MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 40/1972

Arbeitsgemeinschaft über
Reduktionstheorie algebraischer Gruppen

8.10. bis 14.10.1972

Die Tagung stand unter der Leitung der Herren Prof.Dr.H.Behr (Bielefeld) und Prof.Dr.A.Dress (Bielefeld).

Teilnehmer

H.Abels, Bielefeld
K.Albermann, Bonn
A.Bak, Genf
E.Becker, Köln
S.Beckmann, Bielefeld
H.Behr, Bielefeld
R.Berndt, Hamburg
P.Draxl, Bielefeld
A.Dress, Bielefeld
W.D.Geyer, Erlangen
P.Hahnel, Bonn
F.Halter-Koch, Köln
H.Helling, Bielefeld
R.van der Hout, Utrecht
J.Hurrelbrink, Bielefeld
K.Kiyek, Saarbrücken
M.Knebusch, Saarbrücken
M.Kneser, Göttingen
M.Kolster, Saarbrücken
M.Lindner, Saarbrücken
J.Mennicke, Bielefeld
M.Otte, Münster
A.Pfister, Mainz
D.Poguntke, Bielefeld
U.Rehmann, Bielefeld
J.Rohlfs, Bonn
F.Schwarz, Saarbrücken
J.Schwermer, Bonn
C.Siebeneicher, Bielefeld
H.Steinbring, Bonn
S.Suckow, Mainz
N.Sukthankar, z.Zt. Bielefeld

Vortragsauszüge

H. Abels: **Bericht über Adele, Idele, Höhen und ihre Eigenschaften**

Es wurden die Begriffe: lokaler Körper, globaler Körper, Stelle, Adelering, Idelegruppe und Höhe eingeführt. Bewiesen wurde die Kompaktheit der Faktorgruppe des Adeleringes A eines globalen Körpers k nach der diskreten Untergruppe k, alles aufgefaßt als additive Gruppen. Dann wurde die Kompaktheit der Faktorgruppe der Gruppe I^o der Idele der Norm 1 nach der diskreten Untergruppe $k^{\times}$ gezeigt. Über Höhen für primitive Vektoren wurden grundlegende Eigenschaften bewiesen (vgl. T.A. Springer: Reduction theory over global fields, Skript Utrecht 1970 und A. Weil, Basic number theory, Springer Verlag 1967).

P. Draxl: **Minkowski-Reduktion in GLn (für A/Q und R/Z**

Neben den klassischen Ergebnissen über Fundamentalbereiche für GL(n,R) modulo GL(n,Z) (genannt "SIEGEL-Bereiche") wurde über entsprechende Bereiche für GL(n,A) modulo GL(n,$\mathbb{Q}$) referiert (A: = Adèlering von $\mathbb{Q}$). Dabei wurde auch auf den Fall eines rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{F}_q(t)$ statt $\mathbb{Q}$ eingegangen (vgl. insgesamt: R. GODEMENT, Séminaire Bourbaki, No 257).

Sabine Beckmann: **Reduktionstheorie quadratischer Formen**

Die Ergebnisse aus Vortrag 2 wurden auf quadratische Formen über den reellen Zahlen und über einem rationalen Funktionenkörper angewandt. Sinn des Vortrags war es, den Bezug zur klassischen Theorie herzustellen.

Ch. Siebeneicher: **1. Bericht über algebraische Gruppen**

Es wurde unter anderem der folgende Satz bewiesen:

Satz: Sei G eine lineare algebraische k-Gruppe, H eine abgeschlossene k-Untergruppe von G. Dann gibt es einen endlich dimensionalen k-Vektorraum V, eine k-Darstellung $G \to GL(V)$ und eine k-Gerade $D \subset V$, so daß $H = \{g \in G \mid gD = D\}$ ist.
Ferner wurde der Funktor "Restriktion des Grundkörpers" als Rechtsadjungierter zum Funktor "Basiswechsel" erkannt.

- 3 -

K. Kiyek: **Kriterium von Mahler und Kompaktheit**

Es sei G eine lineare algebraische Gruppe, definiert über dem globalen Körper k, G(A) die Adelesierung, $G^{o}(A)$ die abgeschlossene Untergruppe von G(A), auf der alle χ_A, χ Charakter von G, Idelenorm 1 haben. Ist G über k_s trigonalisierbar, so ist $G(A)^{o}/G(k)$ kompakt. Zum Beweis dieses Satzes wird ein Kompaktheitskriterium für Teilmengen von $G(A)^{o}/G(k)$ hergeleitet.

H. Behr: **2. Bericht über algebraische Gruppen**

Es wurden Begriffe und Sätze der allgemeinen Theorie algebraischer Gruppen zusammengestellt, die zur Formulierung der Reduktionstheorie benötigt werden, Beweise wurden nicht gegeben. Im einzelnen:

1) Tori, ihre Charaktere, Existenz Separabler Zerfällungskörper.
2) Auflösbare Gruppen: Satz von Lie-Kolchin, Darstellung als semidirektes Produkt eines Torus und eines unipotenten Normalteilers.
3) Radikal und unipotentes Radikal, reduktive Gruppen, Wurzeln und Wurzelgruppen, Borelgruppen und ihr unipotentes Radikal, dicke Zelle.
4) k-auflösbare Gruppen und zerfallende reduktive Gruppen.
5) Die wichtigsten Sätze über Rationalitätsfragen: Existenz über k definierter maximaler Tori, Existenz separabler Zerfällungskörper, Zariski-Dichtheit der rationalen Punkte (für reduktive Gruppen über unendlichen Körpern). Folgerungen: Definiertheit über k.
6) Unipotente Gruppen, auf denen ein Torus operiert, zerfallen über k.
7) Konstruktion parabolischer Standardgruppen.

J. Hurrelbrink: **Bericht über parabolische Gruppen**

In einer zusammenhängenden reduktiven, über einem Körper k definierten, linearen algebraischen Gruppe G ist jede minimale, über k definierte, parabolische Untergruppe P von G halbdirektes Produkt des Zentralisators eines maximalen, über k zerfallenden Torus T von G und des unipotenten

- 4 -

Radikals von P

Mit Hilfe des durch die Wahl von P im Wurzelsystem von G bezüglich T ausgezeichneten Systems der einfachen Wurzeln wurde ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen über k aller über k definierten, parabolischen Untergruppen von G beschrieben.

W.D. Geyer: <u>Minkowski's Ungleichungen und Reduktionstheorie für quasizerfallende Gruppen</u>

Sei k ein globaler Körper mit Adelring A, G eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische k-Gruppe von k-Rang $r > 0$. Ist T ein maximaler zerfallender k-Torus in G, so läßt sich eine minimale parabolische k-Untergruppe von G als semidirektes Produkt $P = Z(T)U$ über k schreiben. Sind $a_1, \ldots, a_r$ die einfachen k-Wurzeln von G bez. P, so bezeichne für ein positives c mit T(c) die Menge aller $t \in T(A)$, so daß für alle $i = 1, \ldots, r$ $|a_i(t)| < c$ gilt. Ziel des Vortrages war der

<u>Satz:</u> Es gibt kompakte Mengen $D \subset GL(A)^o$ und $E \subset U(A)$ und ein $c > 0$ derart, daß $G(A) = D.T(c).E.G(k)$ ist.*)

Der eigentliche Induktionsanfang ($r = 0$) wurde in diesem Vortrag vorausgesetzt, was auf die Behauptung hinausläuft, daß $P^o(A)/P(k)$ kompakt ist. Für quasizerfallende Gruppen, bei denen also P eine Borelgruppe und damit auflösbar ist, war das schon mit Mahler's Kriterium gezeigt worden. Die Hauptarbeit war für den Fall $r = 1$ zu leisten. Hier nehme man sich eine Darstellung ρ von G, bei der eine von ζ aufgespannte k-Gerade genau von P invariant gelassen wird. Sei $\|\;\|$ eine Höhe auf dem adelisierten Darstellungsraum, so wähle man $\gamma_o \in G(k)$ so, daß $\|\rho(g\gamma)\zeta\|$ minimal für $\gamma = \gamma_o$ wird (Minkowskische Ungleichung). Es ist dann im wesentlichen nur zu zeigen, daß für die Toruskomponente t von diesem $g\gamma_o$ eine Ungleichung $|a_1(t)| < c$ für ein von g unabhängiges c gilt. Dazu genügt es zu wissen, daß die Menge S aller $g \in G(A)^o$ mit $\|\rho(g\gamma)\zeta\| \geq 1$ für alle $\gamma \in G(k)$ relativ kompakt modulo G(k) ist. Der Beweis dieses Lemmas in den Notes von T.A. Springer (p. 8/9) scheint falsch zu sein, daher wurde auf den Beweis von Godement zurückgegriffen, der zunächst die Situation auf die adjungierte Gruppe $\bar{G}$ zurückführt (wegen der Eigentlichkeit der Abbildung $G(A)^o/G(U) \to \bar{G}(A)/\bar{G}(k)$). Die Kompaktheit von S

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wird bewiesen, indem das Mahlersche Kriterium auf die adjungierte Darstellung von $\bar{G}$ auf Lie $\bar{G}$ angewandt wird. Dabei wird benutzt, daß sich unipotente Elemente über k in das unipotente Radikal U konjugieren lassen, was bei Char $p \neq 0$ nicht immer richtig ist. Besondere Schwierigkeiten machen hier die kleinsten Primzahlen p=2,3,5. Mit gewissen Annahmen findet sich eine Ausdehnung des Beweises auf Char. p bei Behr (Inv. Math. 7). Ein allgemeingültiger Beweis im Funktionenkörperfall auf ganz anderem Weg findet sich bei Harder (Inv. Math. 7).
Der Induktionsschritt auf $r > 1$ ist einfach, das heißt rein technisch.

*) Für eine lineare algebraische k-Gruppe G bezeichne $G(A)^0$ die Menge aller $g \in G(A)$, für die $|\chi(g)|=1$ für alle k-rationalen Charaktere χ von G ist.

M. Knebusch: Siegel-Eigenschaft von Zahlkörpern

Sei G reduktive algebraische Gruppe über einem Zahlkörper oder Funktionenkörper in einer Variablen mit endlich vielen Konstanten k und A der Adelring von k. Zu einem Siegelbereich $\mathfrak{S}$ von G(A) mod G(k) wurde untersucht, in welchem "Teil" von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ ein Element $(g, g') \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ liegt, zu dem es ein γ in einer vorgegebenen Bruhatzelle von G(k) gibt mit $g = g'\gamma$. (s. Skriptum von T.A. Springer, Utrecht, über Reduktionstheorie, § 5).

F. Schwarz: Kompaktheitskriterium, Reduktionstheorie für reduktive k-Gruppen

Mit Hilfe eines "Galois-descente" wurde das folgende Kompaktheitskriterium bewiesen (Bezeichnungen und Einschränkungen für die Charakteristik wie im Vortrag von Herrn Geyer):

Satz 1: Für eine zusammenhängende reduktive k-Gruppe G ist $G(A)^0/G(k)$ genau dann kompakt, wenn G keine echte parabolische k-Untergruppe besitzt.

Damit wurde der folgende Satz bewiesen:

Satz 2: Ist G eine zusammenhängende reduktive k-Gruppe und P eine minimale parabolische k-Untergruppe von G, so ist $P(A)^0/P(k)$ kompakt.

Daraus folgt, daß der im Vortrag von Herrn Geyer bewiesene Satz für alle zusammenhängenden reduktiven k-Gruppen G richtig ist.

U. Rehmann: **Endlichkeit der Klassenzahl, Fundamentalbereiche arithmetischer Gruppen**

Ausgehend vom Kompaktheitskriterium für zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppen G über globalen Körpern K (mit Adelering A) wurde für solche Gruppen bewiesen: Ist P eine minimale parabolische K-Untergruppe von G, so ist $[G_{A_\infty} \backslash G_A / P_K]$ endlich. Dies impliziert klassische Endlichkeitssätze, etwa die Endlichkeit der Klassenzahl eines Zahlkörpers, die Endlichkeit der Klassen im Geschlecht einer quadratischen Form.

Eine weitere Folgerung aus dem Kompaktheitskriterium ist die Existenz von Fundamentalbereichen arithmetischer Gruppen in lokalkompakten topologischen Gruppen ("Siegelbereiche"), die gewisse Endlichkeitseigenschaften haben.

H. Helling: **Siegel-Bereiche und ihre Spitzen**

Siegel-Bereiche besitzen in reellen algebraischen reduktiven Gruppen ohne Charaktere endliches Volumen. - Fundamentalbereiche arithmetischer Untergruppen lassen sich durch endlich viele Siegel-Bereiche überdecken; dabei kommen außer einem relativ-kompakten Teil nur endlich viele punktfremde Spitzensektoren zur Vereinigung. Nahe den Spitzen findet Äquivalenz unter der arithmetischen Gruppe nur statt, wenn das schon in der jeweiligen parabolischen Untergruppe geschieht.

P. Hahnel: **Umformulierung der Hauptsätze der Reduktionstheorie nach Harder**

Sei G eine halbeinfache, über einem totalreellen Zahlkörper k definierte, algebraische Gruppe, P eine minimale parabolische Untergruppe von G und Γ eine arithmetisch definierte Untergruppe von G. Unter Benutzung der Killingform auf der Liealgebra von G wurden an den unendlichen Stellen von k Invarianten $n_\alpha(x,P)$ definiert, wobei α eine einfache Wurzel eines maximal zerfallenden Torus von P ist und x ein Punkt in dem G an den unendlichen Stellen zugeordneten symmetrischen Raum X_∞. Mit Hilfe dieser Invarianten wurde nun ein Fundamentalbereich von Γ auf X_∞ charakterisiert und die Struktur von $X_\infty/_\Gamma$ in der Nähe des Randes bestimmt.

J. Rohlfs: **Harders Gauß-Bonnet-Formel für Rang 1**

Es wird der Umgebungsrand einer Spitze im Fall Rang 1 beschrieben. Das in der Chernschen Formel für die Euler-Charakteristik auftretende Randintegral ist proportional zu dem Volumenintegral über den Umgebungsrand der Spitze. Der Umgebungsrand ist ein Faserbündel, dessen Faservolumina klein werden, wenn man nahe an der Spitze ist. Hieraus folgt für eine arithmetisch definierte Untergruppe Γ von G:

$\int_{K\backslash G/\Gamma} \omega = \chi(\Gamma)$. Dabei ist K eine maximal kompakte Untergruppe von G und ω die Euler-form.

Insbesondere erhält man für die ganzen Zahlen $\mathcal{O}$ eines total reellen Zahlenkörpers k gerade $\chi(SL(2,\mathcal{O})) = \varphi_k(-1)$.

H. Behr: **Endliche Erzeugbarkeit und Präsentierbarkeit arithmetischer Gruppen über globalen Körpern**

1) Beweis der Siegel-Bedingung im Zahlkörperfall: Sei G reduktiv über k, Ω Siegelbereich in der Adelegruppe $G(A)$, d.h. $G(A) = \Omega\cdot G(k)$, $\Omega = K.T_\infty(c).D$, $G(A) = K.P(A)$ mit kompaktem K.

   Falls die Cartan-Involution bzgl. K_∞ auf T_∞ die Abbildung $t \mapsto t^{-1}$ induziert, ist die Menge

   $M=\{\gamma\in G(k) \mid \Omega\gamma\cap\Omega\neq\emptyset\}$ endlich.

2) Kurzer Ergebnisbericht über endliche Präsentierbarkeit arithmetischer Gruppen:
   Sei k global, S endliche Menge von Primstellen von k, $\mathcal{O}_S = \{x \in k \mid v(x) \geq 0$ für alle $v \notin S\}$, dann gilt:

   a) k Zahlkörper, G beliebig: $G(\mathcal{O}_\infty)$ endlich präsentierbar.

   b) k Zahlkörper, G reduktiv: $G(\mathcal{O}_S)$ endlich präsentierbar.

   c) $SL_2(k[t])$ ist nicht endlich erzeugbar, aber $SL_n(k[t])$ für $n \geq 3$.

   d) k Funktionenkörper, G reduktiv, $G(\mathcal{O}_S)$ ist endlich erzeugbar in den folgenden Fällen: (i) $k\text{-}Rg(G') = 0$, (ii) $\# S \geq 2$ (iii) $S=\{v_0\}$ und $k_{v_0} - Rg(G') \geq 2$ (evtl. mit einer Ausnahme).

Christian Siebeneicher, Bielefeld

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft