch von endlichen Gruppen erzeugte Varietäten betrachtet.

Teilnehmer:

R.Baer, Zürich
B.Baumann, Bielefeld
H.Bender, Chicago (USA)
M.J.Collins, Oxford (England)
M.Deckers, Mainz
U.Dempwolff, Mainz
K.Doerk, Mainz
B.Fischer, Bielefeld
W.Gaschütz, Kiel
Graddon, Coventry (England)
F.Gross, Kiel
H.Heineken, Erlangen
M.Herzog, Tel-Aviv (Israel)
K.Johnsen, Kiel
O.Kegel, London (England)
A.Kerber, Giessen
M.Klemm, Mainz
M.Küchler, Bielefeld
H.Kurzweil, Tübingen
R.Maier, Tübingen
G.Michler, Tübingen
J.Neubüser, Aachen
P.Neumann, Oxford (England)
M.-P.Ng, Coventry (England)
J.B.Olsson, Aarhus (Dänemark)
F.Roesler, München
J.S.Rose, Newcastle (England)
P.Rowlinson, Stirling (England)
P.Schmid, Tübingen
R.Schmidt, Kiel
U.Schoenwaelder, Aachen
B.Scimemi, Padova (Italien)
G.A.Stoy, Oxford (England)
T.G.Timmesfeld, Bielefeld
H.Wielandt, Tübingen
G.Zappa, Florenz (Italien)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge :

B. BAUMANN: Spezielle Überdeckungen von Konjugiertenklassen

Sei $G = \langle D \rangle$ eine endlich Gruppe und D eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung p, wobei p eine Primzahl ist. Ferner sei $\underline{C} = \{H_1, \dots, H_n\}$, wobei H_i echte Untergruppen von G seien ($i = 1,\dots,n$). Gilt (1) $|\underline{C}| = p+1$, (2) $U \cap V \cap D = \bigcap_{H \in \underline{C}} H \cap D$ für $U, V \in \underline{C}$ und $U \neq V$, (3) $\bigcap_{H \in \underline{C}} H \cap D \neq \emptyset$, so heisst $\underline{C}$ "spezielle Überdeckung".- Es gilt folgender

Satz. Sei G eine endliche Gruppe, die von einer Konjugiertenklasse D von Elementen einer Primzahlordnung p ($\neq 2$) erzeugt werde. Besitzt D eine spezielle Überdeckung und ist G' einfach sowie $Z(G) = 1$, so ist G isomorph $PSL(n,p)$ $(n \geq 3)$ oder $PSp(2n,p)$ $(n \geq 2)$.

H. BENDER: Maximale Untergruppen von einfachen Gruppen

Ist G eine endliche einfache Gruppe, so ist offensichtlich $N_G(A) \leq M$ für alle Normalteiler $A \neq 1$ einer maximalen Untergruppe M von G.

Daraus lassen sich unter gewissen Verhältnissen Informationen auch über die Normalisatoren anderer Untergruppen herleiten. Um mit Bedingungen auszukommen, die bei allgemeinen Klassifikationsproblemen durch die Induktionsvoraussetzung immer gegeben zu sein scheinen, ist es nötig anzunehmen, dass M den Zentralisator einer Involution enthält.

Der Grund dafür ist, dass allgemein in einer endlichen Gruppe H die Einbettung einer $C_H(t)$-invarianten Untergruppe B (t eine Involution, B direktes Produkt einfacher Gruppen oder nilpotent von ungerader Ordnung) sehr eingeschränkt ist. Liegt B zum Beispiel in einem Normalteiler ungerader Ordnung, so liegen die Elemente $t^{-1}b^{-1}tb$, $b \in B$, sogar in einem nilpotenten Normalteiler.

M.J.COLLINS: <u>The characterisation of the simple unitary groups $U_3(2^n)$ by their Sylow 2-subgroups</u>

I have discussed the proof of the following result:

<u>Theorem</u>. Let S_n be a Sylow 2-subgroup of the simple unitary group $U_3(2^n)$, $n \geq 2$. If G is a finite group whose Sylow 2-subgroups are isomorphic to S_n, then either G is soluble of 2-length one, or G has a chain of normal subgroups $G \supseteq L \supseteq M \supseteq 1$ with M and G/L of odd order, and L/M isomorphic to $U_3(2^n)$.

M.DECKERS: <u>Eine Charakterisierung der einfachen Gruppe von Held</u>

Der Beweis des folgenden Resultats wurde skizziert:
Sei G eine endliche einfache Gruppe, die eine Involution besitzt, deren Zentralisator isomorph ist zum Zentralisator einer nicht 2-zentralen Involution von der einfachen Gruppe He von Held. Hat eine 2-Sylowgruppe von G die Ordnung 2^{10}, so ist $G \cong He$.

W.GASCHÜTZ: <u>$H^1(G,A)$</u>

Die Struktur von $H^1(G,A)$ wurde für auflösbare Gruppe G und irreduziblen G-Modul A diskutiert. Es gelingt dann mit der Kenntnis über $H^1(G,A)$ die Struktur der Gruppe B der Automorphismen von G zu beschreiben, die alle Normalteiler von G (im ganzen) festlassen. B ist auflösbar, und die Kommutatorlänge von B lässt sich in einfacher Weise durch die Hauptreihenlänge von G abschätzen.

M.HERZOG: <u>Fixed-point-free automorphisms of even order</u>

The aim of the talk was to prove the following

<u>Theorem</u>. Let G be a finite group with a fixed-point-free automorphism ϕ of order 2n. Suppose that $(|G|,2n) = 1$ and $C_G(\phi^n)$ is abelian. Then G' is nilpotent.

If ϕ is a fixed-point-free automorphism of G of order 2^r, then it is well known that $(|G|,2) = 1$. Hence the following corollary holds:

Corollary 1. Let G be a finite group with a fixed-point-free automorphism ϕ of order 2^r. If $C_G(\phi^{2^{r-1}})$ is abelian, then G' is nilpotent.

If, finally, ϕ is a fixed-point-free automorphism of G of order 4, then it is easily seen that $C_G(\phi^2)$ is abelian. Thus our theorem yields the following result of Gorenstein and Harada:

Corollary 2. If G is a finite group with a fixed-point-free automorphism of order 4, then G' is nilpotent.

A. KERBER: Aus der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

Die Darstellungstheorie von Kranzprodukten ist für sich selbst wie durch ihre Anwendungen im Rahmen der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen von Interesse. Sie tritt u.a. bei der Ermittlung verallgemeinerter Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen auf, weil die Zentralisatoren von Permutationen in S_n direkte Produkte aus Kranzprodukten zyklischer p-Gruppen mit symmetrischen Gruppen sind. So lässt sich die Berechnung verallgemeinerter Zerlegungszahlen von S_n auf die Berechnung von Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen S_r $(r\leq n)$ zurückführen. Die verallgemeinerten Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen erweisen sich als ganzrational, was für alternierende Gruppen wohl für p=2 (Osima), aber nicht immer gilt. Diese Sätze über S_n und alle p, A_n und p=2 lassen sich zu einem Satz über Kranzprodukte $G \wr S_n$ verallgemeinern.

M.KLEMM: Charakterisierung der Gruppen $PSL(2,p^f)$ und $PSU(3,p^{2f})$

Ist G eine endliche Gruppe, deren Charaktertafel mit der von $PSL(2,p^f)$ oder $PSU(3,p^{2f})$ übereinstimmt, so ist G zu einer dieser Gruppen isomorph. Dies wird bewiesen, ausserdem wird die Charaktertafel von $PSU(3,p^{2f})$ angegeben.

M.KÜCHLER: Über die Einheitengruppe von $\Omega(G)$

Die Einheitengruppe $\mathcal{E}(G)$ des Burnsidringes der Permutationsdarstellungen $\Omega(G)$ einer endlichen Gruppe G enthält beispielsweise alle Informationen über die Auflösbarkeit von G , wie A.Dress gezeigt hat.
$\mathcal{E}(G)$ lässt sich als elementarabelsche Gruppe als $\mathbb{F}_2$-Modul auffassen. Darüberhinaus kann man jedoch auch eine $\Omega(G)$-Modulstruktur auf $\mathcal{E}(G)$ definieren, so dass $\mathcal{E}(G)$ zu einem Modul über einem artinschen Ring wird, der seinerseits Information über die Gruppe G enthält.
Im Mittelpunkt der Untersuchung stehen die Fragen nach der Ordnung von $\mathcal{E}(G)$, nach der Zyklizität als Modul bzw. der Erzeugung durch -1, sowie der Gestalt der Kompositionsfaktoren.

H.KURZWEIL: Eine Charakterisierung der Gruppen $L_2(2^n)$, $Sz(2^m)$, JR und $L_2(q)$, $q \equiv 3,5(8)$.

Es wurde der Beweis des folgenden Satzes diskutiert:
Satz. Sei S eine 2-Sylowgruppe einer endlichen Gruppe G . Es gelte:
(1) $\Omega_1(S) \subseteq Z(S)$
(2) Ist $U = \langle x, y \rangle \subseteq S$ mit $x^2 = y^2$, so ist $U' = 1$
(3) $cl(S) \leqslant 2$
(4) kein Abschnitt von G ist isomorph zu $SL_2(3)$.
Dann ist $O^{2'}(G/O(G)) = \bigtimes_{i=o}^{j} X_i$, wobei X_o eine 2-Gruppe ist und für $i \geqslant 1$ $X_i \cong L_2(2^{n_i})$, $Sz(2^{m_i})$, JR oder $L_2(q_i)$ $(q_i \equiv 3,5(8))$.
Der grösste Teil des Beweises dieses Satzes ist sehr ähnlich zu einem Beweis von Bender (Math.Z. 117, 164-176(1970)).

R. MAIER: Endliche metanilpotente Gruppen

Es wurde folgender Satz bewiesen:

Satz. Sei $G = AB$ mit nilpotenten Untergruppen $A, B \leq G$. Eine der folgenden zwei Bedingungen sei erfüllt:

(1) Die p-Länge von G ist 1 für alle Primzahlen p

(2) A und B sind modulare Gruppen.

Dann ist G metanilpotent (Fittinglänge ≤ 2).

Der Beweis erfolgt durch Reduktion auf abelsche Faktoren A und B und Verwendung eines Satzes von Itô.

G. MICHLER: Blocks of p-nilpotent groups

The structure of the p-blocks of the p-nilpotent group G over any field F of characteristic $p > 0$ is determined. We used our result in order to give a purely ring theoretical proof of

Theorem. Let G be a p-solvable group and F a field of characteristic $p > 0$. Then the following are equivalent for the block $B \leftrightarrow e \leftrightarrow \lambda$ of FG:

(i) B has defect zero

(ii) the center of B is a field

(iii) B is simple artinian.

P. M. NEUMANN: Transitive permutation groups of prime degree

The theme of this talk concerned a conjecture of Professor H. Wielandt: that, if G is a transitive permutation group of prime degree p, then G has at most two conjugacy classes of subgroups of index p. First I gave a simple combinatorial proof of an old theorem of Prof. Wielandt: if a Sylow p-normalizer in G has even order then G has only one class of subgroups of index p. Secondly, a combinatorial theorem recently proved by Dr. P. J. Cameron. This criterion gives a necessary numerical condition for the existence of 3 classes of subgroups of index p. We have checked the arithmetic on a computer and thereby proved Prof. Wielandt's conjecture for $p \leq 100{,}000$.

J.B.OLSSON: A characterization of some orthogonal groups

The following theorem holds:

Theorem. Let H be the centralizer of an involution of type 2n in $\Omega_{2n+1}(q)$, q odd, $n \geq 4$. Let G be a finite group.

Assume that

(i) G contains an involution t, such that $C_G(t) \cong H$.

(ii) $G \neq O(G) . C_G(t)$

(iii) $q \equiv 5(8)$

Then $G \cong \Omega_{2n+1}(q)$.

In determining the fusion of involutions from H in G condition (iii) is not needed.

F.ROESLER: Zur Darstellungstheorie von Schur-Algebren

Für Schur-Algebren $\mathfrak{A}$ zur Gruppe G mit Partition $\mathfrak{P}$ über dem Körper k gilt:

Satz 1. Ist char $k \nmid v.|G|$, so ist $\mathfrak{A}$ halbeinfach (dabei ist $v = \mathrm{kgV}\{|B| : B \in \mathfrak{P}\}$).

Mit der Abbildung $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $\varphi(x) = \sum_{B \in \mathfrak{P}} c_B . BxB^*$

($c_B := \frac{v}{|B|}$) lassen sich Teile der Charaktertheorie von Gruppen auch für Schur-Algebren beweisen.

Def.: $C_o := \varphi(\{e\})$, wobei $\{e\} \in \mathfrak{P}$.

$a_\chi := \frac{\chi(C_o)}{\deg \chi}$ für irreduzible Charaktere χ von $\mathfrak{A}$ bei geeignetem k.

Satz 2. Sind alle $a_\chi \neq 0$, so gilt:

(1) $\varphi(x) = \sum_\chi \chi(x) \frac{a_\chi}{\deg \chi} E_\chi$

(2) $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathrm{Zentrum}(\mathfrak{A})$.

Satz 3. Sei $k = \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) $a_\chi \in \mathbb{N} - \{0\}$,

(2) $\frac{a_{\chi_1}}{a_\chi} . \deg \chi \in \mathbb{N}$,

(3) $\deg \chi \mid a_\chi$.

Es lassen sich induzierte Charaktere definieren, für die das Reziprozitätsgesetz gilt. Und schliesslich können mit der Klasse der 'maximalen' Charaktere von $\mathfrak{A}$ alle 'normalen Schur-Unteralgebren von $\mathfrak{A}$' charakterisiert werden.

J.S.ROSE: Some complete finite groups

Theorem. Let π be a set of at least two prime numbers and let G be any finite π-group. Then there is a complete finite group K with a normal Hall π-subgroup which contains G as a subnormal subgroup and such that $R(K) \leqslant$ a central product of copies of G (where $R(K)$ denotes the smallest normal subgroup of K such that $K/R(K)$ is soluble). In particular if G is soluble then K is soluble.
A special case of a step in the proof: Let H be a finite perfect group with trivial centre. Then there is a complete group K such that $H \leqslant K \leqslant \operatorname{Aut} H$ with K/H soluble.

P.ROWLINSON: Involutions fixing a small number of points

The determination of finite simple groups G with the following properties was discussed:
(i) G has just one conjugacy class of involutions
(ii) G has a permutation representation on a set Ω in which an involution of G fixes precisely f points, where $1 \leqslant f \leqslant 7$.

P.SCHMID: Automorphismengruppen zusammengesetzter Gruppen

Sind H und K charakteristische Untergruppen einer (endlichen) Gruppe G, K in H enthalten, dann ist die Automorphismengruppe Aut(G) von G eine Erweiterung des Zentralisators $C_{Aut(G)}(H/K)$ mit einer Untergruppe von Aut(H/K). Es wird gezeigt, dass $C_{Aut(G)}(G/\Phi(G))$ eine charakteristische Reihe von G stabilisiert ($\Phi(G)$ = Frattinigruppe von G); solche Automorphismengruppen sind nach einem Satz von P.Hall nilpotent.
Sei S das Urbild des Sockels von $G/\Phi(G)$ in G . Die Automorphismengruppe $C_{Aut(G)}(S/\Phi(S))$ und die Kommutatorgruppe von

$C_{Aut(G)}(S/\Phi(G))$ stabilisieren charakteristische Reihen von G. Aus diesen Sätzen leitet man Auflösbarkeitskriterien für die Automorphismengruppen auflösbarer Gruppen ab.

R.SCHMIDT: Verbandsisomorphismen auflösbarer Gruppen

Satz 1. Ist N ein Normalteiler der endlichen Gruppe G und σ ein Isomorphismus des Untergruppenverbandes $\mathfrak{U}(G)$ von G auf den einer anderen Gruppe G^σ, so existieren Normalteiler H und K von G mit
(1) $H \geq N \geq K$, (2) H^σ und K^σ normal in G^σ und (3) H/K und H^σ/K^σ überauflösbar in G bzw. G^σ eingebettet (X/Y ist überauflösbar in G eingebettet, wenn $G_i \triangleleft G$ existieren mit $X = G_o \geq \ldots \geq G_n = Y$ und $|G_i : G_{i+1}|$ Primzahl).

Dieser Satz verbessert Ergebnisse von Suzuki über nichtnormale Verbandsisomorphismen. Eine einfache Folgerung ist

Satz 2. Ist G auflösbar und σ ein Isomorphismus von $\mathfrak{U}(G)$ auf $\mathfrak{U}(G^\sigma)$, so ist $r(G) = r(G^\sigma)$, wenn r(G) die Menge der Ränge der Hauptfaktoren (mit Vielfachheit) ist.

Dieser Satz verallgemeinert einen Satz von Iwasawa, der 1941 das Ergebnis für $r(G) = \{1,\ldots,1\}$, also überauflösbare Gruppen, erhalten hatte. Haupthilfsmittel beim Beweis der angegebenen Sätze ist

Satz 3. Ist M eine elementarabelsche modulare Untergruppe der endlichen Gruppe G, so ist M^G/M_G überauflösbar in G eingebettet.

F.G.TIMMESFELD: Konjugiertenklassen von Involutionen in Charakteristik 2 Gruppen

Alle Charakteristik 2 Gruppen bis auf ${}^2F_4(2^n)$ werden von einer Konjugiertenklasse D von Involutionen erzeugt, die
(i) für alle $d,c \in D$ ist $o(dc) \in \{2,4,\text{ungerade}\}$,
(ii) ist $o(dc) = 4$, so folgt $(dc)^2 \in D$
genügen.

Ersetzt man in (i) "ungerade" durch "3" , so sind alle Gruppen, die diesen Eigenschaften genügen, bestimmt.
Lässt man in (i) "4" weg und ersetzt (ii) durch
(iii) es existieren $d,e \in D$ mit $de \in D$,
so sind alle bekannte Gruppen, die diesen Eigenschaften genügen, Charakteristik 2 Gruppen. Es wurde diskutiert, inwieweit sie durch diese Eigenschaften zu kennzeichnen sind.

H.WIELANDT: Commuting, normalizing, and centralizing properties of subnormal subgroups

A modernized version of the author's paper Hamb.Abh. 21 was presented. New normalizer theorems include:
(1) Let A be a finite group. Then $A \leqslant N(X)$ for all perfect subnormal subgroups X of every G such that $A \lhd\lhd G$ iff A normalizes all of its own subnormal subgroups.
A similar theorem holds for subnormal p-subgroups X .
(2) Generalization of a result of P.Hall: If $A \lhd\lhd G = G'$ and $O_p(A)$ cyclic then $O_p(A) \leqslant C(A)$. A similar theorem holds if $C(O_p(A))$ is cyclic.

G.ZAPPA: On some varieties generated by finite soluble groups

Let $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ ($p_1 > \dots > p_r$ primes) be an odd integer, and let be $m_i = p_1^{a_1} \dots p_i^{a_i}$ $(i=1,2,\dots,r)$. Let H be the class of the finite groups whose exponent divides n, and whose principal factors have order p_i or p_i^2 $(i=1,2,\dots,r)$. Then the variety generated by H is defined by the following laws:

(I) x_1^n ,

(II) $\left(x_1^{\frac{n}{m_i}} x_2^{\frac{n}{m_i}}\right)^{m_i}$,

(III) $\left[[x_1, x_2]^{np_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i}(p_i^2-1)}\right]$ $(i=1,2,\dots,r)$

(IV) $\left[[x_1, x_2]^{np_i^{-a_i}}, [x_3, x_4]^{np_j^{-a_j}}\right]$

$(i=1,2,\dots,r;\ j=i+1,i+2,\dots r)$.

Problem: Is (IV) a consequence of (I),(II),and(III) ?

M.Deckers(Mainz)