MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 41/1971

Funktionalanalysis

3.10. bis 9.10.1971

Die diesjährige Funktionalanalysis-Tagung stand unter der Leitung der Herren Prof. Dr. H.H. Schaefer, Tübingen und Prof. Dr. H.G. Tillmann, Mainz. Es wurden 35 Vorträge gehalten; einige eingeladene Interessenten hatten mit ihrer Anmeldung eine Zusammenfassung ihres geplanten Vortrags eingesandt, waren jedoch leider verhindert zu kommen. Wir halten es für sinnvoll, diese Zusammenfassungen mit zu veröffentlichen; sie sind durch einen Stern gekennzeichnet.

Die Themen lassen sich (natürlich nicht disjunktiv, und mit allen üblichen Vorbehalten) unter folgende Stichpunkte gruppieren: Strukturtheorie lokalkonvexer Vektorräume, Strukturtheorie von Banach-Räumen, lokalkonvexe Vektorverbände, Funktionenalgebren, affine stetige Funktionen und kompakte konvexe Mengen, Spektraltheorie, nicht-lokalkonvexe Vektorräume, nichtlineare Approximation, Anwendungen. Auf allen diesen Gebieten wurden relevante, die zukünftige Entwicklung der Funktionalanalysis sicher beeinflussende Ergebnisse vorgetragen.

Neben den Vorträgen boten sich ausgezeichnete Gelegenheiten zu fachlichen Diskussionen. Die durch die Vorträge erhaltenen Kenntnisse aktueller Forschungsergebnisse noch vor deren Publikation und die durch die Diskussionen gegebenen Anregungen dürften alle Teilnehmer der Tagung als großen Gewinn mit nach Hause genommen haben.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

N.Adasch, Frankfurt
E.M.Alfsen, Oslo/Norwegen
T.Andersen, Aarhus/Dänemark
E.Behrends, Berlin
R.Bellmann, Erlangen
K.Bierstedt, Kaiserslautern
E.Binz, Mannheim
J.P.R.Christensen, Kopenhagen/Dänemark
J.L.B.Cooper, London/England
E.Dubinsky, Warschau/Polen
K.Floret, Kiel
K.-H.Förster, Dortmund
B.Fuchssteiner, Darmstadt
B.Gramsch, Kaiserslautern
W.Hackenbroch, Saarbrücken
H.Heuser, Karlsruhe
M.A.Kaashoek, Amsterdam/Holland
H.H.Keller, Zürich/Schweiz
K.Kutzler, Mannheim
J.Lindenstrauss, Jerusalem/Israel
W.A.J.Luxemburg, Pasadena/U.S.A.
P.Meyer-Nieberg, Saarbrücken
D.Mitrović, Zagreb/Jugoslawien
R.J.Nagel, Tübingen
G.Neubauer, Konstanz
N.J.Nielsen, Aarhus/Dänemark
H.Pachale, Berlin
W.V.Petryshyn, New Brunswick/U.S.A.
W.Roelcke, München
M.Rogalski, Orsay/Frankreich
D.Przeworska-Rolewicz, Warschau/Polen
S.Rolewicz, Warschau/Polen
K.H.Rüdiger, Berlin
H.H.Schaefer, Tübingen
F.W.Schäfke, Berlin
E.Scheffold, Bochum
G.L.Seever, z.Zt. Bonn
A.Szankowski, Aarhus/Dänemark
H.G.Tillmann, Mainz
D.Vogt, Mainz
L.Waelbroeck, Brüssel/Belgien
M.de Wilde, Liège/Belgien
G.Wittstock, Saarbrücken
P.Wojtaszczyk, Warschau/Polen
M.Wolff, Tübingen
M.Wriedt, Kiel

Vortragsauszüge

Strukturtheorie lokalkonvexer Vektorräume

J.P.R. CHRISTENSEN, Effros Borel structure on spaces of closed subsets.

Let E be an analytic metrizable space. E_{ϕ}^{*} is the set of closed subsets equipped with the Effros Borel structure. This structure is analytic and can be defined by requiring that the set of closed subsets contained in a closed subset is measurable. The intersection operation is measurable iff E is σ-compact. The set of compact sets is measurable iff E is Polish. Let F be a mapping from the set of compact subsets of the Polish space E into the set of compact subsets of the metrizable space M. Suppose that F is increasing and "swallows" every compact set in M. Then M is Polish.

References: 1) J.P.R. Christensen: On some properties of Effros Borel structure on spaces of closed subsets (to appear in Mathem.Ann.).

2) ——— : Necessary and sufficient conditions for the measurability of certain sets of closed subsets (to appear).

E. DUBINSKY, <u>On λ-Nuclearity.</u>

Most of this research was done jointly with M.S.Ramanujan. A theory of λ-nuclear maps is presented which includes the cases of ρ-nuclear maps, (s)-nuclear maps and $\Lambda(\alpha)$-nuclear maps. Basic properties of these maps are developed and they are used to define λ-nuclear locally convex spaces. Examples are given to show that λ-nuclearity can be equivalent to nuclearity (for spaces) even when λ is not isomorphic to a subspace of any ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. On the other hand, if $1 \leq p < q \leq \infty$, it is possible to find a Banach sequence space λ with $\ell_p \subset \lambda \subset \ell_q$ and such that there exists a λ-nuclear Fréchet space which is not nuclear.

In the case of a power series space of infinite type, $\Lambda(\alpha)$, conditions on the exponent sequence α are given which are necessary and sufficient for the class of $\Lambda(\alpha)$-nuclear spaces to be closed under countable direct sums, finite products, or arbitrary products.

A question of Köthe regarding uniform $\Lambda(\alpha)$-nuclearity is answered.

An indication of some possible applications to the theory of partial differential equations is given.

W. ROELCKE, Fast Bairesche topologische lineare Räume.

Ein topologischer linearer Raum X heiße fast Bairesch oder ein (α)-Raum, wenn er die folgende Eigenschaft (α) besitzt.

Ist (A_n) eine aufsteigende Folge von absolutkonvexen abgeschlossenen Teilmengen von X mit $\bigcup_n A_n = X$, so sind die A_n für alle hinreichend großen n absorbant.

Diese Eigenschaft (α) ist offenbar schwächer als die Eigenschaft, daß X ein Bairescher Raum im Sinne von Bourbaki ist. (α) läßt sich im lokalkonvexen Fall dual charakterisieren, es gibt mehrere hinreichende Bedingungen für (α), und die fast Baireschen Räume besitzen zahlreiche Permanenzeigenschaften. Zu den Anwendungen dieser Räume gehören Formen der Sätze vom abgeschlossenen Graphen und von der offenen Abbildung, ein Analogon des Satzes von Banach-Steinhaus und verwandte Stetigkeitsaussagen.

M. DE WILDE, Vector topologies and linear maps on products of topological vector spaces.

In the study of products of topological vector spaces, two kind of subspaces are shown to play an essential role: the factor space and the simple subspaces, which are the product of one-dimensional subspaces contained in the factor spaces.

One of the main results is the following.

<u>Theorem</u>: Let $\mathcal{T}$ be a vector topology on a product space E . If $\mathcal{T}$ is coarser than the product topology $\mathcal{T}_o$ of E in the factor subspaces and the simple subspaces of E , then $\mathcal{T}$ is coarser than $\mathcal{T}_o$.

This theorem is used to give an unified approach to several permanence properties of product spaces. It can also be applied to the study of linear maps acting on product spaces, leading under others, to some new permanence properties concerned with the closed graph theorem.

M. WRIEDT, <u>Zur Approximationstheorie in metrisierbaren lokalkonvexen Räumen</u>.

Es liegt stets ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum zugrunde. Als Metriken werden solche betrachtet, die die Topologie erzeugen und die Struktur des Raumes möglichst gut wiedergeben: die von Albinus eingeführten normartigen Metriken.

Der Satz, daß ein Banachraum genau dann reflexiv ist, wenn alle abgeschlossenen Hyperebenen proximinal sind, erweist sich in diesem allgemeineren Rahmen als falsch. Man kann zwar zeigen, daß aus der Proximinalität aller abgeschlossenen Hyperebenen die Reflexivität folgt, jedoch ist die Umkehrung in dem Sinne falsch, daß es einen (FM)-Raum gibt, für den keine die Topologie erzeugende normartige Metrik existiert, bzgl. der alle abge-

schlossenen Hyperebenen proximinal sind.
Die erhaltenen Aussagen werden auf den Raum aller komplexen Zahlenfolgen - versehen mit der Topologie der koordinatenweisen Konvergenz - angewendet. Hier sind für jede topologieerzeugende normartige Metrik alle abgeschlossenen Unterräume proximinal.
Allgemein folgt aus der Proximinalität aller abgeschlossenen Hyperebenen nicht die aller abgeschlossenen Unterräume. In Produkten von reflexiven Banachräumen kann eine Metrik angegeben werden, bzgl. der alle abgeschlossenen Unterräume von endlichem Defekt proximinal sind.

Strukturtheorie von Banach-Räumen

E.M. ALFSEN, Über die Strukturtheorie der Banach-Räume.

Es wird über eine von E.Effros und dem Vortragenden stammende Arbeit berichtet. Man studiert einen reellen (oder komplexen) Banach-Raum mittels geometrischer und analytischer Eigenschaften der abgeschlossenen Einheitskugel seines Duals. Das zentrale Thema des Vortrags ist die Untersuchung gewisser Teilräume, M-Ideale genannt, die die zweiseitigen Ideale einer C^*-Algebra verallgemeinern.

J. LINDENSTRAUSS, The approximation problem.

This talk is a survey of recent results and some conjectures related to the approximation problem. Among the question considered are: 1) New variants of the problem especially the probable connection between the approximation problem and uniform convexity. 2) Results concerning those compact sets which are approximable in an arbitrary Banach space. 3) The relation between the approximation problem and bases. 4) Approximation and duality. 5) Some new areas in which the approximation problem enters (e.g. in connection with simultaneous extensions).

J. LINDENSTRAUSS, On the structure of Orlicz sequence spaces.

The following theorems (obtained jointly with L. Tzafriri) are presented: 1) Every seperable Orlicz sequence contains a subspace isomorphic to l_p for some p. The "p" is found by using the Schauder fixed point theorem. 2) The class of separable Orlicz sequence spaces which have up to equivalence a unique symmetric basis contains properly all the l_p spaces, $1 \leq p < \infty$ but does not coincide with the class of all Orlicz sequence spaces. There is even a reflexive Orlicz sequence space which has infinitely many mutually inequivalent symmetric bases.

A. SZANKOWSKI, A separable reflexive space which is universal for all finite dimensional spaces.

The theorem about the existence of such a space is proved. Precisely, the following result ist proved:
For each $m = 1, 2, 3, \ldots$ there exists a space $\mathfrak{X}_m$ isomorphic to l_2 which is complementably universal for all m-dimensional (Banach) spaces.
This means: for every m-dimensional space X there is an isometric embedding $i : X \to \mathfrak{X}$ and a projection $P : \mathfrak{X} \to i(X)$ such that $\|P\| = 1$.

The main result follows then immediately : we take $\mathfrak{X} = (\sum \oplus \mathfrak{X}_m)_2$
The construction is fairly complicated.

P. WOJTASZCZYK, On bases in Banach spaces containing l_p as a complemented subspace.

A normalised basis $\{x_n\}$ in a Banach space X is of type wc_o (or semi-shrinking) if $\{x_n\}$ is weakly convergent to zero. This notion was introduced by C. Foiaş and I. Singer. The following condition for a Banach space to have a wc_o basis is proved: If X has a basis and contains l_p, $1 < p \leq \infty$ ($l_\infty = c_o'$) as a complemented subspace, then X contains a wc_o basis. In a special case $l_p + l_q$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, all unconditional bases are described. The general form of complemented subspaces in $l_p + l_q$, $1 \leq p,q \leq \infty$, is established. Some further examples in basis theory are constructed.

Lokalkonvexe Vektorverbände, Banach-Verbände.

*) R. CRISTESCU, Sur les espaces dirigés localement convexes.

On considère des topologies localement convexes sur des espaces linéaires ordonnés dirigés. On généralise certains résultats sur le dual d'un espace réticulé localement convexe, obtenus par I.Kawai, H.Gordon et Yan-chuen Wong. On généralise aussi certains résultats obtenus par l'auteur, dans un travail précédent, sur le prolongement des topologies localement solides.

R. NAGEL, Ein Stone-Weierstrass Theorem für Banachverbände.

Sei E ein Banachverband mit quasi-inneren Punkten in E_+, und

*) s. Einleitung

es sei E dargestellt als Banachverband stetiger numerischer Funktionen auf dem kompakten Strukturraum. Eine Teilmenge N von K heißt eine E-Nullmenge, wenn $I_N = \{x \in E : x(N) = \{0\}\}$ dicht in E ist.

Theorem: Ein Unterverband H von E, der die Konstanten enthält, ist genau dann dicht in E, wenn es zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen M_1, M_2 von K eine E-Nullmenge N gibt, so daß H die Mengen $M_1 \setminus N$ und $M_2 \setminus N$ trennt (d.h. zu $\varphi_1 \in M_1 \setminus N$, $\varphi_2 \in M_2 \setminus N$ gibt es $h \in H$ mit $h(\varphi_1) \neq h(\varphi_2)$).

Der Satz verallgemeinert die bekannten Stone-Weierstrass Theoreme für $C(X)$, $L^p(X,\Sigma,\mu)$ und Banach-Funktionenräume.

N.J. NIELSEN, Order bounded and lattice absolutely summing operators.

Let E and F be Banach spaces and B a Banach lattice. A linear operator $T: E \to B$ is called order bounded, if T maps the unit ball of E into an order bounded subset of B. An operator $T: E \to F$ is called B-absolutely summing, if for every bounded operator $S: F \to B$ $S \circ T$ is order bounded.

The basic properties of the above defined operators are investigated; especially the case when B is a Banach function lattice $L^\rho(\Omega,\Sigma,\mu)$, where ρ is a function norm on a probability space (Ω,Σ,μ). A "duality" theorem similar to the duality theorem of L. Schwartz is proved, and it is indicated, what role the above operators play in the theory of cylindrical measures.

M. WOLFF, Abstrakte dynamische Systeme und ein Satz von Halmos - von Neumann.

Sei E ein komplexer Banach-Verband und G eine in der starken

Operatortopologie kompakte Gruppe positiver Operatoren. G sei irreduzibel.

Bis auf Isomorphie ist dann E ein Funktionenunterverband von $L^1(G, m)$, wo m das Haarmaß auf G bezeichnet und G wirkt auf diesem Unterverband als die Gruppe der Verschiebungen (auch Rotationen oder im abelschen Fall Translationen genannt). Der Satz von P.R.Halmos - J. von Neumann über ein dynamisches System mit diskretem Spektrum ist ebenso ein Spezialfall dieses Satzes wie das verwandte Ergebnis von H.P.Lotz über irreduzible Operatoren mit diskretem Spektrum auf einem AM-Raum mit Einheit.

Das vorgetragene Ergebnis entstand in Zusammenarbeit mit Herrn Dr. R.J.Nagel, Tübingen.

Funktionenalgebren

*) H. BUCHWALTER, Complements au Théorème de Nachbin-Shirota.

Soit T un espace topologique complètement régulier. Une partie A de T est dite bornée (ou relativement pseudocompacte) lorsque toute fonction réelle continue sur T est bornée sur A . Si tout borné de T est relativement compact, T est dit un μ-espace. L'algèbre C(T) de toutes les fonctions continues sur T est topologisée avec la convergence compacte sur T ou avec la convergence bornée sur T , donnant les espaces localement convexes $C_c(T)$ et $C_b(T)$. On appelle T" l'espace des caractères continus de $C_b(T)$, muni de la topologie induite par le replété (ou realcompactification) νT de T . Le théorème classique de Nachbin-Shirota s'énonce:

(a) $C_c(T)$ est tonnelé ssi T est un μ-espace, ou encore ssi $T=T''$, ou encore ssi $C_c(T)=C_b(T)$.

(b) $C_c(T)$ est bornologique ssi T est replet, i.e. ssi $T=\upsilon T$.

(c) (SCHMETS-DE WILDE, 1971) $C_c(T)$ est ultrabornologique ssi T est replet.

On sait que les algèbres $C(T)$ et $C(\upsilon T)$ sont, par prolongement-restriction, algèbriquement identiques. On peut donc placer sur $C(T)$ diverses topologies localement convexes :
$C_c(T)$, $C_b(T)$, $C_c(T'')$, $C_b(T'')$, ..., $C_c(\upsilon T)$. Et l'on peut alors retrouver les résultats cités en donnant les généralisations suivantes :

(1) Les tonneaux de $C_c(T)$ forment une base de voisinages de 0 de $C_b(T)$.

(2) Les tonneaux de $C_b(T)$ forment une base de voisinages de 0 de $C_b(T'')$.

(3) $C_b(T)$ est tonnelé ssi T est distingué dans T'', i.e. ssi tout borné de T'' est contenu dans l'adhérence d'une borné de T .

En itérant transfiniment l'opération de passage au bidual T'' , on construit un μ-espace μT , intermédiaire entre T et υT , qui est le μ-ifié de T. Alors :

(4) $C_c(\mu T)$ est tonnelé et c'est même l'espace tonnelé associé à $C_c(T)$.

(5) $C_c(\upsilon T)$ est l'espace ultrabornologique associé à $C_c(T)$ mais peut ne pas être l'espace bornologique associé. Si T est localement pseudocompact, $C_c(\upsilon T)$ est l'espace bornologique associé a $C_c(T)$ ssi $C_c(T)$ est semi-complet.

G.L. SEEVER, Algebras of continuous functions on hyperstonian spaces.

Let H be a w^*-closed algebra of continuous functions on a hyperstonian space, and let φ be a w^*-continuous multiplicative linear functional on H. Denote by M_φ^* the set of normal representing measures for φ, and let E_φ be the closure of the union of the carriers of the members of M_φ^*. Let e_φ be the characteristic function of E_φ. Then $e_\varphi \in H$, and e_φ is the minimal idempotent in H such that $\varphi(e_\varphi) = 1$. The F. and M. Riesz theorems of Glicksberg, of König and Seever, and of Brian Cole are consequences of this fact. The principal tool used in the proof is a slight extension of a result of Hoffman and Rossi:

$\{u \in \mathrm{Re}\,C(\Omega) : \forall t>0, \exists\ h_t \in H \ni \varphi(h_t) = 1 \text{ and } u \geq \log|h_t|\}$ is w^*-closed.

Affine stetige Funktionen und kompakte konvexe Mengen

T.B. ANDERSEN, On tensor products of compact convex sets and extensions from split faces.

We give a description of the methods involved in the proof of the following theorem, which was known in the case where B is one-dimensional : Let K be a compact convex set, F a closed split face of K and b a continuous affine map from F into a Banach space B. If B has the approximation property then b admits a continuous affine extension to all of B with the same norm. We show how the methods of tensor products of compact convex sets can be used to reduce the problem to the case $B = \mathbb{R}$.

E. BEHRENDS, Reflexivität von Räumen stetiger affiner Funktionen.

Für jeden kompakten Raum T gilt: $C(T)$ ist genau dann reflexiv wenn T endlich ist.

Wir untersuchen eine entsprechende Fragestellung für kompakte konvexe Mengen K und die zugehörigen Räume

$A(K) := \{ f \mid f: K \to \mathbb{R} \text{ stetig affin} \}$.

Es gilt: Für $K \subset \mathbb{R}^n$ ist trivialerweise $A(K)$ reflexiv, doch läßt sich umgekehrt aus der Reflexivität von $A(K)$ nicht schliessen, daß K endlich dimensional ist (s.u.).

Ergebnisse:

1) Es gibt genügend viele unendlichdimensionale K mit reflexivem $A(K)$ (denn jeder Banachraum $\neq 0$ ist isomorph einem $A(K)$).

2) Für gewisse K (Simplexe und α-Polytope) folgt aus der Reflexivität von $A(K)$ die Aussage $K \subset \mathbb{R}^n$.

3) Diejenigen K mit reflexivem $A(K)$ lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

Äquivalent sind: (i) $A(K)$ reflexiv. (ii) Es existiert ein reflexiver Banachraum B und ein $x_o \in B$ mit $\|x_o\| = 1$, so daß

$K \cong \{ f \mid f \in B', f(x_o) = \|f\| = 1\}$

und $\mathrm{Lin}(K)$ σ-abgeschlossen in B' ist.

(iii) Für alle $k_1, k_2 \in K$ ist

$\{ (f(k_1), f(k_2)) \mid f \in A(K), \|f\| \leq 1\}$

eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

(Die Äquivalenz von (i) und (iii) läßt sich mit Hilfe des James-Kriteriums für Reflexivität beweisen).

J.L.B. COOPER, Convexity problems in the Foundations of Termodynamics.

A number of attempts have been made to establish axioms for classical thermodynamics based on the properties of the ordering of states induced by the possibility of natural transitions between them. It will be shown that existence and additivity of an entropy function can be established under reasonable assumptions. If for the second law of thermodynamics we take the following:

No transition from a state in which two systems are in equilibrium to one in which they are not is possible

then assuming the state space linear the entropy function can be proved to be strictly concave. The problem to be discussed is that of finding natural conditions to guarantee the existence of a differential for the entropy. It is shown that this can be done on the assumption that the set of directions inaccessible at a point varies continuously with the point, and that this enables one to prove the properties of absolute temperature.

B. FUCHSSTEINER, A Theorem about Faces.

We deal with the following situation:

Given a compact convex subset X of a locally convex vector space, a sequence X_n $(n \in \mathbb{N})$ of compact convex subsets of X and a nonempty face F with $F \cap X_n = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Theorem 1: There exists a sequence Y_n $(n \in \mathbb{N})$ of compact convex subsets of X and a sequence $\lambda_n (n \in \mathbb{N}, \lambda_n < 1)$ monotoniously converging to 1 with the properties:

(i) $Y_{n+1} \supset Y_n$, $Y \supset X_n$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\complement_X Y_n$ is convex, $\complement_X Y_n \supset \overline{\complement_X Y_{n+1}}$ $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(iii) $Y_{n+1} \supset \varepsilon \overline{F} + (1-\varepsilon)\, Y_n \quad \forall\, \varepsilon \leq \lambda_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(iv) $\complement_X Y_n \cap F \neq \emptyset \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Corolary: If $F = \complement_X \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ then F contains an extreme point.

As an application we get:

For every $f \in C(X)$ with $f(x) > 0$ for all extreme points x the upper semicontinuous concave hull $\bar{f}$ of f is strictly greater than 0 . This easily gives the Bishop - de Leeuw theorem.

M. ROGALSKI, Espaces réticulés de fonctions affines sur une convexe compact.

On étudie les sous-espaces H de l'espace A(X) des fonctions affines continues sur un convexe compact X qui contiennent les constantes et sont fortement réticulés au sens suivant: pour toutes f,g de H, la borne supérieure de f et g dans A(X) existe et appartient à H . On montre comment on peut décrire ces sous-espaces au moyen de topologies "faciales" sur l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X , topologies engendrées par des faces fermées "parallélisables", qui généralisent les faces complementables introduites par Alfsen et Andersen.

G. WITTSTOCK, Tensorprodukte geordneter linearer Räume und nukleare Räume.

Mit Hilfe der geordneten Tensorprodukte geordneter linearer Räume kann man nukleare Räume dual charakterisieren: Ein lokalkonvexer Raum ist dann und nur dann nuklear, wenn es im dualen Raum zu jeder gleichstetigen Menge eine größere gleichstetige Menge gibt, die ein kompaktes Choquet-Simplex ist.

Spektraltheorie

K.H. FÖRSTER, Eigenschaften einer Störungsmetrik von C. Apostol.

$\mathfrak{N}$ sei die Menge der stetigen, normalen Operatoren auf einem Hilbertraum. Nach C. Apostol (J. Funct. Anal. 2 (1968), 395-408) gilt: $\mathfrak{N}$ ist mit $p:(A,B) \to \max \left[\limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} (-B)^k \right\|^{1/n}, \right.$ $\left. \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k} (-A)^k \right\|^{1/n} \right]$ ein vollständiger, metrischer Raum. Der Beweis beruht auf folgender Beziehung für die Spektralscharen: $p(A,B)<\delta \Rightarrow E_A(\Delta) \cdot E_B(C(\Delta,\delta)) = E_A(\Delta)$ für alle kompakten Δ, wobei $C(\Delta,\delta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : d(\lambda,\Delta) \leq \delta\}$. Damit folgt auch: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lokalbeschränkt und borelmeßbar, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$p(f(A),f(B)) \leq M(f, C(\Sigma(A),p), p + \varepsilon), \quad p = p(A,B),$$

dabei ist $M(f,\Delta,.)$ der Stetigkeitsmodul von f auf Δ. Ist also die Funktion f stetig (auf einer Umgebung des Spektrums $\Sigma(A)$), so ist die Abb. $f:(\mathfrak{N},p) \to (\mathfrak{N},p)$ stetig (an der Stelle A). Die Menge $\mathfrak{N}_k$ der kompakten, normalen Operatoren ist abgeschlossen in $(\mathfrak{N},p)$. Auf $\mathfrak{N}_k$ ist p echt stärker als die Normmetrik. Der Beweis beruht auf dem folgenden Satz: Sind A, B aus $\mathfrak{N}$, ist Σ Spektralmenge von A und $p = p(A,B) < (1/2)d(\Sigma, \Sigma(A) \smallsetminus \Sigma)$, dann gilt $E_A(\Sigma) = E_B(C(\Sigma,p))$. Auf allen linearen, stetigen Operatoren ist p eine Halbmetrik, die mit der Normmetrik unvergleichbar ist; ob p auf $\mathfrak{N}$ stärker als die Normmetrik ist, ist nicht bekannt.

B. GRAMSCH, Eine Klasse meromorpher Operatorfunktionen.

Sei X ein Hilbertraum, L(X) die Menge der beschränkten linearen Transformationen in X, $\Phi^+ = \{T \in L(X) : \operatorname{codim} R(T) < \infty\}$, $\Phi^- = (\Phi^+)^*$,

$\mathcal{J} = \{T \in L(X) : (\alpha_j(T))_j \in s\}$; $\alpha_j(T)$ Approximationszahlen von T.

<u>Satz 1</u>: Sei $T(z)$ eine auf dem Holomorphiegebiet $G \subset \mathbb{C}^N$ analytische Operatorfunktion mit Werten in Φ^-, ferner sei $T(z')$ injektiv für ein $z' \in G$. Dann gibt es eine auf G meromorphe Operatorfunktion $M(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $M(z) \cdot T(z) \equiv I$ (außer auf einer analytischen Menge); 2) $M(z)$ hat eine lokale Darstellung der Form $M(z) = A(z) + B(z)PC(z)$, wobei $A(z)$ analytisch, $B(z)$ und $C(z)$ meromorph sind und $\dim R(P) < \infty$ gilt; 3) Für $N = 1$ hat $M(z)$ Hauptteile von endlichem Rang; 4) $M(z) = T^{-1}(z)$ ist eindeutig, wenn $\operatorname{ind} T(z) = 0$.

<u>Satz 2:</u> (globale Darstellung von $M(z)$): Es gilt $M(z) = A(z) + S(z)$, wobei $A(z)$ analytisch auf G ist, und $S(z)$ Werte im Ideal $\mathcal{J}$ hat.

Der Vortrag behandelt die Beweisideen zu Satz 2, Satz 1 ist in Math. Annal. 188, 97-112(1970) enthalten. Folgerung aus <u>Satz 2:</u> Die Resolvente $(I - zK)^{-1}$ eines kompakten Operators ist Summe einer ganzen Funktion $A(z)$ und einer meromorphen Funktion mit Werten in $\mathcal{J}$.

M.A. KAASHOEK, <u>Some generalizations of Krein-Rutman's theorem and locally compact semi-algebras.</u>

Let B be a complex Banach algebra, and let t be an element in B such that the peripheral spectrum of t consists of poles of t. The smallest closed semi-algebra in B containung t will be denoted by $A(t)$, and $C(t)$ will be the set of cluster points of the sequence

$$\{\|t^n\|^{-1} t^n\}_{n=1}^{\infty} .$$

Theorem 1: Suppose that the spectral radius of t, $r(t)$, is positive, and suppose that there exists a closed ideal J in $A(t)$ such that

$$J \cap (-J) = (0)\ , \quad J \cap C(t) \neq \emptyset\ .$$

Then $r(t)$ belongs to the spectrum of t.

Theorem 2: We have $A(t) \cap (-A(t)) = (o)$ if and only if $r(t)$ is a pole of maximal order in the peripheral spectrum of t.

Theorem 1 includes the generalizations of the Krein - Rutman theorem proved by Sasser (1964) [1] and Raghavan (1970) [2]. References:

[1] D.W.Sasser, Quasi-positive operators, Pacific J. Math. 14 (1964), 1029-1037. [2] T.E.S. Raghavan, On linear operators leaving a convex set invariant in normed linear spaces, Mathematatika 17 (1970), 57-62.

E. SCHEFFOLD, Eine Verallgemeinerung des Theorems von Perron - Frobenius.

Sei E ein geordneter komplexer Banachraum mit abgeschlossenem positivem Kegel $K \neq \{0\}$ und T ein positiver stetiger linearer Operator in E. Ferner sei $K - K$ ein Teilraum von E. Es bezeichne K' den dualen Kegel, $\Sigma(T)$ die Menge der Spektralmengen des Spektrums $\sigma(T)$ von T und $d(0,A)$ den Abstand des Ursprungs von einer Menge A in der komplexen Zahlenebene. Für T wird der folgende schwache Spektralradius $r_\sigma(T)$ eingeführt:

$$r_\sigma(T) = \inf\Big\{r>0 :\ |\lambda| > r,\ x \in K-K,\ \mu \in K'-K' \text{ impliziert } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}}\mu(T^n x) \text{ absolut konvergent.}$$

Theorem:

1.) T besitzt nichtnegative Spektralwerte.

2.) Sei K erzeugend, dann gilt:

α) $r_\sigma(T) \in \sigma(T)$; β) $r_\sigma(T) \geq \sup\{d(0,\sigma) : \sigma \in \Sigma(T)\}$

γ) $r_\sigma(T) \geq \sup\{|\lambda| : \lambda$ Eigenwert von $T\}$;

δ) Resolvente $R(\lambda,T) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda > r_\sigma(T)$.

3.) Ist K total, so ist $r_\sigma(T) \geq \sup\{d(0,\sigma) : \sigma$ "periphere" Spektralmenge$\}$.

4.) Seien $r_\sigma(T)$ und $\bar{\lambda}$ mit $|\lambda| = r_\sigma(T)$ Pole der Resolvente. Dann ist die Ordnung des Pols $\bar{\lambda}$ kleiner oder gleich der Ordnung des Pols $r_\sigma(T)$, falls α) K erzeugend oder β) $r_\sigma(T)$ und $\bar{\lambda}$ Häufungspunkte einer gewissen Zusammenhangskomponente sind.

Nicht-lokalkonvexe Vektorräume

E. BINZ, c-Dualitäten.

Für einen Limesvektorraum F über $\mathbb{R}$ bezeichne $\mathcal{L}_c(F)$ den c-Dualraum von F, d.h. die Menge aller stetigen, reellwertigen Funktionale von F, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz und den punktweise definierten Operationen. Der Raum F heißt c-reflexiv, wenn die kanonische Abbildung $j_F : F \to \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c(F)$ ein bistetiger Isomorphismus ist.

Satz 1 Ein topologischer Vektorraum E über $\mathbb{R}$ ist genau dann c-reflexiv, wenn E vollständig und lokalkonvex ist.

Satz 2 Ein Limesvektorraum über $\mathbb{R}$ ist genau dann c-Dualraum eines topologischen Vektorraumes über $\mathbb{R}$, wenn er induktiver Limes (in der Kategorie der Limesräume) seiner durch die Inklusion gerichteten absolutkonvexen, kompakten topologischen Teilmengen ist und außerdem trennende Funktionale besitzt.

Es bezeichne $\Gamma_c G$ die mit der Limitierung der stetigen Konvergenz und den punktweise definierten Gruppenoperationen versehene Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen einer Limesgruppe G in den Einheitskreis.

<u>Satz 3</u> Für eine einem topologischen Vektorraum E über $\mathbb{R}$ unterliegende additive topologische Gruppe, sie heiße ebenfalls E, ist die kanonische Abbildung $i_E : E \to \Gamma_c \Gamma_c E$ genau dann ein bistetiger Gruppenisomorphismus, wenn der topologische Vektorraum E vollständig und lokalkonvex ist.

K. KUTZLER, <u>Konsequenzen des Satzes von Dini für $C_c(X)$</u>.

Seien X ein Limesraum und $C(X)$ die $\mathbb{R}$-Algebra aller stetigen, auf X definierten und reellwertigen Funktionen. $C(X)$ trägt in natürlicher Weise die folgenden Limitierungen: 1) die Topologie der durch X definierten punktweisen Konvergenz τ_X, 2) die Ordnungskonvergenz Λ_0, 3) die stetige Konvergenz Λ_c. Die Gültigkeit des Satzes von Dini für $C_c(X)$ führt zur Einführung der Dini-Konvergenz $\Lambda_D := \tau_X \vee \Lambda_0$. Ist X ein vollständig regulärer, top. Hausdorffraum, so stimmen auf ordnungsbeschränkten Mengen von $C(X)$ die von Λ_D und Λ_c induzierten Limitierungen überein. Dieses Ergebnis gibt dann eine Möglichkeit, für eine Algebra vom Typ $C(X)$ die stetigen Konvergenzen zu charakterisieren, die von vollständig regulären top. Hausdorffräumen erzeugt werden.

S. ROLEWICZ, <u>Isomorphic and isometric properties of non locally convex spaces.</u>

In the talk I want to present facts and open problems concerning non-locally convex linear metric spaces. The schedule of the talk is following 1. Definitions and basic facts concerning linear metric spaces. 2. Linear dimension, linear codimension, universality. 3. Locally bounded and locally pseudoconvex spaces. 4. Existence of linear continuous functionals and relative problems. 5. Absolute and unconditional convergence. Integrals with respect to a vector valued measure. 6. Definitions of different kind of approximative dimensions, definitions of Schwartz and nuclear non-locally convex spaces. 7. F-norms and problems concerning of existence of "good" F-norms. 8. An extension of the Mazur-Ulam theorem. 9. Maximal norms in F-spaces.

Nichtlineare Approximation

K. FLORET, Eine Bemerkung über a-priori-Fixpunkte nichtexpansiver Abbildungen.

Für eine gewisse Klasse von konvexen Mengen K wird ein verallgemeinerter Mittelpunkt definiert, der die Eigenschaft besitzt, für alle nichtexpansiven Abbildungen $\Phi : K \to K$ mit $\overline{co}\,\Phi(K) \supset K$ Fixpunkt zu sein.

W.V. PETRYSHYN, A fixed point theorem for 1-set und 1-ball contractions with applications to surjectivity theorems.

The writer has shown that if X is a real Banach space, D a bounded open subset of X, and $T : \bar{D} \to X$ is either a 1-set-contraction or a 1-ball-contraction map which satisfies the Leray-Schauder condition on ∂D, then T has a fixed point in $\bar{D}$ provided T satisfies the so-called condition (c) on $\bar{D}$. This fixed point theorem includes, as special cases, the fixed point theorems for the case when: (i) T is compact; (ii) T is condensing;

(iii) T is of contractive or nonexpansive type with compact or completely continuous perturbations; (iv) T is of semi-contractive type; and others.

In this paper the above fixed point theorem is applied to the study of the solvability of the equation: (j) $x-T(x) = f$, where f is any element in X and $T : X \to X$ is a map which is either 1-set-contractive or 1-ball-contractive and which satisfies certain additional conditions. The obtained surjectivity theorems für $I-T$ are then used to study the solvability of Eq. (j) for various special classes of T.

L. WAELBROECK, <u>The nonlinear appoximation problem</u>.

Let X be a compact space, E a topological vector space. When is $C(X) \otimes E$ dense in $C(X,E)$? This problem has been introduced by V. Klee (Math.Ann. 1960) who showed that it is the case if E is locally convex, considered by A.H.Shuchat (in pub. Proc. AMS), who showed that it is the case when X is finite dimensional. Using Shuchat's result, using an approximate extension property, it can be shown that two metrizable tvs's have either both the nonlinear approximation property or that neither has when they are homeomorphic. Many examples of homeomorphic metrizable tvs's (even non locally convex) are known.

(X,Y,E) has the approximate extension property, if the restriction $C(Y,E) \to C(X,E)$ has dense image. It has the extension property if this mapping is surjective. A straight forward computation shows that a metrizable space has the approximate extension property if it has the extension property.

Every compact space can be embedded in a compact space with the nonlinear approximation property. These are some of the ingredients that go into the proof.

Anwendungen

H.H. KELLER, Differentialrechnung in unendlichdimensionalen Vektorräumen.

Für Abbildungen zwischen reellen topologischen Vektorräumen werden einige der wichtigsten Differenzierbarkeitsbegriffe und deren Beziehungen erläutert. Besonders wird auch hingewiesen auf die verschiedenen Stetigkeitsforderungen, die an die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung gestellt werden können, und auf die Rückwirkung der gewählten Stetigkeitsbedingung für die Ableitung auf die Eigenschaften des Restgliedes der gegebenen Funktion.

W.A.J. LUXEMBURG, Closure properties of systems of exponentials $\exp(i\lambda_n t)$.

From some properties of entire functions of exponential type which do not grow too fast on a line we shall derive the various Müntz - Szász type theorems for L^p-spaces ($1 \leq p < \infty$) and C-spaces concerning the closure properties of sequences of exponential functions $\{\exp(i\lambda_n t)\}$ where $\lambda = \{\lambda_n\}$, $n \geq 0$, is an arbitrary sequence of complex numbers.

D. MITROVIĆ, Sur la représentation de Cauchy des distributions.

On propose de présenter une correspondance entre l'espace des distributions à support compact et un ensemble des fonctions holomorphes. Voilà un résultat typique:

Théorème 1. Soit $T \in (\mathcal{E}')$ avec $\mathrm{supp}(T) = K \subset \mathbb{R}$ et soit $f(z) = \hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\langle T_t , \frac{1}{t-z} \right\rangle$. Alors,

(1) la fonction f est holomorphe pour $z \notin K$,

(2) $f(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ pour $|z| \to \infty$, et

(3) $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} f(t + i\varepsilon)$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} f(t - i\varepsilon)$ existent dans $(\mathcal{D}')$.

Réciproquement, si une fonction $z \mapsto f(z)$ admet les conditions (1)-(3), alors, elle est la représentation de Cauchy d'une distribution $T \in (\mathcal{E}')$ avec $\mathrm{supp}(T) = K$.

Deux théorèmes analogues concernent les distributions dans $(\mathcal{O}'_\alpha)$.

D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ, Functional-differential equations of Carleman type.

A function $g(t) \not\equiv t$ mapping a set Ω onto itself satisfies Carleman condition of order $n \geq 2$ if $g_n(t) = t$, where $g_o(t) = t$, $g_{k+1}(t) = g(g_k(t))$, $(k=0,1,2,\ldots)$.

If Ω is homeomorphic with $\mathbb{R}$ then a continuous function satysfying Carleman condition of order $n > 2$ does not exist. General form of continuous functions satysfying Carleman condition of order $n=2$ on a set homeomorphic with $\mathbb{R}$ is showed. Furthermore functional-differential equations of Carleman type, i.e. equations of the form

$$x^{(n)}(t) = F\left[t, x(t), x(g(t)), \ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n-1)}(g(t))\right],$$

where $g(t)$ is a continuous function satysfying Carleman condition $(n=2)$ on $\mathbb{R}$ or on a subset of $\mathbb{R}$ homeomorphic with $\mathbb{R}$, are studied.

F.W. SCHÄFKE, Produktintegration mit operatorwertigen Maßen.

Es werden (B)-Raum-wertige Integrale (B)-Raum-wertiger Funktionen betrachtet, die gebildet sind mit Inhalten bzw. Maßen, deren Werte lineare Abbildungen zwischen den beiden (B)-Räumen sind. In diesem Rahmen werden Sätze entwickelt, die die klassischen Aussagen über Produktmaße und insbesondere den Satz von Fubini verallgemeinern.

*) A.WŁODARSKA - DYMITRUK, The spaces of the exponential - periodic functions and their applications.

It will be shown how a system of differential - difference equations can be reduced, by a simple algebraic method, to a system of ordinary differential equations for exponential - periodic solutions and how this procedure can be applied to the problem of optimum control in the class of exponential - periodic functions. Moreover, a theorem on exponential - periodic solutions of a perturbed non - linear system of differential - difference equations will be given.

Manfred Wolff, Tübingen