MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 44/1972

Fragen des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen

13.11. bis 18.11.1972

Die Tagung über Fragen des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen wandte sich an Fachdidaktiker. Sie stand unter der Leitung von Prof.Dr.W.Markwald, Wuppertal (erkrankt) und Prof.Dr.H.-J.Vollrath, Würzburg.

Sehr breit war das Spektrum der Vorträge, an die sich erfreulich offene und lebhafte Diskussionen anschlossen.

Die Ausleuchtung des mathematischen Hintergrundes zu einzelnen Unterrichtsgegenständen (Größenbereiche, Ordnungsdiagramme) war Anliegen der Vorträge von D.Lind und H.J.Claus. Thematisch abgeschlossene Teilgebiete des Unterrichts (elementare Kombinatorik, Ganzteilfunktion) stellten A.Kirsch und H.-J.Vollrath dar. H.Siemon berichtete über Erfahrungen mit einer Problemaufgabe und ihrer schrittweisen Verallgemeinerung. Vorschläge zur Behandlung der Wahrscheinlichkeit in der Grundschule bzw. Sekundarstufe I legten H.Stever und D.Heitele vor. Mit der Frage nach der Stofforganisation überhaupt beschäftigte sich der Vortrag von E.Wittmann. Die Bedeutung von Diagrammen als Lernhilfen zeigte H.Winter auf. Den Lernprozeß untersuchten G.Walther bzw. G.Holland unter dem Aspekt der Beschreibbarkeit durch den Strukturbegriff der Fastgruppierung bzw. durch informationstheoretische Methoden. Das Problem der Erstellung von Lernzielen an relativ eng begrenzten Gegenstandsbereichen (Teilbarkeitslehre bzw. Inhalte der Orientierungsstufe) zeigten H.-G.Bigalke und A.Abele auf. Eine Taxonomie von Lernzielen im mathematischen Unterricht behandelte H.Walter. Schließlich wurde das Problem der Leistungsmessung (als grundsätzliche Frage bzw. im Zusammenhang mit einem Vorschlag zur Objektivierung) von F.Nestle und J.Laux angesprochen.

Teilnehmer

A.Abele, Heidelberg
G.Becker, Wuppertal
H.-G.Bigalke, Hannover
H.J.Claus, Darmstadt
K.Dietsch, Nürnberg
B.Döring, Düsseldorf
W.L.Fischer, Erlangen
M.D.Gerhardts, Osnabrück
G.Griesel, Kassel
D.Heitele, Dortmund
G.Holland, Gießen
D.Kahle, Göttingen
L.Kieffer, Luxemburg
A.Kirsch, Kassel
N.Knoche, Dortmund
J.Laux, Landau
D.Lind, Landau
U.Löttgen, Köln
N.Matros, Würzburg
G.Müller, Wuppertal
F.Nestle, Ludwigsburg
G.Preiß, Freiburg
H.Siemon, Ludwigsburg
H.-G.Steiner, Bayreuth
H.Stever, Karlsruhe
D.Vogel, Bayreuth
H.-J.Vollrath, Würzburg
H.Wäsche, Karlsruhe
H.Walter, Reutlingen
G.Walther, Dortmund
I.Weidig, Landau
H.Winter, Dortmund
E.Wittmann, Dortmund

Vortragsauszüge

ABELE, A.: Die Entwicklung eines Mathematik-Curriculums für die Orientierungsstufe (Klasse 5 und 6) einer Gesamtschule

1. Bei den Planungsarbeiten für das mathematische Curriculum sind die allgemeinen pädagogischen Zielsetzungen und organisatorische Planungsgesichtspunkte zu berücksichtigen. Dem Beschluß des übergeordneten Planungsausschusses gemäß folgt die Planungsarbeit in der Fachkommission Mathematik dem Teschnerschen Phasenablauf: Phase 1: Präparation. Suche, Prioritierung und Selektion der Richt- und Grobziele. Phase 2: Realisierung. Formulierung und Strukturierung der Feinziele. Phase 3: Kontrolle.
2. Es wird ein Katalog von mathematischen Lernzielen vorgelegt und damit vorgeschlagen, bei der Konstruktion des Curriculums vor der Formulierung der Feinziele in Phase 2 den didaktischen Bezug der inhaltlich formulierten Grobziele deutlich zu kennzeichnen. Dadurch soll erreicht werden, daß die Feinziele nicht allein mit innermathematischer Relevanz formuliert werden und die Bindung an die Richtziele sichtbar bleibt.

BIGALKE, H.-G.: Versuch einer differenzierten lernzielorientierten Lernplanung auf dem Gebiet der Teilbarkeitslehre in Klasse 5/6

Es wird ein Katalog von Lernzielen 3. Ordnung für die Behandlung der Teilbarkeitslehre vorgestellt. Diese Lernziele werden in drei Klassen eingeteilt, die den gewünschten Leistungskursen zuzuordnen sind. Anhand einer zweidimensionalen Matrix von Lernzielen 2. Ordnung, die allgemeine mathematische Fähigkeiten ansprechen, werden die Lernziele 3. Ordnung einer Analyse unterworfen. Die Verteilung in der Matrix gibt interessante Aufschlüsse über die Hintergründe bei der Aufstellung der Lernziele 3. Ordnung. Die Ergebnisse werden einer kritischen Diskussion unterworfen.

CLAUS, H.J.: Ordnungsdiagramme in der Teilbarkeitslehre

Eigenschaften der Teilerrelation im Pfeilbild, in der Relationenmatrix und in der Mengendarstellung, Vergleich der Ordnungsrelationen $R_{\leq}$ und $R_{|}$. Teilermengen als geordnete Mengen, Operatoren im Ordnungsbild, Ordnungsbilder in Q^+, Kürzen und Erweitern von Brüchen, Kehrbruch, Einbettung einer angeordneten Halbgruppe in eine angeordnete Gruppe, Teilerrelation in Q^+, Teiler- und Vielfachenmengen in Q^+, Potenzgesetze, 2-dimensional anordenbare Gruppen, linear anordenbare abelsche Gruppen.

HEITELE, D.: Wahrscheinlichkeit in der Grundschule

Für die Einführung der Wahrscheinlichkeits"rechnung" in der Grundschule sprechen die folgenden Gründe:

1. die lebenspraktische Relevanz;
2. Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind oftmals Verdichtungszonen des mathematischen Stoffes;
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint die einzige Möglichkeit einer frühen Bruchrecheninszenierung zu bieten;
4. Wahrscheinlichkeitsrechnung muß früh angefangen werden, um eine förderliche Intuition im Sinne Fischbeins zu entwickeln.

Zur Stützung der vier Thesen wird eine Diskussionsgrundlage in Form von mehr oder minder schon bekannten Aufgaben und Beispielen gegeben.

HOLLAND, G.: Die Strukturierung endlicher Mengen als Erkenntnisprozeß

Der Erkenntnisprozeß, der von einer endlichen Menge M zu einer strukturierten Menge $(M, \mathcal{R})$ führt, wird mit Hilfe informationstheoretischer Begriffe gedeutet. Ist $m = \text{card } M$ und s die Ordnung der Automorphismengruppe von $(M, \mathcal{R})$, so ist $\text{ld } m!/s$ ein geeignetes Maß für den Strukturierungsgrad des Gebildes. Dieser ist zugleich interpretierbar als die Entropie H desjenigen Versuches, der vom Strukturtyp des Gebildes als Vorwissen zum jeweiligen Gebilde führt. Die Redundanz $r = 1 - H/H_{max} = \text{ld } s \,/\, \text{ld } m!$ mißt die relative Symmetrie des Gebildes. Zieht man den allgemeineren Fall eines beliebigen statistischen Vorwissens über den Strukturtyp des Gebildes in Betracht, so mißt der Quotient aus dem Erwartungswert des Strukturierungsgrades und der Entropie desjenigen Versuches, der zur vollständigen Bestimmung des Gebildes führt, den Wirkungsgrad des Strukturierungsprozesses.

KIRSCH, A., <u>Eine moderne und einprägsame Fassung der kombinatorischen Grundaufgaben</u>

Statt "Abbildung von $\{1,\ldots,k\}$ in eine (feste) n-elementige Menge" sagen wir "k-n-Wort". In der Menge W der k-n-Wörter ist in natürlicher Weise eine Äquivalenzrelation "umstellgleich" gegeben; W zerfällt danach in "Umstellklassen".- Für den richtigen Umgang mit diesen Begriffen genügt das naiv vorhandene Vorverständnis.

Die Grundaufgaben der Kombinatorik lassen sich nun einheitlich als Anzahlbestimmungen für Wörter bzw. Umstellklassen auffassen: Die "Variationen" sind die sämtlichen k-n-Wörter; die "Permutationen" eines Wortes sind die zu diesem Wort umstellgleichen Wörter (die Wörter einer Umstellklasse); die "Kombinationen" sind die Umstellklassen. "Ohne Wiederholung" bedeutet jeweils, daß nur die injektiven Wörter (d.h. die Wörter mit lauter verschiedenen Buchstaben) in Betracht gezogen werden.

In dieser Darstellungsweise lassen sich nicht nur die Grundaufgaben der Kombinatorik einprägsam formulieren, sondern auch die zugehörigen Anzahlformeln auf naheliegendem Wege herleiten. Die betreffenden Überlegungen sind für den Fachmann ohne Mühe mathematisch präzisierbar.

LAUX, J.: <u>Ist eine "objektivere" Leistungsmessung im Mathematikunterricht möglich ?</u>

Von der professionellen Aufgabenanalyse bei Testkonstruktionen herkommend wird an einem konkreten Beispiel versucht, einige leicht zu handhabende Verfahren auf die Konstruktion von Klassenarbeiten zu übertragen.

Drei zentrale Gesichtspunkte werden erörtert:

1. Möglichkeiten zu einer operationalisierten Lernzielbestimmung;
2. Trennschärfe und
3. Schwierigkeitsgrad der einzelnen Aufgaben.

LIND, D.: <u>Größenbereiche und Dedekindsche Schnitte</u>

Sei $A(\mathfrak{G})$ die Menge aller Abschnitte eines Größenbereichs $(\mathfrak{G},+,<)$. Definiert man die Summe $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ zweier Abschnitte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \{a+b \,/\, a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$, so gelten folgende Sätze:

1. Ein Größenbereich $(\mathfrak{G},+,<)$ ist genau dann zu $(\mathbb{N},+,<)$ isomorph, wenn $A(\mathfrak{G}) = \emptyset$ gilt.
2. Ein Größenbereich $(\mathfrak{G},+,<)$ ist genau dann dicht geordnet, wenn $(A(\mathfrak{G}), \oplus)$ eine algebraische Struktur ist.
3. Ein Größenbereich $(\mathfrak{G},+,<)$ enthält genau dann ein erstes Element und ist nicht archimedisch geordnet, wenn $A(\mathfrak{G}) \neq \emptyset$ gilt und $(A(\mathfrak{G}), \oplus)$ keine algebraische Struktur ist.

Es folgt ein Ausblick auf stetig geordnete Größenbereiche.

NESTLE, F.: <u>Instrumente zur Leistungsmessung - ein Grundproblem des Mathematikunterrichts ?</u>

Der Vortrag beschäftigt sich mit der These, daß die Entwicklung von Instrumenten zur Leistungsmessung (Kontrollen, informelle und standardisierte Teste) eine wichtige, bisher fast zu sehr vernachlässigte Aufgabe der mathematischen Didaktik ist.
Es wird über zwei Versuche zu dieser These berichtet: Der erste Versuch zeigt in zwei Stufen, daß die einzige zur Zeit allgemein anerkannte Form der Überprüfung, die Klassenarbeit, eine Unsicherheit der Bewertung aufweist, die über das vertretbare Maß hinausgeht. Der zweite Versuch ergibt, daß durch die Existenz einer "objektiven" Prüfung Unterrichtsformen möglich werden, die vom klassischen "Unterricht" abweichen und sich in dem Versuch als effizient erwiesen haben.
Schließlich wird an Beispielen erörtert, daß die Einwände gegen Aufgabenstellungen mit eindeutig bestimmter Antwort (z.B. Auswahlantwort) fast durchweg irrationalen Vorurteilen entspringen.

SIEMON, H.: <u>Erfahrungen mit einer Problemaufgabe</u>

Es wird berichtet von der Schülerarbeit an der Aufgabe, ein Parallelogramm von einer Ecke aus durch zwei Transversalen in drei flächengleiche Teile zu zerlegen. Die Arbeit an den verschiedenen Lösungsvorschlägen entfacht eine Aktivität der Schüler, die zu Erfahrungen führt, welche eine Lösung des Problems möglich machen. Die Aufgabe ist vielfacher Verallgemeinerung fähig: Der Schnittpunkt der Transversalen wandert auf einer Seite oder befindet sich im Innern des Parallelogramms. Zur Lösung der jeweils vorliegenden Verallgemeinerung der Fragestellung wird systematisch Gebrauch von den Überlegungen der Grundaufgabe gemacht.

STEVER, H.: Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung der Sekundarstufe I

Aufgrund einer Analyse der Verwendung der bekannten Definitionen für die Wahrscheinlichkeit wird ein experimenteller Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt. Ausgangspunkt sind die relativen Häufigkeiten und ihre Eigenschaften. Die Wahrscheinlichkeit wird dann als Schätzwert für die stabilisierten relativen Häufigkeiten eingeführt. Damit sind endliche Wahrscheinlichkeitsfelder als Modelle einfacher zufallsabhängiger Versuche anzugeben und die wichtigsten Konstruktionsprinzipien für die Zusammensetzung von komplexen Modellen zu behandeln. Dieser Zugang legt weiterhin den Gebrauch der Monte-Carlo-Methoden nahe, um neben die Berechnung von Ereignissen die Simulation zu stellen. Auf diese Weise wird eine Umstrukturierung der Probleme in Anwendungsaufgaben erleichtert und so rezepthaften Lösungsversuchen vorgebeugt.

VOLLRATH, H.-J.: Charakterisierungen der Ganzteilfunktion

Es wird vorgeschlagen, in Klasse 8 des Gymnasiums $x \to [x]$ einzuführen und folgende Eigenschaften zu erarbeiten:
(1) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, (2) $f(x) \leq x$, (3) $f(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$,
(4) $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, (5) $f(f(x)) = f(x)$,
(6) $f(f(x)+f(y)) = f(x)+f(y)$, (7) $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$,
(8) $0 \leq x \Rightarrow 0 \leq f(x)$.
In der Oberstufe wird vorgeschlagen, $x \to [x]$ aus Eigenschaften zu charakterisieren. Geeignet sind die Systeme
$A_1 = \{(1),(2),(3),(4)\}$, $A_2 = \{(1),(2),(4),(5)\}$,
$A_3 = \{(2),(3),(4),(5)\}$, $A_4 = \{(2),(3),(4),(6)\}$,
$A_5 = \{(3),(6),(7),(8)\}$.
Der Unabhängigkeitsbeweis für die einzelnen Systeme kann mit elementaren Beispielen geführt werden, die man leicht im Achsenkreuz konstruieren kann.

WALTER, H.: Taxonomie von Lernzielen im Mathematikunterricht

Bemerkungen zur Taxonomie von Bloom im kognitiven Bereich (Bloom, Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. 1972) hinsichtlich des Mathematikunterrichts. Beschreibung der dem NLSMA-Projekt

(National Longitudinal Study of Mathematical Abilities) von SMSG zugrunde liegenden Taxonomie von Wilson.
Zur besseren Verständigung aller mit Mathematikunterricht befaßten Personen und für die Vergleichbarkeit von Lehrgängen wäre eine allgemein akzeptierte Taxonomie von mathematischen Lernzielen wünschenswert.

WALTHER, G.: Die Fast-Gruppierung der Kalküle

Die algebraische Handlungsstruktur, welche den Operationen mit geometrischen Figuren, algebraischen Termen und Gleichungen zugrunde liegt, besitzt die Merkmale der assoziativen teilweisen Verknüpfung, der Reversibilität und der Existenz identischer Operationen. Im Gegensatz zur Situation bei den PIAGETschen Gruppierungen läßt sich aus den o.g. Operationen zwar keine durch einen Verband beschreibbare Ordnung herleiten, aber auf der Basis der Operationen etabliert sich wenigstens eine Ordnung im intuitiven Sinne (im Gegensatz zu "Unordnung"). Man kann die obigen Beispiele daher mit Recht als "Fast-Gruppierungen" bezeichnen.
Kalküle (im Sinne LORENZENs) dienen auf enaktiver und ikonischer Repräsentationsstufe dazu, die Wurzeln für die o.g. symbolischen Operationen und einen naiven Beweis- und Widerlegungsbegriff zu legen. Diese Begriffe nimmt man gemäß dem Spiralprinzip bei der Umformung algebraischer Terme und Gleichungen unter dem Gesichtspunkt des Beweisens (Ableitens!) wieder auf.

WINTER, H.: Die Bedeutung von Diagrammen in mathematischen Lernprozessen

Diagramme sind sprachliche Mittel in geometrischer Form. Sie gehören zur Sprache, insofern sie reproduzierbar sind und auf etwas Bezeichnetes verweisen. Im Gegensatz zu "linguistischem" Sprachmaterial (i. S. Freudenthals) kann aus ihnen durch unmittelbare Decodierung Information gewonnen werden. Diagramme sind die Charaktere bei Leibniz. Die Befunde von Piaget und Bruner heben die Bedeutung von Diagrammen (bei Piaget "Symbole", bei Bruner "Ikone") in der kognitiven Entwicklung hervor. Man kann in Anlehnung an E. Mach zwei Arten unterscheiden: Nomogramme i.w.S. und "analoge" Diagramme.

In mathematischen Lernprozessen in der Schule bieten die Diagramme Hilfen beim Argumentieren, initiieren kreatives Verhalten, bieten Hilfen in Mathematisierungsprozessen und in Prozessen zur Ausdifferenzierung von geistigen Grundtechniken.

WITTMANN, E.: Zum Problem der Stofforganisation

Bei der Aufbereitung mathematischer Stoffe für den Unterricht kann man sich orientieren a) an der in der Mathematik üblichen axiomatischen Methode der Stofforganisation, b) der von Gagné vorgeschlagenen psychologischen Methode und c) der genetischen Methode (Klein, Wagenschein, Wittenberg, Toeplitz, Freudenthal, Krygowska, van Hiele, Piaget). Alle drei Methoden sind didaktisch relevant, was durch die Formulierung didaktischer Prinzipien expliziert werden kann: Prinzip der Strukturorientierung, genetisches Prinzip, Bedingungen des Lernens. Bei der Moderierung des komplementären Verhältnisses zwischen den beiden ersten Prinzipien spielt das von Bruner formulierte Spiralprinzip eine wesentliche Rolle.
Am Beispiel der Gleichungslehre wird das Ineinandergreifen der verschiedenen Methoden bei der Entwicklung von Lernsequenzen illustriert.

G. Becker (Wuppertal)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft