MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 40/1971

Geometrie

26.9. bis 2.10.1971

Die diesjährige Geoemtrietagung stand unter der Leitung von P.Dombrowski (Köln) und K.Leichtweiß (Stuttgart). Eine bedrohliche Wassernot ließ es angebracht erscheinen, die Tagung auf vier Tage zu verkürzen, wodurch eine erhebliche Straffung des Vortragsprogramms notwendig wurde.

Die Themenkreise der diesjährigen Tagung waren: Riemannsche Mannigfaltigkeiten, allgemeine Topologie, klassische Differentialgeometrie, Liniengeometrie, Kinematik, Elementargeometrie, geometrische Ordnungen und Anwendungen der Differentialgleichungen auf die Geometrie. Besonders eindrucksvoll erschien, daß viele Fragestellungen, die in der letztjährigen Geometrietagung zur Sprache kamen, eine befriedigende Lösung erfuhren. Mögen die zahlreichen Diskussionsbeiträge der diesjährigen Tagung eine ebenso reiche Ernte an geometrischen Resultaten einbringen!

Teilnehmer

G.Aumann, München
W.Barthel, Würzburg
St.Bilinski, Zagreb
W.Böhm, Braunschweig
M.Decuyper, Lille
W.Degen, Stuttgart
P.Dombrowski, Köln
R.Z.Domiaty, Graz
G.Ewald, Bochum
D.Ferus, Köln
P.Franzke, Berlin
O.Giering, Karlsruhe
E.Glässner, Stuttgart
W.Grimm, Karlsruhe
H.Groh, Aachen
O.Haupt, Erlangen
E.Heil, Darmstadt
W.Henke, Köln
J.Hoschek, Darmstadt
H.Karcher, z.Z. Zürich
P.Kirsche, Freiburg
W.Klingenberg, Bonn
M.Kömhoff, Berlin
H.Kunle, Karlsruhe
D.Laugwitz, Darmstadt
H.Lenz, Berlin
J.Mallmann, Freiburg
H.R.Müller, Braunschweig
H.F.Münzner, Bremen
P.T.Nagy, Szeged (Ungarn)
G.Rahn, Bochum
R.v.Randow, Köln
H.Reckziegel, Aachen
H.Sachs, Stuttgart
H.Schaal, Stuttgart
H.Schatz, Innsbruck
R.Schneider, Berlin
U.Simon, Berlin
G.Soós, Szeged (Ungarn)
D.Treiber, Köln
Y.Tsukamoto, z.Z.Bonn
H.Viesel, Karlsruhe
W.O.Vogel, Hannover
O.Volk, Würzburg
R.Walter, Freiburg
B.Wegner, Berlin
K.H.Weise, Kiel
R.Wodicka, Aachen
W.Wunderlich, Wien

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

G. AUMANN: Über Kontaktrelationen und Hüllenoperationen

Der jegliche direkte Motivation missenden Einführung einer Topologie $(X, \mathfrak{G})$ mittels eines (d,S)-Systems $\mathfrak{G}$ von Teilmengen von X wird eine anschauliche Einführung mittels des Begriffs des Berührungspunktes, nämlich einer Relation $\gamma \subset X \times \mathfrak{P}X$ gegenübergestellt. Kennzeichnende Eigenschaften für γ ergeben sich aus dem Beispiel des "Interessenkontaktes" der Soziologie: Bezeichnet $j(x)$ die Menge der Interessen des "Individuums" x einer "Gesellschaft" X, so heißt x in Kontakt mit der "Gruppe" Y $(\subset X)$, in Zeichen $x \,\gamma\, Y$, genau dann, wenn $j(x) \subset \bigcup \{ j(y) : y \in Y \}$. Die zu γ gehörige Hüllenoperation $h : \mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}X$ ergibt sich aus $x \,\gamma\, Y \Longleftrightarrow x \in hY$, was zugleich die bijektive Beziehung zwischen Kontakten γ und Hüllen h in X vermittelt. Den (einen "Kontakt" definierenden) Eigenschaften der Reflexivität, Monotonie und Infektivität von γ entsprechen die (eine "Hülle" h definierenden) Eigenschaften der Extensivität, Isotonie und Idempotenz. Es wurden verschiedene direkte Konstruktionen von Kontaktrelationen und Hüllenoperationen mitgeteilt. U.a. zeigt sich, daß mit einem beliebigen $\mathcal{H} \subset \mathfrak{P}X$ durch

$x \,\gamma\, Y \;:\Longleftrightarrow\; \bigwedge_{H \in \mathcal{H}} (x \in H \Longrightarrow H \cap Y \neq \emptyset)$ jede beliebige Kontaktrelation γ erklärt werden kann und daß diese mit dem durch die Interessenfunktion $x \longmapsto j(x) := \{ H : H \in \mathcal{H} \wedge x \in H \}$ definierbaren Interessenkontakt identisch ist. Topologische Kontakte ergeben sich, wenn h zusätzlich distributiv ist und $h\emptyset = \emptyset$ ist.
(Lit.: G. Aumann, Sitz.Ber.Bay.Akad.d.Wiss. 197o/71)

ST. BILINSKI: Einige Ptolemäische Sätze

Nach den einleitenden Betrachtungen über Zweiindizesfiguren und über Ptolemäische Sätze werden einige neue solche Sätze für gewisse einfache Punktfiguren und Geradenfiguren gegeben. Dann wird auch

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

die Frage gestellt, ob solche Zweiindizesfiguren bestehen, welche mehrere Ptolemäische Funktionen haben können. Zu diesem Zweck wird der Begriff einer "linear-additiven" Zweiindizesfunktion eingeführt. und für solche Figuren, für welche man eine linear-additive Zweiindizesfunktion definieren kann, wird durch Auflösung einer zyklischen Funktionalgleichung bewiesen, daß sie drei verschiedene Ptolemäische Funktionen haben. Es werden Beispiele solcher Figuren gegeben und aus dem allgemein bewiesenen Satz eine Reihe neuer Sätze und einige Erweiterungen schon bekannter Sätze abgeleitet.

P. DOMBROWSKI: Frenet-Theorie für C^∞- Abbildungen in riemannschen Mannigfaltigkeiten

Daten: $m, n \in \mathbb{N}_+$, N n-dimensionale riemannsche C^∞- Mannigfaltigkeit mit LEVI-CIVITA-kovarianter Ableitung ∇. M m-dimensionale C^∞- Mannigfaltigkeit, $f: M \to N$ C^∞- Abbildung (nicht notwendig Immersion!).

Definition: Für $r \in \mathbb{N}_+$ und C^∞- Vektorfelder $X_1, \ldots, X_r$ von M auf G (offen in M) definiert man $\nabla^r f(X_1, \ldots X_r)$ (= r-te kovariante Ableitung von f bezüglich $X_1, \ldots, X_r$) als (ein auf G definiertes) "C^∞- Vektorfeld in N längs f" rekursiv durch:

$$\nabla^1 f(X_1) := f_* X_1, \quad \nabla^{r+1} f(X_1, \ldots, X_{r+1}) := \nabla_{X_1}(\nabla^r f(X_2, \ldots, X_{r+1})).$$

Für $p \in M$ und $r \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$ ist der "∇ - Schmiegraum r-ter Ordnung von f in p" definiert als folgender Untervektorraum von $T_{f(p)}N$:

$$\tau_p^r := \mathrm{Spann}_{\mathbb{R}}\{\nabla^\varrho f(X_1, \ldots, X_\varrho)_p \mid (\varrho \in \mathbb{N}_+) \wedge (\varrho \leqq r) \wedge (X_1, \ldots, X_\varrho \ C^\infty\text{-Vektorf.v.}M$$

Dann heißt $f: M \to N$ von konstantem ∇-Schmiegrang s ($\in \mathbb{N}$), genau dann, wenn $\begin{matrix} M & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ q & \longrightarrow & \dim_{\mathbb{R}} \tau_q^\infty \end{matrix}$ konstant auf M. Dann gilt der

Satz: Daten (wie oben) und sei $f: M \to N$ von konstantem Schmiegrang s. Sei $p \in M$ und es gebe eine s-dimensionale totalgeodätische C^∞- Untermannigfaltigkeit $S \underset{i}{\subsetneq} N$ mit $\tau_p^\infty = i_* T_{f(p)} S$. Dann gibt es eine Umgebung U von p in M mit $f(U) \subset S$.

Es wurde gezeigt, daß die (dem Vortragenden) bekannten klassischen Kriterien für analoge Aussagen im Falle $N = \mathbb{R}^n$ oder N von konstanter Krümmung Spezialfälle hiervon sind. Die Liste der vom Vortragenden zitierten methodischen Vorläufer R.W. POHL (1962), FELDMAN (1963/64) und S.S. CHERN (197o) wurde von K.H. WEISE durch einen freundlichen Hinweis auf Arbeiten von W. MAYER (1928 und 1935) ergänzt.

R.Z. DOMIATY: Über die Topologisierung metrischer Räume

Untersuchungen im Zusammenhang mit metrischen Räumen mit einer Elementarlänge (ersch. Monatsh. f. Math.) haben die Frage aufgeworfen, ob man einem metrischen Raum (R,d) andere Topologien als die natürliche $\mathcal{T}_d$ zuordnen kann. Eine solche Möglichkeit gibt die

Definition: Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf R heißt mit der Metrik d verträglich, wenn die abgeschlossenen Kugeln $B(a,\beta) := \{x \mid d(a,x) \leqq \beta\}$ abgeschlossene Mengen bezüglich $\mathcal{T}$ sind.

V sei die Menge aller mit d verträglichen Topologien. In V läßt sich eine gröbste Topologie $\mathcal{T}^*_d$ in natürlicher Weise auszeichnen. Ordnet man (R,d) die Topologie $\mathcal{T}^*_d$ zu, so treten verschiedene neuartige Situationen und Probleme auf.

D. FERUS: Starrheit vollständiger Hyperflächen

Es wird ein neuer Beweis des folgenden, teilweise bekannten Satzes gegeben:

Satz:

Vor: M vollständige, zusammenhängende, riemannsche n- Mannigfaltigkeit, $n \geqq 3$. $\tilde{M}$ (n+1)-dimensionale Raumform der Krümmung $\tilde{k}$.

$f : M \to \tilde{M}$ isometrische Immersion. Es gelte A und B:

A: Das Komplement der Flachpunkte von f ist zusammenhängend oder M ist kompakt und Schnittkrümmung von $M \geqq \tilde{k}$.

B: M enthält keine vollständige (n-2)-dimensionale Untermannigfaltigkeit L, so daß $f|L$ total geodätisch ist oder $\tilde{k} \leqq 0$ und M kompakt oder $\tilde{k} > 0$ und $n \geqq 4$.

Beh: f ist starr.

P. FRANZKE: Starrheit vollständiger Hyperflächen

$x: M \to M'$ sei isometrische Immersion, wobei M n-dim. Riemann-Mannigfaltigkeit ($n \geqq 2$), M' (m+n)-dim. Riemann-Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung ist ($n \geqq 1$). Es wurden folgende

Flächenklassen untersucht:

$\mathcal{H} = \{ x(M) \subset M' \mid$ mittlere Krümmung H = konst. $\}$

$\mathcal{H}^* = \{ x(M) \subset M' \mid$ Immersion mit parallelen mittleren Krümmungsnormalen $\}$

$\mathcal{R} = \{ x(M) \subset M' \mid h^{\alpha}{}_{ij} = k(\alpha)\, g_{ij} \}$

$\mathcal{R}^* = \{ x(M) \subset M' \mid x(M) \in \mathcal{R} \wedge \sum_{\alpha=1}^{m} (k(\alpha))^2 \neq 0 \}$

$\mathcal{R}^{**} = \{ x(M) \subset M' \mid A_\eta = \lambda I,\ \eta :=$ mittlere Krümmungsnormale $\}$

<u>Lemma:</u> a) $x(M) \in \mathcal{H}^* \Rightarrow x(M) \in \mathcal{H}$

b) $x(M) \in \mathcal{R}^* \Rightarrow x(M) \in \mathcal{R}^{**}$

c) $x(M) \in \mathcal{R}^{**} \Rightarrow H = (m^{-1} \lambda)^{1/2}$

d) $x(M) \in \mathcal{H}^* \overset{\text{i.a.}}{\not\Rightarrow} x(M) \in \mathcal{R}^{**}$.

Zu d) wird das Beispiel $x = (a \cos u,\ a \sin u,\ b \cos v,\ b \sin v)$ angegeben.

<u>Satz:</u> $x: M \longrightarrow R^{n+m}$

a) $x(M) \in \mathcal{R}^* \Rightarrow x(M)$ ist minimale Untermannigfaltigkeit einer Hypersphäre.

b) $x(M) \in \mathcal{R}^{**} \wedge x(M) \in \mathcal{H}^* \Longleftrightarrow x(M)$ ist minimale Untermannigfaltigkeit einer Hypersphäre, falls $\lambda \neq 0$.

<u>Lemma:</u> $x: M \longrightarrow M'$, dim M = 2, M topologisch eine Kugel, $x(M) \in \mathcal{H}^*$ $\Rightarrow x(M) \in \mathcal{R}^{**}$.

<u>Satz:</u> $x: M \longrightarrow M'$ wie in obigem Lemma $\Longleftrightarrow$ x (M) ist minimale Untermannigfaltigkeit einer Hypersphäre.

E. GLÄSSNER: <u>II - Minimalflächen</u>

Unter II-Minimalflächen versteht man Extremalflächen der Klasse C^4, für die die erste Variation δo_{II} der II-Oberfläche o_{II} ($o_{II} = \iint \sqrt{L}\, du^1\, du^2$, wobei L die Determinante der 2. Grundform ist) bei festgehaltenem Rand verschwindet. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist die Differentialgleichung:

$$H_{II} := H + \frac{1}{2} \Delta_{II} \ln \sqrt{K} = 0.$$

Problem von Björling: Durch einen vorgegebenen analytischen Streifen gibt es genau dann eine analytische II-Minimalfläche, wenn man außer den 3 Streifen-Invarianten noch die Normalkrümmung samt Ablei-

tung nach u^2 der Linien u^1 = konst. entlang der Streifenkurve $u^2 = 0$ vorgibt.
Gleichzeitigkeitsproblem: Die reellen und komplexen Wendelflächen und die Liesche Minimalfläche sind die einzigen I-Minimalflächen, die gleichzeitig II-Minimalflächen sind.
Problem von Catalan: Die einzigen Regelflächen unter den II-Minimalflächen sind die geraden Konoide und die Liesche Minimalfläche.
Sämtliche Beweise werden über die beiden Grundformen geführt.

W. GRIMM: <u>Klassifikation der $K_{3,3}$ - Flächen von Lane</u>

Die Flächen von LANE (1938) sind CLIFFORDsche Schiebflächen des isotropen Raumes mit der Quaternionendarstellung $x(u,v)=p(u)q(v)$, wobei $p(u)=e_o+(du+\frac{1}{2}cu^2)e_1+(bu+\frac{1}{2}au^2)e_2+\frac{1}{6}u^3e_3$, $q(v)=e_o-(Dv+\frac{1}{2}Cv^2)e_1+$ $+(Bv+\frac{1}{2}Av^2)e_2+\frac{1}{6}v^3e_3$ mit $ad-bc=1$ und $AD-BC=1$ ist. Die Linien u=konst. und v=konst. sind ihre kubischen Asymptotenlinien.

1. Für $aC+Ac=0$ sind sie $K_{3,3}$-Flächen 8.ter Ordnung und Klasse der Art C mit der projektiven Normalform
$$(-38-84xy+9x^2y^2+18xyz-60z+9z^2-32x^3-32y^3)^2=(24z-8xy-38)^2(1+xy-3z).$$
Sie besitzen eine rationale Gratlinie 6.ter Ordnung und eine Parabel als Doppelkurve.

2. Für $aC+Ac=0$ sind sie $K_{3,3}$-Flächen der Art D und können auf eine der folgenden Normalformen gebracht werden:
   a) $9(z-3xy+2x^3)^2= 32(x^2-y)^3$ (ENRIQUES)
   b) $9z^2=16(2y-x^2)^3$ (STRUBECKER)
   c) $3x^4-y^2 +6xz=0$.

H. GROH: <u>1-dimensional orbits in flat projective planes</u>

In Arch.Math. 1962 (13, 98-109) Lemma 10, 11 H. Salzmann showed that the 1-dimensional orbit of the automorphism group $\underline{a}P$ of a "hyperbolic" projective plane P is an oval by using the fact that $\underline{a}P \cong PSL_2(R)$. The purpose of this paper is to investigate for arbitrary flat projective planes P orbits of 1-dimensional subgroups Δ of $\underline{a}P$. Our main result (Theorem 3) is that such orbits, unless they are contained in a line, are always ovals if $\Delta \cong S_1$ (Circle Group), including the above result. If $\Delta \cong R$ (reals), the situation is more complicated, but the orbits are either "spirals" or "nearly" ovals. These results will be an essential tool in the classification of flat projective planes with dim $\underline{a}P = 2$.

O. HAUPT: Zur ordnungstreuen Erweiterung ebener Bogen

Betrachtet werden die einfach durchlaufbaren Bogen und Kurven in topologisch projektiven Ebenen vom schwachen Punktordnungswert Drei. Es werden alle ordnungstreuen maximalen Erweiterungen solcher Bogen und Kurven bestimmt. Alle Bogen sind enthalten in maximalen Kurven oder maximalen Bogen. Es gibt Kurven, die maximal nur zu Bogen ordnungstreu erweiterbar sind. (Bericht über eine Arbeit gemeinsam mit H. Künneth).

E.HEIL: Geometrisches zur Hill'schen Differentialgleichung

Zwei Basislösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$ der Differentialgleichung $\ddot{x} + \lambda p(t) x = 0$, $p > 0$, $p(t+\omega) = p(t)$ geben die Parameterdarstellung einer ebenen lokal-konvexen Kurve. Floquet-Theorie und ein Satz von Ljapunow liefern die Existenz von Eigenwerten l_ν, $l_3 > l_4 > \dots \searrow 0$, zu denen jeweils alle Lösungen die Periode $\nu\omega$ haben und also eine geschlossene Kurve darstellen, die außerdem die Windungszahl 1 hat. Auf diese konvexen Kurven wenden wir Abschätzungen von Blaschke, Mahler und Guggenheimer an und erhalten

$$\frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{\nu}}{\omega\,\omega^*} < l_\nu \leq \frac{4\pi^2}{\nu^2 \omega\, \omega^*} .$$

Korollar: Sei $x_1(t,\lambda)$ eine Lösung mit $x_1(0,\lambda) = 0$. Dann liegt die nächstfolgende Nullstelle für $\frac{\pi^2}{\nu^2 \omega\,\omega^*} < \lambda < \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{2\nu - 2}}{\omega\,\omega^*}$, $\nu \geq 3$ im ν-ten auf 0 folgenden Periodenintervall.

W. HENKE: Isometrische Immersionen der n-Sphäre S^n in E^{n+2}

Theorem: Gegeben sei eine isometrische Immersion f der Standard n-Sphäre S^n ($\subset E^{n+1}$) in E^{n+2} ($n \geq 4$). Dann gestattet die Menge aller Nicht-Nabelpunkte von f genau eine Blätterung durch (vollständige) euklidische (n-1)-Sphären im E^{n+1} und jede dieser (n-1)-Sphären wird durch f isometrisch auf eine euklidische (n-1)-Sphäre im E^{n+2} abgebildet.

Korollar 1: Jede isometrische Immersion von S^n in E^{n+2} ($n \geqq 4$) besitzt mindestens zwei Nabelpunkte.

Korollar 2: S^n ist starr in S^{n+1} ($n \geqq 4$).

Korollar 2 gilt bekanntlich sogar für n=2.

H. KARCHER: Krümmung und differenzierbare Struktur

Voraussetzungen: M sei vollständig, einfach zusammenhängend, n-dimensional, riemannsch mit Schnittkrümmungen K, sodaß $\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1$ gilt. Bekanntlich ist dann M homöomorph zu S^n.

Wir beweisen das erste dimensionsunabhängige Diffeomorphieresultat: $0,85 \leq \delta \implies$ M ist diffeomorph zu S^n.

Der Beweis beruht auf folgendem

Lemma: $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ (S^{n-1} Einheitssphäre in R^n) sei ein Diffeomorphismus, sodaß $\bigwedge_{u \in S^{n-1}} \beta(u) := \sphericalangle(u, f(u)) < \pi$ und

$$\bigwedge_{u \in S^{n-1}} \bigwedge_{A \in T_u S^{n-1}} \Phi(u, A) := \sphericalangle(A, df_u A) \leqq 175° - \beta(u)$$

Dann ist für $t \in [0,1]$ jede Abbildung $F_t : S^{n-1} \to S^{n-1}$, $F_t(u) := \exp_u(t \exp_u^{-1} f(u))$ ein Diffeomorphismus und daher die eventuell exotische Sphäre $D^n \cup_f D^n$ diffeomorph zu S^n.

Mit den Alexandrow-Toponogow-Rauchschen Vergleichsätzen werden Abschätzungen für β und Φ in Abhängigkeit von δ hergeleitet - f ist dabei ein schon im Homöomorphiebeweis vorkommender Diffeomorphismus mit M diffeomorph $D^n \cup_f D^n$. Für $0,85 \leq \delta$ wird das Lemma anwendbar.

Bemerkung: Dimensionsabhängige Ergebnisse sind durch Gromoll, Shikata und Ruh bekannt.

W. KLINGENBERG: Anwendungen des Fixpunktsatzes von Birkhoff

Der genannte Fixpunktsatz wird dazu benutzt, um die Existens von unendlich vielen geschlossenen Geodätischen auf kompakten riemannschen Mannigfaltigkeiten zu beweisen, unter der Voraussetzung, daß

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

die Metrik "allgemein" ist und wenigstens eine nicht-hyperbolische geschlossene Geodätische existiert.

Es wird gezeigt, daß bei einer weiten Klasse von kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M (vermutlich sogar auf allen) die genannten Forderungen an die riemannsche Metrik erfüllt sind für einen dichten und offenen Teil des Raumes aller riemannschen Metriken auf M.

Insbesondere gibt es für "fast alle" riemannschen Metriken auf einer Mannigfaltigkeit vom Typ der Sphäre unendlich viele geschlossene Geodätische.

H.F. MÜNZNER: Weylsche Ungleichungen für Hyperflächen im E_{n+1}

Für elliptisch gekrümmte nicht sphärische Flächenstücke im E_3 kann bekanntlich ein lokales Maximum der größeren Hauptkrümmung k_1 (bzw. der mittleren Krümmung H) nicht mit einem lokalen Minimum der kleineren Hauptkrümmung k_2 (bzw. der Gaußschen Krümmung K) zusammenfallen; überdies gilt in einem lokalen Maximum von H nach H. Weyl $H^2 \leq K - \frac{1}{4K} \Delta K$. Entsprechende Sätze werden für die Hauptkrümmungen und mittleren Krümmungsfunktionen H_r $(r=1,\dots,n)$ auf konvexen Hyperflächen des E_{n+1} bzw. der Sphäre S^{n+1} aufgestellt. Folgerungen sind - global - die bekannten Kennzeichnungen der euklidischen n-Sphären als Eihyperflächen konstanter r-ter mittlerer Krümmung H_r, andererseits - lokal - die Kennzeichnung von Sphärenstücken durch die Konvexität und die Konstanz der zwei Krümmungsfunktionen H_1 und H_r $(r \in \{2,\dots,n\})$. Analoge Resultate können auch für die elementarsymmetrischen Funktionen S_r der Hauptkrümmungsradien gewonnen werden.

H. SACHS: Zur Theorie der Regelflächen isotroper Räume

Aufbauend auf die von W.O. Vogel 1959 entwickelte Theorie der Regelflächen Φ des einfach isotropen Raumes $\mathfrak{J}_3$ wird zunächst die nützliche Drallformel $\delta_I = \dfrac{\Omega(\dot{p})(p_1^2 + p_2^2)}{(p_1 \dot{p}_2 - p_2 \dot{p}_1)^2}$ erstellt. Es werden jene Regelflächen gekennzeichnet, für die der euklidische Drall δ_E mit δ_I bzw. dem im zweifach isotropen Raum nach H. Brauner erklärten Drall δ_{II} übereinstimmt. Die Differentialinvariante δ_I übernimmt weitgehend die Rolle des euklidischen Dralls bei der Beschreibung des Flächenelementes 1. Ordnung; u.a. gilt: Für jeden Punkt P einer nichttorsalen Erzeugenden $e \in \Phi \subset \mathfrak{J}_3$ ist das Produkt aus seinem isotropen Abstand vom Zentralpunkt auf e und dem isotropen Winkel der Tangentialebene mit der asymptotischen Ebene von e konstant - und zwar gleich dem Drall von Φ in e. Berühren sich zwei Regelflächen des $\mathfrak{J}_3$ längs einer Erzeugenden, so haben sie in allen Punkten dieser Erzeugenden dieselbe Relativkrümmung. Ein Satz zum Flächenelement 2. Ordnung: Konstant gedrallte Regelflächen $\Phi \subset \mathfrak{J}_3$ sind dadurch gekennzeichnet, daß die Mittelpunkte der oskulierenden Hyperboloide auf der jeweiligen Zentralnormalen liegen.

U. SIMON: <u>Zur Theorie der zweiten Fundamentalform</u>

Der Vortrag schließt an eine Diskussion der Geometrietagung 1970 sowie an ein Kolloquium an der TU Berlin (Juni 1971) über das gleiche Thema an.

0. Sei $M_n \in C^3$ eine zusammenhängende, orientierbare Riemann - Mannigfaltigkeit mit lokalen Parametern (u^i), $x: M_n \longrightarrow R^{n+1}$ sei eine isometrische C^3 - Immersion. I, II, III seien die drei Fundamentalformen mit Tensoren (g_{ij}), (b_{ij}), (e_{ij}) in lokalen Parametern.

I. Die Riemannsche Geometrie der Mannigfaltigkeit (M,II) wird mit der von (M,I) verglichen; dazu wird der Tensor $A_{ij}{}^k = \Gamma(\mathrm{II})_{ij}{}^k - \Gamma(\mathrm{I})_{ij}{}^k$ untersucht ($\Gamma(\mathrm{I})$, $\Gamma(\mathrm{II})$ symmetrische Zusammenhänge von I bzw. II). Es gilt $A_{ij}{}^k = \frac{1}{2}\, b^{(kr)} \nabla^{\mathrm{I}}_k b_{ij}$ mit $b^{(kr)} b_{rs} = \delta^k{}_s$, ∇^{I} kovariante Differentiation bezüglich I. (Vgl. Hichs, Mich. Math. J. 1965; Simon / Weinstein manuscr. math. 2, 1969; Vortragsauszüge DMV - Tagung 1971 (Simon)).

II. II - Minimalflächen (vgl. den Vortrag von E. Glässner)

III. Algebraische Bestimmung von II durch I und H (H=mittlere Krümmung) und deren Ableitungen. (Vgl. Thomas u. Matsumoto (1959)).

IV. Existens und Eindeutigkeit von Flächen bei vorgegebener II-ter Grundform (n=2):

(a) Vorgabe eines Flächenstreifens (vgl. Diss. Erard, Zürich 1968)

(b) Lokale II-Verbiegungen (vgl. Diss. Erard)

(c) Die Kugel ist global II-starr (Voss, Vortrag Linz 1968)

(d) Eine Eifläche mit vorgegebener Form II ist Kugel, falls die Riemann-Krümmung von II konstant ist ($n \geqq 2$). (R. Schneider, 1971)

(e) $x(M)$, $x^*(M)$ seien Eiflächen im $\mathbb{R}^3$. Es gelte $II = II^*$ und eine der Bedingungen (α), (β)

(α) $F(H,K) = F(H^*,K^*)$

(β) $F\left(\frac{H}{K}, \frac{1}{K}\right) = F\left(\frac{H^*}{K^*}, \frac{1}{K^*}\right)$, $F \in C^1$ und $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \geqq 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} > 0$, $F = F(x,y)$.

(f) Eine Eifläche ist II-starr, falls $\delta F = 0$. F ist wie in (e) definiert.

Sätze (e) und (f) stammen von Roitzsch, Simon, Walden, Wegner, Wendland (vgl. Archiv Math. 1971 (Simon), Diplomarbeit Roitzsch (TU Berlin 1971), Walden (M. Z. 1971)).

V. Beweismethoden für globale Resultate

(a) Maximummethode

(b) Integralformalmethode (Satz v. Grove $II = II^*$, $K = K^*$), Beweise von Grove, Münzner, Gardner ($n \geqq 2$), Walden-Wegner (vgl. Archiv Math. 1971 / 72; die hier angegebene Integralformel enthält als Spezialfälle die von Herglotz, Münzner, Blaschke sowie Integralformeln zum Christoffelproblem und zu den III-Verbiegungen).

(c) Indexmethode (vgl. Geometrie-Tagung 197o; Wendland-Simon: M.Z. 197o; Walden: M.Z. 1971; die Resultate unter IV. (e), (f) werden publiziert).

VI. $x: M_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $m \geqq 1$; vgl. den Vortrag von Franzke.

D. TREIBER: <u>Geometrie nicht-archimedisch normierter Vektorräume</u>

Nicht-archimedisch bewertete Körper K sind nicht-archimedisch normierte Vektorräume E, d.h. solche, wo die übliche Dreiecksungleichung verschärft ist zu: $\|v+w\| \leq \max\{\|v\|, \|w\|\}$. Elementare

Bausteine für eine Geometrie sind eine Längenmessung (durch die Norm) und eine Winkelmessung, zu der man z.B. auf folgende Weise gelangen kann:

1) Mittels einer Bilinearform $E \times E \to K$. Die Theorie dieser Bilinearformen behandeln u.a. Bruhat, Dieudonné, Klingenberg.

2) Über die Deffinition des zunächst rechten Winkels als "beste Approximation" (A.F. Monna): Zwei Vektoren $v, w \in E$ heißen orthogonal, wenn gilt: $\|v\| = \operatorname{dist}(v, \mathrm{Spann}_K(w))$.

Die aus diesen Definitionen resultierenden Orthogonalitätsbegriffe stimmen nicht überein. Mittels einer algebraischen Konstruktion nach Serre gelangt man zu einer kalkülmäßigen Winkelmessung, die die Orthogonalität im Sinne von 2) liefert und unter Isometrien invariant ist.

Y. TSUKAMOTO: On certain Riemannian manifolds of positive curvature

It is a very important and interesting problem in Riemann geometry to classify the topological structure of complete simply connected Riemannian manifolds of positive curvature. The following cases are well know:

1) complete non compact Riemannian manifolds are diffeomorphic to Euclidean space

2) complete simply connected $\delta(> \frac{1}{9})$-pinched Riemannian manifolds are homeomorphic to sphere

3) complete simply connected $\frac{1}{4}$- pinched Riemannian manifolds are homeomorphic to sphere or are isometric to compact symmetric Riemannian manifold of rank 1.

Our purpose is to prove the following

Theorem: If M is an even dimensional $\delta(> \frac{1}{9})$ -pinched complete simply connected Riemannian manifold, then the cohomology ring H^* is truncated polynomialring.

H. VIESEL: Über Minimalflächen mit Liouvilleschem Bogenelement

Wir betrachten Flächenstücke F mit "Liouvillescher" Metrik:

(1) $$ds^2 = D(u,v)(du^2+dv^2) \ ; \ D = U(u) + V(v).$$

Es gilt dann der

Satz: Jedes - hinreichend oft differenzierbare - Liouvillesche Flächenstück mit konstanter mittlerer Krümmung H läßt sich auf eine Rotationsfläche abwickeln.

Zum Beweis benutzt man die Formeln:

(2) $D\ K_{uv} + 2(K_u V_v + K_v U_u) = 0$

(3) $\Delta \ln(H^2 - K) = 4K$ (M.Raffy, Bull. soc. math. 1892)

(4) $4\ A := (L-N)^2 + 4M^2.$

Es ergibt sich daraus:

(5) $\Delta \ln A = 0$ und aus $\Delta \frac{A_{uv}}{A} = 0 \implies$ (6) $K_{uv} = 0.$

Daraus folgt aber:

a) F ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar.
b) $K = 2a(U-V) + b.$

Zum Schluß zeigt man, daß Fall b) nicht möglich ist.

W.O. VOGEL: Krümmungskreise in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Ein Krümmungskreis ist eine Kurve, deren 1. Krümmung in den Frenetschen Ableitungsgleichungen konstant ist und deren weitere Krümmungen identisch verschwinden.

I. Kreistreue Abbildungen

Jede kreistreue Abbildung ist konform. Hier werden lokale und globale Sätze aufgestellt, wann eine kreistreue Abbildung eine Homothetie bzw. Isometrie ist.
Beispiel: Seien V_n, $\overline{V}_n$ vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, f eine kreistreue Abbildung. Es gebe ein (einziges) geodätisches Dreieck, das durch f wieder in ein geodätisches Dreieck übergeht. Dann ist f eine Homothetie. Es folgen Abschätzungen zwischen den Krümmungen $\varkappa$, $\overline{\varkappa}$ des Ur- und Bildkreises.

II. Geschlossene Kreise

Es wird ein (lokaler) Satz von BLASCHKE-BAULE verallgemeinert auf Dimensionen $n > 2$. Eine Mannigfaltigkeit, auf der alle Kreise geschlossen sind, ist notwendig von konstanter Schnittkrümmung K_σ.

Daraus folgt: Ist $\tilde{V}_n$ einfach zusammenhängend, und sind alle Kreise und Geodätischen geschlossen, so ist V_n eine n-Sphäre.

III. Offene Probleme

Begriff der Vollständigkeit (Analogie zum Satz von HOPF-RINOW und dessen Folgerungen), Existenz und Mindestzahl von geschlossenen Kreisen usw.

R. WALTER: Zum Satz von GAUß-BONNET auf offenen Mannigfaltigkeiten

Es wird eine Verallgemeinerung der COHN-VOSSENschen Ungleichung zwischen Gesamtkrümmung und Eulercharakteristik auf n-dimensionale vollständige offene riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiv semidefinitem Krümmungsoperator diskutiert. Zur Konstruktion einer Ausschöpfung kann die Strukturtheorie von CHEEGER und GROMOLL für vollständige offene Mannigfaltigkeiten mit $K \geqq 0$ herangezogen werden. Es ist dabei zu erreichen, daß jede der ausschöpfenden Mengen gewisse Konvexitätseigenschaften besitzt und den Homotopietyp der Mannigfaltigkeit widerspiegelt.

W. WUNDERLICH: Kurven mit isoptischem Kreis

Veranlaßt durch eine praktische Frage der Kinematik von Schwinghebel-Nockentrieben werden jene ebenen Kurven bestimmt, die einen Kreis als isoptische Kurve besitzen. Das Problem führt auf die Funktionalgleichung $u^2 + \bar{u}^2 - 2u\bar{u} \cos \omega = \sin^2 \omega$ für die Stützfunktion $u = u(\tau)$, wobei $\bar{u} = u(\tau + \omega)$ und $\pi - \omega$ = konst. den vorgeschriebenen Gesichtswinkel bedeutet. Die Gleichung wird vollständig gelöst, wobei zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden sind. Besondere Aufmerksamkeit wird algebraischen, durch rationales Verhältnis ω/π gekennzeichneten Lösungen zugewandt, unter denen sich auch für die praktische Anwendung erforderliche konvexe Kurven finden.

H. Sachs (Stuttgart)