MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 36|1972

Fastperiodische Funktionen

3.9. bis 9.9.1972

Die Tagung wurde von K.Jacobs (Erlangen) geleitet. Sie erhielt einen besonderen Akzent durch die Anwesenheit der ausländischen Gäste W.Bauer (Salzburg), A.M.Fink (Ames,Iowa), vor allem aber durch die Tatsache, daß sich nahezu alle Schüler von Herrn W.Maak (Göttingen) eingefunden hatten, um aus Anlaß des 60. Geburtstages von Herrn Maak über ihre eigenen Arbeiten, nahezu ausschließlich auf dem Gebiet der "Fastperiodischen Funktionen", zu berichten. Die gemeinsame Herkunft führte zu einer idealen Verständigungsmöglichkeit zwischen den Teilnehmern; es gab lebhafte Diskussionen außerhalb der Vorträge und ausführliche Kommentare, insbesondere von Herrn Maak. Die Verständigung mit den Teilnehmern der parallel laufenden Tagung über Topologie funktionierte ausgezeichnet.

Teilnehmer

W. Bauer (Salzburg)
H. Bauermeister (Freiburg)
K. Burde (Braunschweig)
H.-W. Burmann (Göttingen)
H.D. Dombrowski (Bremen)
L. Elsner (Kiel)
M. Fink (Ames, Iowa)
H. Günzler (Kiel)
Th. Hellweg (Düsseldorf)
H.S. Holdgrün (Göttingen)
S.-L. Hong (Göttingen)
K. Horneffer (Bremen)
K. Jacobs (Erlangen)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R.-D. Kulle (Göttingen)
W. Maak (Göttingen)
A. Reich (Göttingen)
E. Thoma (München)
Ch.-H. Tzeng (Göttingen)
F. Wille (Düsseldorf)
Ch. Witzgall (Seattle, Washington)

Vortragsauszüge

K. HORNEFFER: Mathematik in Bremen

Die Universität Bremen ist ein experimenteller Beitrag zur Hochschulreform. Er zeichnet sich vor allem dadurch aus, daß versucht wird, alle Organisationsformen letztlich von den Studieninhalten her zu begründen. Das gilt auch für das Mathematikstudium. Die neuen Vorstellungen und Ansprüche, die in Bremen realisiert werden sollen, konkretisieren sich in der Idee des Projektstudiums. Das Projektstudium ist ein Versuch, ein berufsbezogenes Studium zu organisieren, das die Studenten zu interdisziplinärer Zusammenarbeit befähigt und sie zugleich darin übt, die gesellschaftlichen Konsequenzen ihrer Tätigkeit, besonders ihrer zukünftigen Berufstätigkeit zu beurteilen. Gerade für die Mathematik bringt jedoch ein Studium in Projekten zahlreiche Probleme mit sich, von denen die bedeutendsten angesprochen wurden. Es wurde ferner darüber berichtet, wie sich das Mathematikstudium in Bremen in den ersten beiden Semestern im Einzelnen gestaltet hat.

K. JACOBS: Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen

Nach einer Skizze der Theorie der fastperiodischen Funktionen wurden die grundlegenden Aufgaben der Ergodentheorie entwickelt: Aufklärung des globalen Verhaltens kontinuierlicher oder diskreter Strömungen unter Zugrundelegung jeweils angepaßter Strukturen: Differenzierbare Struktur, Topologie, Maßraum. Der Ursprung beider Theorien aus der Himmelsmechanik wurde angedeutet. Sodann wurde über folgende Einzelergebnisse kurz berichtet:

1) Der Satz von Kolmogorov - Arnold (1954 bzw. 1963) über quasiperiodische Lösungen in der Himmelsmechanik (vgl. Siegel - Moser, § 36).

2) Der Satz von Fürstenberg über den Aufbau beliebiger diskreter Strömungen durch sukzessive fastperiodische Erweiterung einer trivialen Strömung.

3) Minimale Mengen und fastperiodische Punkte.

4) Isomorphieproblem der maßtheoretischen Ergodentheorie. Spektraltyp und Entropie als Invarianten. Satz von v. Neumann (1932) über die Isomorphie von Systemen mit reinem Punktspektrum. Satz von Kolmogorov - Sinai - Ornstein über die Isomorphie von Bernoulli - Schemata.

5) Strikte Ergodizität. Der Einbettungssatz von Jewett - Krieger - Hansel - Raoult und sein zeit-kontinuierliches Analogon (Jacobs, E.Eberlein), die Rolle von Lipschitzfunktionen. Die z.T. kombinatorischen Konstruktionen Thue - Morse - Kakutani - Keane (0110100110010110 .... und 0010011100010011101101110001 ... als Beispiele) , Toeplitz - Jacobs - Keane - Eberlein (010001010100010 ... als Beispiel) Hahn - Katznelson - Grillenberger.

6) Das Punktspektrum des invarianten Mittelwertes fastperiodischer Maße (Jacobs).

7) Der Ausspaltungssatz von Godement - Jacobs - Maak - deLeeuw - Glicksberg und seine Abrundung durch Berglund - Hofmann. Methode des minimalen Ideals in kompakten halbtopologischen Halbgruppen.

H.GÜNZLER: Lineare Funktionale als Integrale

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß sich ein lineares Funktional $\varphi : L \to R$ auf einem Funktionenvektorverband mit der Stoneschen Bedingung ($f \in L \to Min(f,1) \in L$) als Integral, $\varphi(f) = \int f \, d\mu$ für $f \in L$, schreiben läßt, und zwar

(a) mit σ - additivem μ (aus $f_n \in L$, $f_n \geq f_{n+1}$, $f_n(x) \to 0$ für jedes $x \in$ Grundraum X muß stets $\varphi(f_n) \to 0$ folgen, auch für φ, die nicht ≥ 0 sind)

(b) mit endlich - additivem μ (es muß $\varphi(Min(f,1/n)) \to 0$, $\varphi(Min(f,n)) \to \varphi(f)$, und $\sup\{\varphi(g) : 0 \leq g \leq f,\ g \in L\} < \infty$ für jedes $f \in L$ sein)

(c) mit endlich - additivem oder σ - additivem μ auf vorgegebenem Mengenring (neben den Bedingungen aus (b) müssen die Mengen des Rings durch Funktionen aus L "approximativ getrennt" werden können, schließlich müssen die Funktionen aus L bezüglich gewisser zum Ring gehöriger Jordanmengen "meßbar" sein).

Spezialfälle sind der Rieszsche Darstellungssatz, das Daniell-Integral, sowie explizite Beschreibungen der Dualräume von L^∞, $C_o(X)$, $C_b(X)$, $C(X)$, wo X ein beliebiger Topologischer Raum ist, $C(X)$ alle stetigen, reellwertigen f auf X enthält, $C_o(X)$ alle $f \in C(X)$, die außerhalb eines Kompaktums in X verschwinden, $C_b(X)$ alle beschränkten $f \in C(X)$.

W. BAUER: Gleichgradige Stetigkeit und Distalität in X und M(X)

(X,d) sei ein kompakter metrischer Raum, $M(X)$ der Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf Borelmengen von X versehen mit der schwachen (W^*) Topologie. Diese ist metrisierbar, etwa durch die Prohorov-Metrik $\rho(\mu,\mu') = \inf\{\varepsilon > 0,\ \mu(A) \leq \mu'(A^\varepsilon) + \varepsilon,\ \mu'(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon$ für alle Borelmengen $A\}$. Ein Homöomorhismus $T : X \to X$ induziert mittels $\hat{T}\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ einen Homöomorphismus T auf $(M(X),\rho)$. Es wird gezeigt, daß aus der gleichgradigen Stetigkeit $\{T^n\}_{n\in Z}$ diejenige von $\{\hat{T}^n\}_{n\in Z}$ folgt. Die Distalität von T auf X (d.h. für je zwei Elemente $x,y \in X$, $x \neq y$ gilt $\inf_{n\in Z} d(T^n x, T^n y) > 0$) setzt sich aber nicht auf $(M(X),\rho)$ fort, wie durch ein Gegenbeispiel eines invarianten Maßes ν und eines Maßes μ mit $\hat{T}^n\mu \to \nu$ (schwach !) auf einem geeigneten distalen, nicht gleichgradig stetigen System X und T gezeigt wird. Angeschlossen wird die Vermutung, daß jedes minimale, distale, nicht gleichgradig stetige System X und T ein invariantes W-Maß ν, positiv auf allen Mengen, zuläßt, derart, daß $T^n\mu \to \nu$, wobei $\mu(A) = \nu(A\cap V)\,\nu(V)^{-1}$ und V beliebig offen ist. Dies bedeutet wegen $\nu(V\cap T^{-n}A) \leq \nu(V)\nu(A^{\varepsilon}) + \varepsilon\nu(V)$ $\nu(V)\,\nu(A) - \varepsilon\nu(V) \leq \nu(V\cap T^{-n}A^{\varepsilon})$ eine abgeschwächte Form einer gleichmäßigen Mischung auf X.

Ch. WITZGALL: Seitenflächen gewisser konvexer Polyeder

Gegeben sei ein Graph G und eine Klasse von Kantenmengen K. Jeder Kantenmenge k entspricht ein charakteristischer Vektoren Y wo $y_i = 1$ wenn $i \in k$ und $y_i = 0$ sonst. Die konvexe Hülle aller solcher charakteristischen Vektoren der Klasse K ist ein Polyeder, das wichtige Eigenschaften der Klasse K widerspielgelt. Beispiele sind die Polyeder der linearen und quadratischen Faktoren, der aufspannenden Bäume usw. In allen diesen Fällen lassen sich die Polyeder explizit durch Ungleichungen beschreiben. In allen diesen Fällen kennt man dann auch gute Algorithmen zur Lösung von Optimierungs- und Existenzfragen für die entsprechenden Klassen von Kantenmengen. Es werden nun Betrachtungen über das Polyeder der Hamiltonschen Kreise angestellt und einige Familien von Ungleichungen angegeben. Die Frage, ob sie zur Charakterisierung ausreichen, wird offengelassen. Eine Charakterisierung des Polyeders der dreikreisfreien quadratischen Faktoren kann angegeben werden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

K. BURDE: Über Sequenzen der Länge 2 von Restklassencharakteren

Es sei p eine ungerade Primzahl und χ ein Restklassencharakter mod p der Ordnung n. Mit d_{ij}, $i,j = 0, \ldots, n-1$, bezeichnen wir die Anzahl der auftretenden "Sequenzen der Länge 2" : $\chi(k) = \xi^i$, $\chi(k+1) = \xi^j$, $\xi = e^{2\pi i/n}$ in der Folge $\chi(1), \chi(2) \ldots \chi(p-1)$. Man kann für beliebiges n Formeln für die n^2 Anzahlen d aufstellen, welche noch Koeffizienten enthalten, die eng mit gewissen Zerlegungen von p in $\mathbb{Q}(\xi)$ zusammenhängen.
Wählt man anstatt $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive n-6 Einheitswurzel aus $\mathbb{Z}_p$, dem Restklassenkörper mod p, so erhält man entsprechende Formeln, in denen an Stelle dieser Zerlegungskoeffizienten Binomialkoeffizienten auftreten, also explizite Formeln in $\mathbb{Z}_p$. Diese liefern wegen $0 \leq d_{ij} \leq p-1$ die Anzahlen genau.
Interessanter ist aber vielleicht noch der Vergleich dieser Formeln mod p mit den zuerst erwähnten Formeln, der Kongruenzen zwischen den Zerlegungskoeffizienten und Binomialkoeffizienten mod p liefert und damit ein bislang isoliert dastehendes Ergebnis von Gauß in einen allgemeinen Zusammenhang stellt.

R.-D. KULLE: Eigentliche holomorphe Abbildungen

Untersucht werden eigentliche holomorphe Abbildungen $f : K \to K$ der offenen Einheitskugel K des m-dimensionalen Zahlenraums $\mathbb{C}^m$. Da eine solche Abbildung eine analytische Überlagerung ist, kann man ihr eine Blätterzahl λ zuordnen. Für diese wird die Abschätzung

$$\lambda \leq \lim_{r\to\infty} \frac{V(r)}{V(\tau(r))}$$

bewiesen. Dabei ist für eine bestimmte Riemannsche Metrik d auf K und einen beliebigen Punkt $z^0 \in K$

$$\tau(r) = \inf \{d(f(z),f(z^0)) : d(z,z^0) = r\}$$

und V(r) das 2m-dimensionale Hausdorffsche Maß bezüglich d einer Kugel in K vom Radius r. Mit Hilfe dieser Abschätzung werden notwendige und hinreiche Bedingungen dafür gewonnen, daß $f : K \to K$ ein Biholomorphismus von K ist. Diese Ergebnisse stehen im Zusammenhang mit der Vermutung, daß für $m \geq 2$ jede eigentliche holomorphe Abbildung von K in sich ein Automorphismus von K ist.

F. WILLE: Monotone und konvexe Operatoren

Der Borsuksche Antipodensatz über die Lösungsexistenz bei nichtlinearen Gleichungssystemen wird auf maximal s monotone Operatoren T mit von oben vollstetigen Störungen übertragen:

Antipodensatz "Es sei $T : X \to 2^{X^*}$ (X reeller reflexiver Banachraum) ein mehrwertiger maximal s monotoner Operator und $G : X \to 2^{X^*}$ vollstetig von oben. Der Operator $F = T + G$ (eff.Defber. v. $F = D(F)$) sei im Einheitsball $B \subset X$ beschränkt, und sei $D(F) \supset B$. Ferner gelte (*) $F(x) \cap tF(-x) = \emptyset$ für alle $x \in \partial B$ und alle $t \geq 0$. Dann hat F eine Nullstelle $x_0 \in B$, d.h. $0 \in F(x_0)$."

Der Satz entspricht genau dem Fixpunktsatz von Krasnoselskii für vollstetige Vektorfelder im Rahmen der Leray-Schauder Theorie. Mit dem Antipodensatz lassen sich z.B. Nullstellensätze für konvexe Operatoren in halbgeordneten Banachräumen herleiten. Aus diesen kann man Überdeckungssätze gewinnen, von denen stellvertretend folgende Sätze angegeben sind:

Satz: "Überdeckt man den Rand einer beliebigen beschränkten Menge M im $\mathbb{R}^n$ mit n abgeschlossenen konvexen Mengen A_i, so überdecken die A_i sogar ganz M."

Satz: "Sei $\Lambda > 0$ beliebig gegeben. Bei jeder Überdeckung des $\mathbb{R}^n$ mit abgeschlossenen Mengen A_i, $i = 1, \dots k$, $k \leq \frac{n}{2}(n+3)$, existiert ein A_i, in dem zwei Punkte mit dem Abstand Λ liegen."

E. THOMA: <u>Die Charaktere von $GL(\infty,\mathbb{F}_q)$</u>

Zunächst die allgemeine Fragestellung. Es sei G eine Gruppe. Eine Funktion $\alpha : G \to \mathbb{C}$ heißt eine Charakter, falls gilt 1. α ist positiv definit und 2. α ist eine Klassenfunktion, d.h. $\alpha(g^{-1}hg) = \alpha(h)$ für alle $g, h \in G$. Es sei $K(G) = \{\alpha : \alpha$ Charakter und $\alpha(e) = 1\}$ (e = neutrales Element der Gruppe). Bei punktweiser Addition und Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ ist $K(G)$ eine konvexe Menge. Nach Einführung der Topologie der punktweisen Konvergenz ist $K(G)$ auch kompakt. Also ist die Menge $E(G)$ der Extremalpunkte von $K(G)$ nicht leer. Beispiel: Falls G endlich ist, sind die $\alpha \in E(G)$ genau die Spuren der irreduziblen Darstellungen mit der Normierung $\alpha(e) = 1$. Es ist also ein interessantes Problem für "gute" Gruppen die Charaktere von $E(G)$ zu bestimmen.

Es sei q eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ der Körper der Ordnung q. Zu einer natürlichen Zahl n sei $Gl(n,\mathbb{F}_q)$ die Gruppe der regulären $n \times n$ - Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_q$. $GL(\infty,\mathbb{F}_q)$ sei die Gruppe der unendlichen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

mit $A \in Gl(n,\mathbb{F}_q)$, $n = 1,2, \ldots$. Wenn $A \in GL(n,\mathbb{F}_q)$ ist, so identifizieren wir A mit $\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$. Dann sind die $Gl(n,\mathbb{F}_q)$ Untergruppen von $Gl(\infty,\mathbb{F}_q)$.

<u>Satz 1:</u> Ist $\alpha \in K(G)$, so ist $\alpha \in E(G)$ genau dann, wenn $\alpha \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \alpha(A)\,\alpha(B)$ ist.

Korollar: Sind $\alpha, \beta \in E(G)$, so ist auch das punktweise Produkt $\alpha\beta \in E(G)$.

Wir beschreiben nun einige Charaktere. Ist $\sigma(A) := \mathrm{Rang}(A-E)$, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ und $k \in \{0,1,\ldots\}$, so ist $\varphi_k : G \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_k(A) = q^{-k\sigma(A)}$ aus $E(G)$. Ist F_q^* die multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}_q$ und $\Theta : F^* \to H$ ein treuer Homomorphismus von F^* in die

Kreisgruppe Π, dann ist $\psi_l(A) = \circledcirc^l(\det A)$, $l = 0,1,\dots q-2$, ebenfalls aus $E(G)$. Ferner ist α_{reg} mit $\alpha_{reg}(E) = 1$ und $\alpha_{reg}(A) = 0$ für $A \neq E$ aus $E(G)$.

Satz 2: α_{reg} und $\varphi_k\psi_l$, $k = 0,1,\dots,$ $l = 0,1,\dots q-2$, sind genau die Charaktere aus $E(G)$.

Dies folgt nach einigen weiteren Überlegungen aus folgendem Satz, den in wesentlich allgemeinerer Form Herr Skudlarek bewiesen hat.

Satz 3: Sind $A, B \in GL(\infty,\mathbb{F}_q)$ und $\alpha \in E(G)$ und $\sigma(AB) \leq \sigma(A) + \sigma(B)$, so gilt $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$.

A.M. FINK: Definitions of almost peridodic functions useful in differential equations

We illustrate the usefulness of the Bochner definition of almost periodic functions via the translation operator $T_\alpha f(t) = \lim_n f(t+\alpha_n)$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n,\dots)$, which reads: f is almost periodic if from every pair of sequences α', β' one can find common subsequences α and β so that $T_{\alpha+\beta}f = T_\alpha T_\beta f$ pointwise.

Secondly we illustrate the case of the equivalent definition of Seifert: f is almost periodic if and only if from every sequence α' we can find a subsequence α such that (1) $T_\alpha f$ exists pointwise (2) there is a number $d(\alpha) > 0$ so that if β_1 and β_2 are subsequences of α and γ is any sequence so that $T_{\gamma+\beta_1}f = g$ and $T_{\gamma+\beta_2}f = h$ exist pointwise, than either $g = h$ or $|g(t) - h(t)| \geq d(\alpha)$ for all t.

This definition is applied to yield Amerio's theorem. We indicate how a relation of the hypothesis of Amerio's theorem leads to analogous definitions of asymptotic almost periodic functions and similar results, which are then applied to the case when stable solutions are present.

J. ELSNER: Paley - Wiener Konstante für zwei Variable

Betrachtet man nicht-harmonische Fourierreihen im $L^p(K)$, $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, kann man die Eigenschaft frei oder total zu sein, sofort mit den Sätzen von Hahn-Banach und Riesz-Fischer auf Fouriertransformierte, also ganze Funktionen vom exponentiellen Typ, zurückführen. Ist ein Exponentensystem $\Lambda, \Lambda = (\lambda_n)$, vorgegeben, so fragt man sich, kann man einzelne oder alle Exponenten abändern, ohne die Eigenschaften des von Λ erzeugten Exponentialsystems $S(\Lambda) := \{\exp[-2\pi i\lambda_n]\}_{n\epsilon N}$ zu stören. Gilt eine der folgenden Voraussetzungen für $M = (\mu_n)$

(1) $\mu_n \neq \lambda_n$ nur für endlich viele n, (2) $\sum|\mu_n - \lambda_n| < \infty$,

(3) $\mathrm{Re}(\lambda_n - \mu_n) = 0$ und es existiert $K > 0$ mit $|\mathrm{Im}\,\lambda_n| < K$

und $|\mathrm{Im}(\lambda_n - \mu_n)| < K$ für $\lambda_n \neq \mu_n$, so folgt $S(\Lambda)$ und $S(M)$ haben dieselben Eigenschaften (im Fall (3) nur für $p = 2$). Die Beweise werden unter wesentlicher Benutzung von Sätzen über die Nullstellenverteilung ganzer Funktionen von exponentiellem Typ geführt. Ist $\Lambda = (n)_{n\epsilon Z}$ und gilt $|\mu_n - n| \leq D < 1/4$, so erhält man, daß $S(M)$ in $L^2(-\pi,\pi)$ eine Basis ist. Auch diesen Satz kann man mit den obigen Methoden beweisen oder aber das Kriterium von Paley-Wiener benutzen und direkt abschätzen. Auf demselben Weg kann man dann Paley-Wiener Konstanten für den Fall von zwei Veränderlichen erhalten:

Gilt $|\lambda^1_{n,m} - n| \leq 0.115$ und $|\lambda^2_{n,m} - m| \leq 0.115$, so ist das von $\Lambda = ((\lambda^1_{n,m}, \lambda^2_{n,m}))_{n,m\epsilon Z}$ erzeugte Exponentialsystem eine Basis von $L^2((-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi))$.

CHUN-HUNG TZENG: Fastperiodizitätseigenschaften von Dirichletreihen

Wir betrachten die von Maak definierten Dirichletreihen. Eine Funktion $\varphi(s)$ besitzt im Vertikalstreifen (K,∞) eine absolut-summierbare Dirichletreihe $\varphi(s) \sim \sum\limits_{\lambda>0} a(\lambda)\,\lambda^{-s}$, wenn es ein System von Zahlen $\gamma^{\nu}(\lambda)$ ($\nu=1,2,\ldots, -\infty<\lambda<\infty$) mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Für jedes ν ist höchstens für endlich viele λ $\gamma^{\nu}(\lambda) \neq 0$. Es gilt $0 \leq \gamma^{\nu}(\lambda) \leq 1$ und für $a(\lambda) \neq 0$ folgt $\lim\limits_{\nu\to\infty} \gamma^{\nu}(\lambda) = 1$.

(2) Für jedes s mit Re s > K und für alle reellen u konvergiert $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_u^{(\nu)}(s) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{\lambda>0} \gamma^{\nu}(\lambda)\, a(\lambda)\, e^{i\lambda u}\, \lambda^{-s} = \varphi_u(s)$, wobei $\varphi_0(s) = \varphi(s)$ ist. Die Konvergenz ist gleichmäßig in u und in jedem Kompaktum D im Vertikalstreifen (K,∞).

Es bedeutet D(K) folgende Klasse von Funktionen $\varphi(s)$ mit absolut summierbarer Dirichletreihe in Re s > K: Dann und nur dann gilt $\varphi(s) \in D(K)$, wenn zu jedem Zahlentripel $\delta, \sigma_1, \sigma_2$ mit $0 < \delta < \pi/2$, $K < \sigma_1 < \sigma_2$ eine Konstante C existiert, so daß $|\Gamma(s)\, \varphi_u^{\nu}(s)| < C\, e^{-\delta|t|}$ für alle reellen u, alle natürlichen ν und alle s mit $\sigma_1 \leq \mathrm{Re}\, s \leq \sigma_2$.

Mit Hilfe der Mellintransformation und der Parsevalgleichung für Laplacetransformationen können wir beweisen, daß jedes $\varphi_u(s)$ eine analytisch-B_2-fastperiodische Funktion von s im Vertikalstreifen K, ist.

SING-LONG HONG: Fourierreihen fastautomorpher Formen

Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Gruppe aller ganzen Zahlen. Es sei N eine natürliche Zahl. h(m,n) sei eine beschränkte komplexwertige Funktion auf der Menge der von (0,0) verschiedenen Paare ganzer Zahlen, so daß

$$\{h^{m,r} : m \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z},\ m \neq 0,\ 0\leq r<N^{(m)},\ h^{m,r}(t) := h(m,r+Nnt) \text{ mit } t \in \mathbb{Z}\}$$

gleichgradig fastperiodisch auf $\mathbb{Z}$ ist. Dann ist die Poincaréreihe

$$f(\tau) := \sum \frac{h(m,n)}{(m\tau+n)^k} \quad k > 2,\ \tau = x + iy,$$

im Sinne H.Bohrs analytisch fastperiodische Funktion von τ im Streifen $0 < y < \infty$. Dabei bedeutet $(m\tau+n) = e^{k\,\log(m\tau+n)}$ mit $-\pi \leq \operatorname{Im} \lg(m\tau+n) < \pi$, und $\sum'$ die Summe über alle von $(0,0)$ verschiedenen Paare ganzer Zahlen. Man erhält dann eine Formel, die Fourierkoeffizienten der Fourierreihe von $f(\tau)$ durch die $h^{m,r}$ auszudrücken. Mit Hilfe dieser Formel kann man spezielle Dirichletreihen konstruieren; d.h. ausgehend von unitären Darstellungen der Modulgruppe kann man Dirichletreihen mit Funktionalgleichung angeben.

H. BAUERMEISTER: Holomorphe Besicovitch fastperiodische Funktionen in einer Halbebene

Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \geq 0$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{2\lambda_n \sigma}$ für jedes $\sigma \geq 0$ konvergent. Es gibt einerseits eine Besicovitch fastperiodische Funktion f mit $f(t) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{i\lambda_n t}$ und andererseits für jedes $a > 0$ in dem Streifen $\{s\in\mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} s < a\}$ eine holomorphe Besicovitch fastperiodische Funktion g_a mit $g_a(s) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\lambda_n s}$. Untersucht wird, ob man eine Aussage darüber treffen kann, wann es eine in der Halbebene $\{s\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} s>0\}$ holomorphe Funktion g gibt, die dort analytisch Besicovitch fastperiodisch ist und $\lim\limits_{\tau\to 0} g(\tau+it) = f(t)$ f.ü. erfüllt. Eine Teillösung gewinnt man durch Untersuchung des Poissonintegrals

$$(Pf)(x,y) := \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x^2+(y-t)^2}\, dt :$$

Gibt es ein $\alpha\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, so daß $P(1+i\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha} f$ ein Element des Hardyraumes $H_2(0)$ ist, dann ist Pf holomorph Besicovitch fastperiodisch in $\{s \in C : \operatorname{Re} s > 0\}$ und erfüllt $\lim_{x \to 0} (Pf)(x,y) = f(y)$ f.ü. in y. Außerdem ist für jedes β mit $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha$ $P(1+i \cdot id_{\mathbb{R}})^{-\beta} f \in H_2(0)$.

H.-W. BURMANN: Die hypergeometrische Differentialgleichung in Banachalgebren und Darstellungen von $\Gamma(2)$

Die Fundamentallösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$w'(\xi) = \left(\frac{a}{\xi} + \frac{b}{1-\xi} \right) w(\xi)$$

in der komplexen Banachalgebra B sind Funktionen auf der universellen Überlagerungsfläche $\mathfrak{U}$ der in 0 und 1 punktierten Ebene $\mathbb{C}$ mit Werten in B.
Sie ändern sich bei Anwendung einer Decktransformation von $\mathfrak{U}$ nur um einen rechtsseitigen Faktor aus B

$$w(T\xi) = w(\xi)\, d(T)$$

Die Zuordnung $T \to d(T^{-1})$ definiert eine Darstellung der Gruppe G der Decktransformationen. Unter gewissen Voraussetzungen über a und b haben die Fundamentallösungen die Form

$$\left(e + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k\right) \xi^a c, \quad c_k, c \in B$$

bei 0 und analog bei 1. Dann lassen sich $d(T_0)$ und $d(T_1)$ (T_0 und T_1 die Decktransformationen, die den Umläufen bei 0 bzw. 1 entsprechen) explizit durch a und b ausdrücken. Diese Gleichungen kann man nach a und b auflösen, wenn $d(T_0)$ und $d(T_1)$ dicht bei dem Einselement e von B liegen. Es lassen sich dann Teilantworten auf die Fragen geben, welche Darstellungen man auf diese Weise erhält, und wie sich die Eigenschaften von a und b auf $d(T_0)$, $d(T_1)$ übertragen und umgekehrt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Bildet man die obere Halbebene durch $\varkappa^2(\tau)$ auf $\mathfrak{U}$ ab, so geht die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$ der Modulgruppe über in G. Ist also w eine Fundamentallösung der hypergeometrischen Differentialgleichung, so liefert $w(\varkappa^2(\tau))$ eine Darstellung $d(L)$ von $\Gamma(2)$, und unter den bereits oben gemachten Voraussetzungen über a, b läßt sich für ein $L : \tau \to \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ aus $\Gamma(2)$ $d(L)$ in expliziter Form durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausdrücken.

H.S. HOLDGRÜN: Zum Beweis des Hauptsatzes für fastperiodische Vektoren

Moduln der topologischen Gruppen G seien hier lokal konvexe topologische Vektorräume E, auf denen G gleichgradig stetig und linear operiert. Sind alle Vektoren des Moduls E fastperiodisch und ist E vollständig (wenigstens in einem abgeschwächten Sinn), so liegen die endlichdimensionalen Untermoduln von E dicht in E. Zu diesem (inzwischen klassischen) Hauptsatz der Theorie fastperiodischer Vektoren wird ein neuer Beweis angegeben. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Isomorphieklassen von Moduln induziert eine Topologie $\tau_{\mathfrak{M}}$ auf G. Es werden solche Mengen $\mathfrak{M}$ betrachtet, die nur aus endlichdimensionalen Klassen bestehen, und die gegen die üblichen algebraischen Prozesse (z.B. $\oplus, \otimes$) abgeschlossen sind. Zum Beweis des Hauptsatzes wird folgende Aussage benutzt: Besteht der vollständige Modul E zu G nur aus fastperiodischen Vektoren, so liegen die Untermoduln von E, deren Klassen zu $\mathfrak{M}$ gehören, genau dann dicht in E, wenn τ_E gröber als $\tau_{\mathfrak{M}}$ ist. Hieraus folgt u.a. auch ein Satz von van Kampen: Ist G kompakt und trennt $\mathfrak{M}$ die Punkte von G, so enthält $\mathfrak{M}$ alle endlichdimensionalen Isomorphieklassen.

H.Bauermeister (Freiburg)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft