MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 46|1971

(letzter Bericht 1971)

Numerische Lösung nichtlinearer partieller Differential- und Integrodifferentialgleichungen

28. 11. bis 4. 12. 1971

Erstmals konnte in Oberwolfach eine Tagung stattfinden, die sich speziell mit der numerischen Lösung nichtlinearer partieller Differential- und Integrodifferentialgleichungen befaßte. Die Tagung, die unter der Leitung von R. Ansorge (Hamburg) und W. Törnig (Jülich/Aachen) stand, sollte einen Überblick über den derzeitigen Stand der Forschung auf diesem Gebiet vermitteln.

Schwerpunkte der Tagung waren:

1. Numerische Behandlung nichtlinearer Probleme der Physik,
2. Diskretisierungsverfahren bei nichtlinearen parabolischen Anfangsrand- und elliptischen Randwertproblemen,
3. Stabilitäts- und Konvergenztheorie für nichtlineare Anfangs- und Anfangsrandwertprobleme.

Weiter wurde berichtet über Methoden zur Gewinnung geschlossen darstellbarer Näherungslösungen, über die Anwendung von Monotonieprinzipien und Variationsmethoden.

An Hand einiger mathematischer Probleme aus Plasmaphysik und Meteorologie wurde demonstriert, daß theoretische Betrachtungen allein keine zuverlässige Voraussage für die Güte der Näherungslösung zulassen. Mit Hilfe von Erfahrungen mit numerischen Experimenten kann man in einigen Fällen jedoch zu solchen Voraussagen gelangen. Bei den Vorträgen und Diskussionen über Diskretisierungsverfahren zeigte sich, daß zur Lösung nichtlinearer Probleme in der Regel Kenntnisse über das Verhalten der Näherungslösungen für endliche Diskretisierungsparameter im Unterschied zu linearen Problemen erforderlich sind.

Trotz der großen Zahl von Vorträgen blieb noch hinreichend Zeit für anregende Diskussionen und für den so wichtigen Austausch von numerischen Erfahrungen. Die persönlichen Kontakte wurden durch die angenehme Atmosphäre des Instituts und durch seine Gastfreundschaft gefördert, für die der Institutsleitung und den Mitarbeitern im Institut herzlich gedankt sei.

Teilnehmer

H. Ade, Mainz
J. Albrecht, Clausthal-Zellerfeld
R. Ansorge, Hamburg
W. Börsch-Supan, Mainz
E. Bohl, Münster
H. Bulirsch, Köln
K. Burg, Karlsruhe
L. Collatz, Hamburg
B. Döring, Düsseldorf
H. Engels, Jülich
K. Graf Finck v. Finckenstein, Garching
E. Gekeler, Mannheim
R. Gorenflo, Aachen
A.R. Gourlay, Peterlee (Großbritanien)
E. Grafarend, Bonn
R.D. Grigorieff, Berlin
G. Hämmerlin, München
R. Hass, Hamburg
G. Hedström, Göteborg (Schweden)
J. Hertling, Wien (Österreich)
U. Hornung, Münster
W. Kinnebrock, Karlsruhe
W. Kolar, Aachen
H.-J. Kornstaedt, Berlin
H.O. Kreiss, Uppsala (Schweden)
E. Martensen, Darmstadt
Th. Meis, Jülich
H. Mülthei, Jülich
H. Neunzert, Jülich
R. Nicolovius, Hamburg
W. Niethammer, Mannheim
K. Nixdorff, Bochum
V. Rathscheck, Hamburg
R. Rautmann, Karlsruhe
R. Redheffer, Karlsruhe
A. Sachs, München
J. Schröder, Köln
M.N. Spijker, Leiden (Niederlande)
H.J. Stetter, Wien (Österreich)
W. Törnig, Jülich
U. Trottenberg, Köln
W. Velte, Würzburg
H. Wacker, München
A. Wakulicz, Warschau (Polen)
W. Walter, Karlsruhe
H.J. Weinitschke, Berlin
H. Werner, Münster
J. Wick, Jülich
R. Wolf, Berlin

Vortragsauszüge

H. ADE: Zur Existenz von Lösungen gewisser nichtlinearer elliptischer Randwertaufgaben.

Es werden DIRICHLETsche Randwertaufgaben der folgenden Art betrachtet:

$$(L_1 u)(x) = f(x,u(x)) \quad \text{für} \quad x \in \Omega$$
$$u(x) = (M_2 u)(x) \quad \text{für} \quad x \in \dot{\Omega}\,.$$

Dabei sei:

a) $\bar{\Omega} = \Omega + \dot{\Omega}$ ein abgeschlossener, beschränkter Bereich im $\mathbb{R}^n$, $\bar{\Omega}$ enthalten in einem offenen Gebiet D des R^n, $\dot{\Omega} \in C^{(1,\lambda)}(D)$, $0 < \lambda < 1$.

b) L_1 ein allgemeiner (in D gleichmäßig) elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung.

c) $f: \bar{\Omega} \times R^1 \to R^1$, bzgl. x λ-hölderstetig und $|f(x,u(x))| \leq H_{11}(x) + H_{12}(x)|u|^2$ mit positiven, stetigen $H_{1k}(x)$, $k = 1,2$.

d) M_2: $C^{(0,\lambda)}(\bar{\Omega}) \to C^{(0,\lambda)}(\dot{\Omega})$ vollstetig mit $|(M_2u)(x)| \leq H_{21}(x) + H_{22}(x)|u|^2$ mit positiven, stetigen $H_{2k}(x)$, $k = 1,2$.

Ein abstrakter Satz, der für Gleichungssysteme der Form $L_1u = M_1u$, $L_2u = M_2u$ mit $L_1 : B \to B_1$ und $L_2 : B \to B_2$ linear,
$M_1 : A \to B_1$ und $M_2 : A \to B_2$ stetig,
wo $B \subseteq A$, B_1, B_2 Banachräume sind, die Existenz von Lösungen $u \in B$ unter bestimmten Voraussetzungen liefert, wird angewandt, um (mit Hilfe einer Reihe potentialtheoretischer Hilfsmittel) für gewisse Dirichletsche Randwertaufgaben der oben genannten Art Existenzaussagen zu bekommen.

R. BULIRSCH: Über eine Linearisierung von $F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0$.

Es wird eine Transformation angegeben, welche die allgemeine partielle Differentialgleichung $F(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0$ in eine (bzw. mehrere) lineare partielle Differentialgleichungen überführt. Diese Transformation hängt eng mit der Geometrie der durch

$$M := \{(r,s,t) \mid F(r,s,t) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

definierten Mannigfaltigkeit zusammen.

E. GEKELER: Zur Randwerttechnik bei der Lösung schwach nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen.

Für das Anfangs-Randwert-Problem

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x - f(x,t,u), 0 < x < 1, \; 0 < t$$

$u(x,0) = r(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$, $u(0,t) = s_1(t)$, $u(1,t) = s_2(t)$ mit $a(x,t) \geq \underline{a} > 0$ und $f_u \geq 0$ existiere eine eindeutig bestimmte Lösung $u(x,t)$, und es gelte $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u^*(x)$. Ist $u^*(x)$ bekannt, so kann $u(x,T) \approx u^*(x)$ für hinreichend große T gesetzt werden. Damit ergibt sich näherungsweise ein Randwertproblem, das seinerseits durch eines der bei elliptischen Randwertproblemen üblichen Differenzenverfahren angenähert werden kann. Bei dem auf diese Weise entstehenden nichtlinearen Gleichungssystem wird die Anwendbarkeit von Relaxation in Gesamt- und Einzelschritten untersucht. Es ergibt sich z. B., daß eine nichtlineare Variante des Block-Jacobi-Verfahrens mit Relaxation global konvergiert.

R. GORENFLO: Differenzenschemata monotoner Art für schwach gekoppelte Systeme parabolischer Differentialgleichungen.

Mit Hilfe eines diskreten Analogons des Monotonie-Lemmas von Nagumo und Westphal gelingt es, Differenzenschemata monotoner Art für einen gewissen Typ schwach gekoppelter Systeme (nichtlinearer) parabolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in einer Raumdimension mit gemischten (nichtlinearen) seitlichen Randbedingungen aufzustellen. "Schwach gekoppelt" bedeutet Kopplung nur über die unbekannten Funktionen, aber nicht über ihre Ableitungen. Speziell wird eine Modifikation der zweischichtigen Standard-Differenzenschemata untersucht.

A.R. GOURLAY: The hopscotch class of difference methods for partial differential equations.

The hopscotch class of difference methods is a set of mesh dependent difference schemes. Many well known algorithms are included in this classification including Dufort-Frankel and Peaceman-Rachford. In this talk the general approach and motivation will be outlined and specific areas of application considered. An interesting result for a hopscotch scheme for the integration of nonlinear hyperbolic systems will be presented.

R. HASS: Konvergenz von Differenzenverfahren für halblineare Anfangswertaufgaben.

In einem Banachraum $\mathcal{B}$ werden zur Approximation der Lösung der halblinearen Anfangswertaufgabe

$$u_t = F(t)u + G(t)u \ , \quad 0 \leqq t \leqq T \ , \quad u(0) = u_o$$

mit linearen Operatoren $F(t)$ von $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}$ in $\mathcal{B}$ und lokal gleichgradig lipschitzstetigen Operatoren $G(t)$ von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}$ Differenzenverfahren der Form

$$u_{n+1} = A(t_n,h)u_n + h\, B(h)\, G(t_n)u_n \ , \quad n \in \mathbb{N}_o \ , \quad t_n = nh$$

mit linearen Operatoren $A(t,h)$ und linearen gleichmäßig beschränkten Operatoren $B(h)$ von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}$ betrachtet und für diese ein Äquivalenzsatz aufgestellt:

Bei konsistenten Verfahren ist die L-Stabilität notwendig und hinreichend für die L-Konvergenz.

Die gleichen Überlegungen lassen sich auf implizite Mehrschrittverfahren übertragen.

G. HEDSTRÖM: Some numerical experiments with Dafermos's method for quasilinear hyperbolic equations.

Constantine Dafermos recently proved existence of a solution to the problem, $u_t + (f(u))_x = 0$ $(-\infty < x < \infty,\ t > 0)$, $u(x,0) = u_o(x)$, for $f \in C^2$ and u_o of bounded variation, by showing that u is the limit of solutions of the problem

$$(*) \qquad \begin{aligned} v_t + (f_h(v))_x &= 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0), \\ v(x,0) &= v_o(x), \end{aligned}$$

where f_h is a piecewise-linear approximation to f and $v_o(x)$ is a piecewise-constant approximation to $u_o(x)$. We have written computer programs to solve (*) for various choices of f, including the case of a 2 × 2 system. In all cases we found that shocks are approximated exceedingly well, much better than when finite-difference schemes are used.

J. HERTLING: Numerische Behandlung von Hammerstein-Gleichungen mit Variationsmethoden.

Hammerstein-Gleichungen mit positiven und quasidefiniten Kernen werden über ein- und mehrdimensionalen Bereichen des R^n betrachtet, und es werden Näherungslösungen durch Splinefunktionen bzw. finite Elemente konstruiert. Für die Näherungslösungen werden Existenz-, Eindeutigkeits- und Konvergenzbeweise und Fehlerabschätzungen geliefert.

W. KOLAR: Über Differenzenschemata von monotoner Art.

Aus dem nichtlinearen parabolischen 1. Randwertproblem vom Typ

$$F(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx}) = 0 \text{ in } G_p,\ W(t,x) - u(t,x) = 0 \text{ auf } R_p$$

erhält man ein zugeordnetes diskretes Problem, wenn die Differentialoperatoren durch allgemeine, auch mehrstufige Differenzenoperatoren ersetzt werden. Für das diskrete Problem werden Bedingungen angegeben, unter denen die Eigenschaften "von monotoner Art" und das "Maximum-Minimum-Prinzip" analog zum kontinuierlichen Fall gelten. Diese Bedingungen sind für diese Eigenschaften auch notwendig. Damit sind die für spezielle Verfahren bekannten Ergebnisse verallgemeinert, insbesondere für implizite Verfahren vervollständigt und bezüglich der Funktionenklassen von F erweitert. Für das 2. und 3. Randwertproblem können entsprechende Bedingungen ebenfalls formuliert werden. Für solche Verfahren von monotoner Art lassen sich Konvergenzaussagen und iterative Lösungsverfahren angeben.

H.O. KREISS: Nichtlineare Instabilität.

Bei meteorologischen Rechnungen benutzt man häufig das "leap-frog" Verfahren. Dieses ist für lineare Differentialgleichungen stabil. Im nichtlinearen Fall treten Instabilitäten auf. Es wird gezeigt, von welcher Art diese sind und wie man sie überwinden kann.

TH. MEIS: Zur Diskretisierung nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen.

Bei der Diskretisierung selbstadjungierter, nichtlinearer, elliptischer Differentialgleichungen bevorzugt man Verfahren, die Differenzengleichungen mit folgenden Eigenschaften liefern:

a) Die Funktionalmatrix ist symmetrisch,

b) Die Funktionalmatrix ist positiv definit.

c) Für die Lösungen der Differenzengleichungen gilt das Maximumprinzip.

Es werden einige Diskretisierungsverfahren theoretisch und praktisch im Hinblick auf diese Eigenschaften untersucht.

K. NIXDORFF: Das Leipholz'sche Verfahren.

Über das Leipholz'sche Verfahren zur Ermittlung periodischer Lösungen gewöhnlicher, nichtlinearer, nichtautonomer Differentialgleichungen vom Typ

$$\dot{x} = Ax + f(t,x)$$

mit

$$f(t+T,x) = f(t,x)$$

mit konstanter Matrix A, die nichtkritisch bezüglich T ist, wurde mehrfach in der Literatur berichtet, doch fehlten völlig numerische Erprobungen des Verfahrens:

Im Vortrag wird dies für die Differentialgleichung 2. Ordnung nachgeholt und über eine Erweiterung des Verfahrens auf einen der bei dieser Differentialgleichung auftretenden kritischen Fälle berichtet.

R. RAUTMANN: Ein Näherungsverfahren für spezielle parabolische Anfangswertaufgaben mit Operatoren.

Betrachtet werden parabolische Gleichungen der Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t} u + ((Ku) \cdot \nabla) u = \mu \cdot \Delta u , \quad \mu > 0 .$$

Unter einschränkenden Annahmen über die gegebene Funktionaloperation K und die Anfangswerte gilt für die Anfangswertaufgabe dieser Gleichung ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz, und die Lösung läßt sich näherungsweise in einem einfachen endlichen Rekursionsverfahren mit vorgeschriebener Genauigkeit berechnen.

R. REDHEFFER: Remarks on partially ordered linear spaces.

It turns out that every order-relation $\leqq$ in a normed linear space H is given by a Kamke norm; one sets $x \leqq 0$ if and only if $\|x\| \leqq 0$. If $Tu = u' - f(t,u)$, with $f(t,u\uparrow)$ quasi-monotone in the sense of Volkmann, the Kamke norm allows a simple formulation and proof of uniqueness, monotony, stability, and estimation theorems. The extension to cones without interior points leads to a generalization and sharpening of a remarkable uniqueness theorem recently obtained by Bony. The latter leads to a $\leqq$ monotony theorem, in appropriate generality and sharpness, when H is a Hilbert space. The error bounds are sufficiently specific for numerical evaluation.

A. SACHS: Iterationsverfahren für elliptische (nichtlineare) Differenzenoperatoren in Divergenzform.

Allgemeine a priori Bedingungen für numerische Konvergenz eines Iterationsverfahrens für Gleichungen mit nicht notwendig gleichmäßig monotonem Operator im HILBERT-Raum.

Maximum-Prinzip für (nichtlineare) Differenzenoperatoren in Divergenzform.

Anwendung auf Minimalflächengleichung und Gleichung für die Oberfläche einer stationären Flüssigkeit unter dem Einfluß von Schwerkraft und Oberflächenspannung.

Regularisierung bei einem nicht LIPSCHITZ-beschränkten Differenzenoperator der laminaren Strömungstheorie nicht NEWTONscher Flüssigkeiten.

J. SCHRÖDER: Einschließungsaussagen bei nichtlinearen Differentialgleichungen.

Unter welchen Bedingungen gilt die folgende Aussage?

"Aus $M\varphi \leqq 0 \leqq M\psi$, $\varphi \leqq \psi$ folgt, daß eine Lösung u der Gleichung $Mu = 0$ mit $\varphi \leqq u \leqq \psi$ existiert." Hinreichende Bedingungen lassen sich abstrakt formulieren. Für Differentialoperatoren der Form

$$(Mu)(x) = \begin{cases} F(x,u,u_x,u_{xx}) \;, & x \in G \\ u - \gamma(x) \;, & x \in \partial G \end{cases}$$

wird folgende Beweismethode beschrieben.

1) Man ersetzt $Mu = 0$ durch $M^{\#}u = 0$ mit $u^{\#} = \sup \{ \varphi, \inf \{ u, \psi \} \}$,

$$(M^{\#}u)(x) = \begin{cases} F(x,u^{\#},u_x,u_{xx}) + u - u^{\#} \;, & x \in G \\ u - \gamma(x) \;, & x \in \partial G \;. \end{cases}$$

2) Man beweist die Existenz eines $u^{\#}$ mit $M^{\#}u^{\#} = 0$ (i. a. z. B. möglich bei semilinearen Problemen).

3) Man zeigt mit Hilfe eines Monotonie-Satzes, daß $\varphi \leq u^{*} \leq \psi$, womit $Mu^{*} = 0$ (unter sehr schwachen Bedingungen möglich).

M.N. SPIJKER: Equivalence theorems for nonlinear finite-difference methods.

An equivalence theorem will be presented which states that for an arbitrary nonlinear finite-difference method convergence is equivalent to both consistency and stability.

In the definition of the concept of convergence that occurs in this theorem it is required that

1. the solution u_h of the difference equation converges (if $h \to 0$) to the true solution U of the original infinitesimal problem even if small local perturbations are present in the difference scheme, and
2. the global discretization error $u_h - U$ admits an expansion in powers of h.

The concept of stability occuring in the equivalence theorem is equivalent to stability of the linearization of the difference scheme at the true solution U.

The application of this equivalence theorem is limited to (integro-) differential equations which have a sufficiently smooth solution U and to finite-difference methods whose local discretization errors can be expanded in powers of h.

W. VELTE: Bemerkung über komplementäre Variationsprobleme.

In einem linearen Raum E über R wird eine Operatorgleichung $Au + f(u) = 0$, $u \in V \subset E$ betrachtet. (A kann gewöhnlicher oder partieller, linearer Differentialoperator sein.) $<.,.>$ bezeichne das innere Produkt in E. Unter der Voraussetzung f schwach monoton wachsend, sowie $<Au,v> = <u,Av>$ für $u,v \in V$ und

$\langle Au,u\rangle > 0$ für $u \in V$ $(u \neq 0)$ wird auf elementare Weise ein zu $I(u) := \langle Au,u\rangle + 2\langle f,u\rangle$ (im linearen Fall) bzw. $I(u) := \langle Au,u\rangle + 2\int_G F(u)d\tau \rightarrow \min$ (im nichtlinearen Fall) komplementäres Variationsprinzip angegeben, das für $I(u_o) = \min_{u\in V} I(u)$ eine untere Schranke liefert. Mit einer solchen unteren Schranke d hat man dann für beliebiges $u \in V$ im Vergleich mit der gesuchten Lösung u_o die Fehlerabschätzung in Energienorm

$$\langle A(u-u_o), (u-u_o)\rangle^{\frac{1}{2}} = \|u-u_o\|_A \leq \sqrt{I(u)-d} \quad .$$

Dieser Zugang ist einfacher und direkter als über die Theorie von Noble, Arthurs, ... oder über das Bellman'sche Prinzip, das bei Shampine verwendbar wird.

H.J. WACKER: Nichtlineare Homotopien zur Konstruktion von Startlösungen für Iterationsverfahren.

Bei der numerischen Lösung der nichtlinearen Operatorgleichung $T(x) = 0$ stellt sich die Aufgabe, geeignete Startlösungen für den Ansatz von Iterationsverfahren zu konstruieren. Eine systematische Möglichkeit dafür ist die Methode der Einbettung. Dazu verbindet man die Abbildung $T(x)$ homotop mit $T_o(x)$.

Die Homotopie wird durch die Schar $T(s,x)$ mit $s \in |0,1|$ definiert. $T_o(x) \equiv T(0,x)$ sei leicht lösbar und $T(1,x) \equiv T(x)$.

Zur Beschleunigung des Rechenvorgangs konstruiert man oft (bezüglich s) nichtlineare Homotopien. Für analytische Einbettungen werden Verzweigungen behandelt. Zur Vermeidung solcher rechentechnisch aufwendiger Verzweigungen werden zweidimensionale Einbettungen vorgeschlagen.

Für Randwertaufgaben bei Integrodifferentialgleichungen werden Homotopien konstruiert, die das Problem auf die Lösung einer Folge linearer teilgestaffelter Systeme reduzieren. Dabei werden die hinreichenden Bedingungen für Existenz und Eindeutigkeit dieser Klasse etwas verschärft. Fehlerabschätzungen werden angegeben.

A. WAKULICZ: Difference methods for hyperbolic systems.

For the numerical solving of initial value problem for the hyperbolic, quasilinear system of differential equations

$$(1) \quad \begin{cases} A(u,t,x)u_t + B(u,t,x)u_x = f(u,t,x) \ , & \text{for } (t,x) \in \Omega = [(0,\infty) \times R] \\ u(0,x) = \varphi(x) \ , & \text{for } x \in R \ , \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \sum\limits_{(p,q)\in N(0,0;1)} [a(p,q)A(U(t,x;\tau),t,x) + r\, b(p,q)B(U(t,x;\tau),t,x)]U(t+p\tau,x+q\tau;\tau) = \\ \qquad = \tau f(U(t,x;\tau),t,x)\ , \quad \text{for } (t,x)\in\Omega_\tau \\ U(t,x;\ ) = \psi(t,x;\tau)\ , \quad \text{for } (t,x)\in\Gamma_\tau \end{cases}$$

is proposed; where $N(t,x;\tau) : = [(\xi,\eta) : \xi = t + \kappa\tau,\ \eta = x + m_{\kappa j}h,\ \kappa = 1,0,-1,\dots,-L,$ $j = 1,\dots,n_\kappa,\ n_1 = 1,\ m_{\kappa j} \in I\ ,\ |m_{\kappa j}| \leq m]$ is the neighbourhood of the grid point (t,x) $((t,x) \in R^2_\tau : = [(t,x) : t = \kappa\tau, x = mh, \frac{\tau}{h} = r;\kappa,\ m \in I])$ and by normal way determines the grid region Ω_τ and the boundary of grid region Γ_τ.

Under the assumptions of K.O. Friedrichs existence theorem (Amer. J. Math. 70 (1949)) and consistency of (2) and (1), local conditional convergence is proved. The conditions of convergence can be easy checked for each given difference scheme of the type (2).

W. WALTER: Die Linienmethode bei parabolischen Differentialgleichungen.

Die LM (= Linienmethode) besteht darin, bei der parabolischen Differentialgleichung

(A) $$u_t = f(t,x,u,u_x,u_{xx})$$

in x zu diskretisieren. Für $u_i(t) \approx u(t,x_i)$ (x_i Stützstellen) ergibt sich

(B) $$u_i' = f(t,x_i,u_i,\delta u_i,\delta^{\sim} u_i)\ ,$$

wobei $\delta,\delta^{\sim}$ Differenzenoperatoren in x sind. Der Satz von M. Müller (1927) für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zeigt, daß für (B) ein Monotoniesatz gilt, der das diskrete Analogon zum Nagumo-Lemma für (A) darstellt. Daraus ergeben sich nicht nur Abschätzungs- und Konvergenzsätze für das LM-Verfahren, sondern man kann auf diese Weise auch konstruktive Existenzbeweise für (A) führen.

Es werden insbesondere neue Ergebnisse von Volkmann und Vogt (1971) mitgeteilt, welche sich auf unendliche Systeme (B) und auf das Cauchy-Problem für (A) beziehen. Es gelingt, eine Theorie unter der Wachstumsbedingung für den gegebenen Anfangswert $|u(0,x)| \leq k \exp(kx^2)$ aufzubauen.

H.J. WEINITSCHKE: Die Randwertprobleme der nichtlinearen Membrantheorie.

Das Randwertproblem der eingespannten kreisförmigen Membran (Problem H) ist bereits 1915 von Hencky mittels Potenzreihen gelöst worden. Ähnlich läßt sich das Problem der vorgespannten Membran (Problem S) lösen, einschließlich des bei Hencky nicht erbrachten Konvergenznachweises. Die Methode läßt sich jedoch schwerlich auf Membranen beliebiger Form verallgemeinern. Formuliert man das gleiche Problem mit Hilfe einer Integralgleichung $u = T(u)$, so konvergiert die Iteration $u_{n+1} = T(u_n)$ bei Problem S, dagegen nicht bei Problem H. Letzteres kann jedoch auf dem Umwege über Problem S mit der Schußmethode gelöst werden. Das entsprechende Phänomen tritt offenbar auch bei Membranen beliebiger Form auf. Bei geeigneter Interpretation der Schußmethode läßt sich diese auch für Problem H bei partiellen Differentialgleichungen formulieren und durchführen, also das Problem H wieder auf dem Umwege über Problem S iterativ lösen. Das angegebene Verfahren bietet allgemeiner die Möglichkeit, kompliziertere lineare und nichtlineare Randbedingungen auf einfachere zurückzuführen.

J. WICK: Zur numerischen Lösung der eindimensionalen nichtlinearen Vlasov-Gleichung.

Das Monte-Carlo-Verfahren von Dawson zur Lösung der Vlasov-Gleichung erlaubt nur sehr kleine Zeitschritte. Die Modifikation von Morse (particle-in-cell method) beseitigt zwar die Schwierigkeit, aber für die Anfangswerte ist keine stochastische Konvergenz mehr gegeben. Führt man den Begriff der Konvergenz bzgl. der Momente ein, so kann man mit systematischen Anfangswerten das Morse'sche Verfahren benutzen. Die auf diese Art gewonnenen numerischen Ergebnisse stimmen mit den physikalischen Resultaten überein. Darüber hinaus lassen sich die Gründe verifizieren, warum andere numerische Methoden zu abweichenden Ergebnissen gelangt sind.

Berichterstatter : H. Engels und H. Mülthei (beide Jülich)