MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 27/1972

Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen

2.7. bis 8.7.1972

Die diesjährige Tagung "Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen" stand unter der Leitung von D. Derry (Vancouver, Canada), G. Ewald (Bochum), O. Haupt (Erlangen) und P. Scherk (Toronto, Canada).

Die Tagung unter dem genannten Thema wurde zum 3. Mal durchgeführt. Wieder hat es sich bewährt, Vorträge über konvexe Körper und geometrische Ordnungen in einer Tagung zusammenzufassen. Besonders beachtenswert war die große Anzahl ausländischer Teilnehmer. Ferner ist hervorzuheben, daß dieses Mal ein Schwerpunkt in der Theorie der konvexen Polytope lag.

Die Diskussionsatmosphäre war sehr fruchtbar; auf der Konferenz wurde der Grundstein neuer Arbeiten gelegt.

<u>Teilnehmer</u>

Ahrens, I.	Berlin
Aumann, G.	München
Barner, M.	Freiburg
Bokowski, J.	Berlin
Derry, D.	Vancouver, Canada
Ewald, G.	Bochum
Firey, W.	Corvallis, USA
Groh, H.	Aachen
Haupt, O.	Erlangen
Heil, E.	Darmstadt
Kaapke, J.	Berlin
Kind, B.	Bochum
Klein, F.	Paderborn

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Kömhoff, M.	Berlin
Künneth, H.	Erlangen
Lane, N.	Hamilton, Canada
McMullen, P.	London, U.K.
Park, R.	Calgary, Canada
Perles, M.	Jerusalem, Israel
Sallee, T.	Davis, USA
Schaer, J.	Calgary, Canada
Scherk, P.	Toronto, Canada
Schneider, R.	Berlin
Shephard, G.	Norwich, U.K.
Strambach, K.	Kiel
Turgeon, J.	Montréal, Canada
Valette, G.	Bruxelles, Belgium
Weil, W.	Berlin
Wills, J.	Berlin
Zamfirescu, T.	Dortmund

Vortragsauszüge

I. Ahrens: Eine Verallgemeinerung der Cauchy-Toeplitzschen Grenzwertsätze für Punktmengen

Der 2. Grenzwertsatz von Cauchy u. Toeplitz besagt: Für eine reelle Folge (λ_i) und eine reelle Doppelfolge (α_{ik}) gelte: $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$; $\lim_{i\to\infty} \alpha_{ik} = 0$ für jedes k; es gibt eine Konstante $\varkappa$ mit $|\alpha_{i1}| + \ldots + |\alpha_{ik}| \leq \varkappa$ für jedes i,k; die durch $\beta_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}$ gegebene Folge konvergiere für i gegen $+\infty$ gegen 1. Dann konvergiert die durch $\alpha_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} \lambda_l$ gegebene Folge gegen λ. Diesen und den spezielleren ersten Cauchy-Toeplitzschen Satz kann man für Minkowskische Reihen unter gewissen Voraussetzungen verallgemeinern, indem z.B. die α_{ik} Elemente der Menge $\mathfrak{A}$ aller nicht leeren, kompakten TEilmengen des R^n sein sollen. Dabei ist dann $\lambda_l \alpha_{il}$ die aus α_{il} durch Dilatation mit $\lambda_l \geq 0$ hervorgehende Menge. Die Summe einer Minkowskischen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ ist als Grenzmenge der Folge (S_k) der Partialsummen $S_k = \sum_{i=1}^{k} A_i$ erklärt für $A_i \in \mathfrak{A}$ (bzgl. der Minkowskischen Addition und der Hausdorff-Metrik).

J. Bokowski: Gitterpunktanzahl konvexer Körper bei vorgegebenem Volumen-Oberflächen-Verhältnis

Für die gewöhnlichen Minkowskischen Quermaßintegrale $W_\nu(K)$ ($\nu = 0,1,\dots,n$) ($W_0 = V$, $nW_1 = F$), definiert für einen eigentlich konvexen Körper K des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n, gelten die Fenchel'schen Ungleichungen in der Form

$$Q_{\alpha\beta} \underset{\text{def.}}{=} \left(\frac{W_\alpha}{W_\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \leq \left(\frac{W_\beta}{W_\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-\beta}} \quad (0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq n).$$

Die Funktionale $Q_{\alpha\beta}$ sind nicht monoton. Es gilt jedoch für $Q = Q_{01}$:

$K \subset K' \Rightarrow \frac{1}{n}Q(K) + Z \leq Q(K')$ mit $Z = \dfrac{(n-1)\omega_n r^n}{F(K)}$ (r Inkugelradius v. K)

$Q_{\alpha\beta}$ ist nicht additiv. Sei G(K) das additive Funktional $G(K) = \operatorname{card}\{g \mid g \in K,\ g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$ (($e_1,\dots,e_n$) orthonorm. Basis d. R^n).

Q hat im Gegensatz zu den W_ν die Eigenschaft:

$$G(K) < m \Rightarrow Q(K) \leq f(m). \text{ Es gilt}$$

$$\sqrt[n]{\frac{m}{\omega_n}} \leq \sup_{K:G(K)<m} Q(K) \leq \sqrt[n]{\frac{m-1}{\omega_n}} + \frac{n}{2} \quad \left(\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right).$$

Folgt aus $Q(K) \geq \frac{n}{2}$ und $n \geq 3$ $G(K) \geq 2$?

G. Ewald: Shortness exponents of some families of graphs in closed cell complexes

Let M(q,r) be the family of cell complexes whose sets are 2-dimensional closed manifolds such that every facet has at most q sides and every vertex has valence at most r. The so-called shortness exponents s(q,r) of M(q,r) are defined according to B. Grünbaum, measuring the longest circuits on the elements of M(q,r). It is shown that S(4,4) = S(3,7) = S(6,3) = 1. Furthermore, some results on Hamiltonian circuits are outlined.

W. Firey: Support flat to convex body

A q-dimensional flat Π_q, $0 \leq q \leq n-1$, supports a convex body K in Euclidean n-space if $\Pi_q \cap K$ is a non-empty subset of the boundary of K. B means the unit ball. Let $\mathcal{F}_q(u,\lambda)$ denote the set of those Π_q which support $K + \lambda B$ and lie in the supporting Π_{n-1} to $K + \lambda B$ which has outer normal direction u. For each Borel set ω of directions and each $\eta > 0$, form the sets of q-flats:

$$\mathcal{T}_q(K,\omega,\eta) = \bigcup_{\substack{u\in\omega \\ 0<\lambda<\eta}} \mathcal{F}_q(u,\lambda), \quad \mathcal{T}_q(K,\omega) = \bigcup_{u\in\omega} \mathcal{F}_q(u,0).$$

$\mathcal{T}_q(K,\omega,\eta)$ is known to have a rigid-motion invariant measure $\mu_q(K,\omega,\eta)$ which is unique to within a normalizing factor. First result:

$$\lim_{\eta\to 0^+} \mu_q(K,\omega,\eta)/\eta = \mu_q(K,\omega)$$

exists and can be viewed as a rigid-motion invariant measure of $\mathcal{T}_q(K,\omega)$. Write $S_m(K,\omega)$ for the coefficient of $\binom{n-1}{m}\lambda^{n-m-1}$ in the Steiner polynomial for the area of $\mathcal{T}_0(K + \lambda B,\omega)$, (as in the 1938 paper of W. Fenchel and B. Jessen). Second result: with the appropriate normalization,

$$\mu_q(K,\omega) = S_{n-q-1}(K,\omega).$$

H. Groh: "Ovals in flat projective planes"

An oval in a projective plan L is a subset O of the point set L_o such that (1) Each line meets O in ≤ 2 points (2) For each $p \in O$ there exists a unique line ("tangent") having precisely p in common with O. - Here we investigate in flat projective planes (= topological projective planes where L_o is a 2-manifold) ovals O homeomorphic to S_1 (circle): Theorem The set of tangents to O is an oval $O^* \approx S_1$ in the dual plane L^*. - Definition ((strong) similarity of two triangles with respect to a line l). Theorem For each triangle T there exists precisely one triangle $T' \subseteq O$ strongly l-similar to T. - This Theorem yields a somewhat more complete proof of the result of EWALD (Abh. Math. Sem. Hamburg 1967, p.180) that every strictly convex, differentiable closed curve generates a Moebius plane.

O. Haupt: Vierscheitelsätze in der ebenen hyperbolischen Geometrie

Aus einem allgemeineren Vierscheitelsatz (vgl. Ab. math. Sem. Hamburg 31, Nr. 3.4) folgt: Es sei G die hyberbolische Ebene und k das System der Geraden und mehrpunktigen Kreisformen. Dann besitzt jede zweimalstetigdifferenzierbare Kurve $C \subset G$ mindestens vier k-Scheitel.

E. Heil: Sechsscheitelsätze

Nach Blaschke kann jedes ebene Oval affin abgebildet werden, so daß es 6 Scheitel erhält. Und zwar leistet das u.a. die flächentreue Affinität, die den Umfang minimal macht. Blaschke löst dazu eine allgemeinere Minimumaufgabe, die Süss relativgeometrisch interpretiert: Die flächentreue Affinität, die den Relativ-Umfang minimisiert, liefert 6 relativ-geometrische Scheitel. Hier läßt sich der Satz von den sextaktischen Punkten und der Satz von den 3 Gegenpunktpaaren unterordnen. Als neues Resultat ergibt sich: Die Affinnormale eines Ovals kreuzt mindestens 6-mal den Gegenpunkt.

J. Kaapke: (m,n)-Konvexität und die Vereinigung konvexer Mengen

Eine Menge S des euklidischen R^d mit wenigstens $m \geq 2$ Punkten heißt (m,n)-konvex, wenn zu je m Punkten $x_i \in S$ wenigstens n der Verbindungsstrecken $\overline{x_i x_j}$, $i,j \in [1,m]$, $i<j$, in S enthalten sind. Die Eigenschaft der (m,n)-Konvexität ist ein nützliches Hilfsmittel zur Charakterisierung von Mengen, welche die Vereinigung endlich vieler konvexer oder sternförmiger Mengen sind. Es gilt z.B. (Valentine): Jede abgeschlossene zusammenhängende (3,1)-konvexe Menge des R^2 ist Vereinigung von höchstens drei konvexen Mengen. Ferner gilt: Die Menge aller abgeschlossenen (m,n)-konvexen Mengen, $n>1$, ist identisch mit der Menge der abgeschlossenen $(m^*,1)$-konvexen Mengen, $m^* = m^*(m,n) < m$, und es läßt sich ein Algorithmus angeben, der rekursiv die Berechnung von m^* gestattet. Verwandte Ergebnisse (u.a. von Kay und Guay, Tattersall), Vermutungen sowie Beweismethoden werden skizziert.

H. Künneth: Ordnungsfeste Erweiterung von Bogen dritter Ordnung

Es sei B ein Bogen in der proj. Ebene mit den Endpunkten a und b, $\underset{\sim}{B} = B \setminus \{a\} \setminus \{b\}$. Die von a und b begrenzten Strecken seien S und S', $S \cup S' = G$, wobei $S \cup B$ eine paare Kurve sei. Ist B von schwacher 3. Punktordnung, so ist B höchstens dann nicht ordnungsfest erweiterbar, wenn es eine "verlängerte" Dornspitze enthält. Ist B von (starker) 3. Ordnung, so ist es dann nicht zu einer Kurve 3. Ordnung erweiterbar, wenn

(a) $\underset{\sim}{B} \cap S \neq \emptyset$ und G Tangente oder Stützgerade an $\underset{\sim}{B}$ ist oder S Teilstrecke der Halbtangente in a oder b an B ist,

(b) $\underset{\sim}{B} \cap S = \emptyset$ und S Teilstrecke der Halbtangente in a und b an B ist.

M. Kömhoff: Approximation problems for convex polytopes (In collaboration with G.C. Shephard)

Let P^d denote the space of d-polytopes in E^d metrized by the Hausdorff-distance. For $P \in P^d$ let $[P]$ be the class of d-polytopes combinatorially isomorphic to P. If P, $Q \in P^d$ we write $[Q] \to P$ to mean that there exists a sequence of d-polytopes Q_ν converging to P with $Q_\nu \in [Q]$ for all ν.

We consider the following problem:

(*) For which classes $[P]$ and $[Q]$ with P, $Q \in P^d$ is it true that if $P_1, P_2 \in [P]$ then
$[Q] \to P_1$ implies $[Q] \to P_2$?

We have proved:

A) The statement (*) is true in at least the following cases:
(i) if $Q \in P^3$ and $P \in P_s^3$ where P_s^3 denotes the set of simple 3-polytopes.
(ii) if P, $Q \in P^d$ and each has at most d + 3 vertices.

By duality we get the corresponding statements with simple (in (i)) replaced by simplicial and vertices (in (ii)) replaced by facets.

An immediate consequence of (i) and (ii) is that the combinatorial isomorphism classes of simple 3-polytopes and d-polytopes with at most d + 3 vertices are partially ordered by the relation.

B) There exists 6-polytopes P_1, P_2, Q each with 10 vertices for which the statement ( ) is not true. This example shows that the statement (ii) is the best possible in that d + 3 cannot be decreased to d + 4 for general d.

It seems likely that ( ) is true for all 3-polytopes.

N. Lane: Polynomial Differentialbility Characteristic and Order

A definition of polynomial differentialbility of an arc in the real affine plane at a point is given. The differentiable points are classified with respect to the intersection and support properties of certain families of osculating polynomials. For a given point of an arc, these properties are used to define a certain n-tuple of integers, the characteristic of that point. It is shown that the polynomial order of polynomially differentiable interior point of an arc is at least as great as the sum of the digits of its characteristic.

P. McMullen: A New Formulation of Gale Diagrams

We motivate Gale Diagrams from the wish to find a translation-invariant representation of convex polytopes. With this new representation we can not only (as before) investigate the combinatorial structure of polytopes, but also other properties, such as their volume, and the behaviour of vektor (Minkowski) sums of polytopes.

R. Park: On the Rank Number Problem

Let C be an a differentiable curve of order 5 in projective 5-space. The main result is that the second rand number of C is 9 ie. the maximum number of osculating 2-spaces which can meet a plane is 9.

M. Perles: Rekonstruktion konvexer Polytope

Let P be a convex polytope. The set $\mathcal{F}(P)$ of all faces of P is partially ordered by inclusion. If I is a set of integers, let $P(I) = \{F \in \mathcal{F}(P) : \dim F \in I\}$.
If $\mathcal{P}$ is a class of convex polytopes, $P \in \mathcal{P}$ and $I \subset J$, then we say that P(I) determines P(J) within $\mathcal{P}$ if for every $Q \in \mathcal{P}$ and every isomorphism $\varphi: P(I) \to Q(I)$, φ is the restriction to P(I) of a unique isomorphism $\tilde{\varphi}: P(J) \to Q(J)$.
(An isomorphism is an order-preserving bijection with order-preserving inverse. The default value of $\mathcal{P}$ is the class of all convex polytopes.)

Results:

1.) If $0 \leq r < s < \dim P$, then $P(\{r,s\})$ determines $P([r,s])$ (where $[r,s] = \{i : r \leq i \leq s\}$). (Easy)
2.) If $1 < s < \dim P$, and P is s-simplicial, then $P(\{s-2,s\})$ determines $\mathrm{skel}_s P$ $(=P([-1,s]))$. (Quite easy.)
3.) $P(\{1,2\})$ determines $\mathrm{skel}_2 P$. Dually, $P(\{d-3, d-2\})$ determines $P([d-3,d])$ within the class of all convex d-polytopes.
4.) If P is a simplicial polytope, and $s \geq [\frac{1}{2} \dim P]$, then $P(\{s-2,s\})$ determines P within the class of all simplicial polytopes.

T. Sallee: Stretching Chords of Space Curves

Thm: Let $r(s)$, $0 \leq s \leq L$, be a closed rectifiable curve in E^d parametrized by arc length s. Then there exists a planar convex curve $p(s)$, $0 \leq s \leq L$, such that $|r(s_1) - r(s_2)| \leq |p(s_1) - p(s_2)|$.

It can also be shown that a strict inequality holds in the theorem if r(s) is a polygonal curve which is not plane and convex unless $r(s_1)$ and $r(s_2)$ lie on the same edge.

J. Schaer: Zur kombinatorischen Geometrie zentralsmmetrischer Eikörper

Sei $u_k(n)$ die kleinste natürliche Zahl, so daß im E^n für jeden beliebigen Eikörper A und jeden beliebigen zentralsymmetrischen Eikörper C, die die Eigenschaft haben, daß sich je k +1 Punkte von A durch ein passendes Translat von C überdecken lassen, sich stets $u_k(n)$ Translate von C finden lassen, deren Vereinigung ganz A überdeckt. Zwischen $u_k(n)$ und zwei weiteren Zahlen kombinatorisch-geometrischer Art wurden von H. Hadinger und dem Sprecher eine Gleichheit bzw. eine Ungleichheit nachgewiesen.

R. Schneider: Invariante Endomorphismen des Raumes der konvexen Körper

Unter einem Endomorphismus des Raumes der konvexen Körper verstehen wir eine stetige Abbildung $\phi: \mathfrak{K}^d \to \mathfrak{K}^d$ mit $\phi(K_1 + K_2) = \phi K_1 + \phi K_2 \;\; \forall K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^d$. Dabei bezeichnet $\mathfrak{K}^d$ die Menge der konvexen Körper des d-dimensionalen euklidischen Raumes E^d $(d \geq 2)$, versehen mit der Minkowskischen Addition + und der durch die Hausdorff-Metrik induzierten Topologie. Ein solcher Endomorphismus heiße G-Endomorphismus, wenn $\phi \circ g = g \circ \phi \;\; \forall g \in G$ gilt, wobei G eine Untergruppe der affinen Gruppe des E^d ist. Durch kombinierte Anwendung von elementaren Hilfsmitteln der Harmonischen Analyse (insbesondere Kugelfunktionen) und von Konvexitätsbetrachtungen lassen sich unter anderem die folgenden Sätze beweisen: Satz 1: Ist G die volle affine Gruppe, so ist jeder G-Endomorphismus ϕ von $\mathfrak{K}^d$ von der Form $\phi K = K + \lambda(K + (-K))$ mit einer reellen Zahl $\lambda \geq 0$. Satz 2: Ist G die Gruppe der eigentlichen Bewegungen, so ist jeder G-Endomorphismus von $\mathfrak{K}^d$ eindeutig bestimmt durch das Bild eines einzigen geeignet gewählten konvexen Körpers (z.B. eines Dreiecks mit wenigstens einem irrationalen Winkel). Satz 3: Ist G die Gruppe der eigentlichen Bewegungen, so ist jeder surjektive G-Endomorphismus von $\mathfrak{K}^d$ von einer der Formen $\phi K = \lambda(K - s(K)) + s(K)$ oder $\phi K = \lambda(-K + s(K)) + s(K)$ mit $\lambda > 0$, falls $d \geq 3$, und von der Form $\phi K = \lambda g(K - s(K)) + s(K)$ mit $\lambda > 0$ und einer Drehung g, falls d = 2. (Dabei bezeichnet s den Steinerpunkt.)

G. Shephard: <u>How to turn a Zonotope inside out</u>

A zonotope Z is defined as a Minkowski sum

$$Z = S_1 + \dots + S_r \subseteq E^d$$

of non-zero line segments, which, for convenience, we take in the form $S_i = \mathrm{conv}\{x_i, -x_i\}$. Assume $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ linearly spans E^d. The <u>associated zonotope</u> $\bar{Z}$, which is defined whenever Z is not a prism, is

$$\bar{Z} = \bar{S_1} + \dots + \bar{S_r} \subseteq E^{r-d}$$

where $\bar{S}_i = \mathrm{conv}\{\bar{x_i}, -\bar{x_i}\}$ and $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ is a linear representation of X. (For the definition and properties of a linear representation, see "Diagrams for Positive Bases", J. London Math. Soc. (2), 4 (1971), pp 165 - 175.).

There are many interesting geometrical relationships between Z and $\bar{Z}$, and in some senses we may say that $\bar{Z}$ consists of Z "turned inside out". For example, let us define

$$C = S_{i_1} + \dots + S_{i_s} + \varepsilon_{i_{s+1}} x_{i_{s+1}} + \dots + \varepsilon_{i_r} x_{i_r}$$

(where $\varepsilon_{i_j} = \pm 1$ and $(i_1 \dots i_r)$ is a permutation of $(1, \dots, r)$)

to be a <u>cell</u> of Z and

$$[C] = S_{i_1} + \dots + S_{i_s} \pm x_{i_{s+1}} \pm \dots \pm x_{i_r}$$

to be a <u>family of cells</u>. For each of the 2^r families of cells (including 0-cells and Z itself) define

$$d[C] = \dim Z - \dim C$$

$$e[C] = s - \dim C.$$

Let $A(Z) = (a_{ij})$ where a_{ij} is the number of families of cells $[C]$ of Z with $d[C] = i$ and $e[C] = j$. Then A(Z) will be called the (d,e)-matrix (deficiency-excess matrix) of Z. The following are typical of the results obtained.

<u>Theorem 1</u> $A(Z) = [A(\bar{Z})]^T$ where T denotes transposition

<u>Theorem 2</u> No. of vertices of Z is $\sum_{i,j} (-1)^j a_{ij}$

No. of vertices of $\bar{Z}$ is $\sum_{i,j} (-1)^i a_{ij}$

<u>Theorem 3</u> If Z is dissected into cubes (i.e. cells C with $d(C) = e(C) = 0$) then the number of cubes in <u>any</u> dissection of Z is a_{00}. Because of Theorem 1 this is equal to the number of cubes in any dissection of $\bar{Z}$.

K. Strambach: Gruppen auf nichtkompakten Graphen

Es wurde die Struktur solcher diskontinuierlichen Gruppen untersucht, die keinen kompakten Fundamentalbereich haben.

J. Turgeon: Théorie des quasigraphes

La présente communication porte sur des résultats obtenus par Norman D. Lane, Peter Scherk et moi-même travaillant en équipe.

Une géométrie différentielle est dite directe quand la différentiabilité d'un point d'une courbe y est définie à l'aide de notions purement géométriques. Il s'agit ici d'établir les fondements d'une théorie générale qui englobe comme cas particuliers les géométries où différentiabilité, caractéristique et ordre sont définis à l'aide de droites, de cercles, de coniques ou de graphes de polynômes.
Le domaine fondamental est un disque fermé dans le plan euclidien. On y définit des quasicourbes munies d'une orientation. On appelle quasigraphes certaines classes d'équivalence de quasicourbes qui serviront à définir la différentiabilité recherchée.

G. Valette: Contractive and subadditive affine-invariant transformations of convex bodies

In his paper "Convex bodies associated with a convex body" (Proc. Amer. Math. Soc., 2), P.C. Hammer has defined, for each convex body K of R^n and each real number $r \in [1/2, 1]$, an associated body K(r) as the intersection of homothetic images of K, the ratio being r and the center describing the boundary of K. K(r) is always non-empty if $r \in [n/(n+1), 1]$. Let K_n be the space of all n-dimensional compact convex sets of R^n and let $\mathfrak{C}_n$ be the space of all non-void compact sets of R^n. One provides both spaces with the topology of the Hausdorff metric. For each $r \in [n/(n+1), 1]$, we have a map $F_r: K_n \longrightarrow \mathfrak{C}_n$, $K \longmapsto K(r)$. All these maps are continuous, subadditive and affinely invariant. One proves a kind of converse for n = 2 and r = 2/3. To formulate it, one needs the following order: if $F: K_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ and $G: K_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ are maps, then $F \geqslant G$ means that $F(K) \supset G(K)$ for every $K \in K_2$.

Theorem. Let $F: K_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ be such that

a) if T is an affine transformation, then $F \circ T = T \circ F$

b) $F(K + L) \supset F(K) + F(L)$

c) F is continuous

d) if P is a parallelogram with center p, then

$$F(P) \subset p + \frac{1}{3}(P - p)$$

Then $F(S) = F_{2/3}(S)$ when S is a triangle or a centrally symmetric convex body. The set of all maps F satisfying (a), (b), (c), (d) has a largest element which is precisely $F_{2/3}$.

W. Weil: Ein Kriterium für die Subtrahierbarkeit konvexer Körper

Bezeichnet $\mathfrak{K}$ die Menge aller konvexer Körper im E^n und $\mathfrak{L} = \mathfrak{K} - \mathfrak{K}$ den von $\mathfrak{K}$ erzeugten Vektorraum, so heißen $K, L \in \mathfrak{K}$ subtrahierbar (bzw. L Summand von K), wenn $K - L \in \mathfrak{K}$. Setzt man die Definition des gemischten Volumens multilinear auf $\mathfrak{L}$ fort, so geht von den bekannten Eigenschaften des gemischten Volumens nur die Monotonie verloren. Es zeigt sich, daß der Kegel $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{L}$ durch diese Monotonie des gemischten Volumens charakterisiert wird:

Satz Für $K, L \in \mathfrak{K}$ sind äquivalent:

(1) L ist Summand von K.

(2) $V(\underbrace{K-L, \ldots, K-L}_{j}, o, \ldots, o)$ ist monoton von $\mathfrak{K}^{n-j}$ nach R für $j = 1, \ldots, n - 1$.

Es werden weitere Sätze dieser Art angegeben. Insbesondere ergibt sich für Polytope eine schwächere Bedingung (2), die einer bekannten Charakterisierung subtrahierbarer Polytope von SHEPHARD entspricht. Schließlich läßt sich mittels gemischter Oberflächenmaße ein lokaler Eindeutigkeitssatz konvexer Körper beweisen.

J. Wills: Konvexe Körper und Gitterpunkte

Sei $\mathfrak{K}^n$ die Menge der beschränkten konvexen Mengen des n-dim. euklidischen Raumes. Für ein $K \in \mathfrak{K}^n$ sei $G=G(K)$ die Anzahl der Gitterpunkte (mit ganzzahligen Koordinaten) in K. Wir wollen G durch andere auf $\mathfrak{K}^n$ erklärte Funktionale (z.B. V: Volumen; F: Oberfläche; W_i, $i = 0, \ldots, n$ Minkowskis Quermaßintegrale; r und R: In- und Umkugelradius) abschätzen. Im Mittelpunkt stehen Teilergebnisse zu der Vermutung:

$$V - \frac{F}{2} < G \leq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{W_i}{\varkappa_i} \qquad (\varkappa_i\text{: Volumen der i-dim. Einheitskugel})$$

und = genau dann, wenn K ein achsenparalleler kompakter Quader ist, dessen Ecken Gitterpunkte sind. -

Die linke Seite ist inzwischen durch H. Hadwiger bewiesen worden (für n=3 vorher unabhängig voneinander durch W.M. Schmidt, J. Bokowski und Verf.). Weitere Ungleichungen z.B.: $G \leq \varkappa_n (R+\lambda)^n$ und $G \leq (1 + \frac{\lambda}{r})^n V$ mit $\lambda = \varkappa_n^{-\frac{1}{n}}$ (für $n \leq 3$ bewiesen, für $n > 3$ vermutet).

Da G weder stetig, noch bewegungsinvariant, noch homogen ist, sind die klassischen geometrischen Methoden i.a. nicht anwendbar.

T. Zamfirescu: Über einige Vermutungen von Grünbaum

B. Kind (Bochum)