Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 / 01331

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 47/1972

Numerische, insbesondere approximationstheoretische Behandlung von Funktionalgleichungen

4.12. bis 8.12.1972

An der Tagung über Numerische, insbesondere approximationstheoretische Behandlung von Funktionalgleichungen, die unter der Leitung von R. Ansorge (Hamburg) und W. Törnig (Darmstadt) stand, nahmen Wissenschaftler aus 7 Ländern teil. In zahlreichen Vorträgen wurden verschiedene Methoden zur Behandlung von linearen und nichtlinearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Integro-Differentialgleichungen sowie allgemeine Funktionalgleichungen besprochen, wobei insbesondere den Konvergenzfragen und der Herleitung von Fehlerabschätzungen ein besonderes Gewicht zukam. Dabei wurden zum Teil Hilfsmittel der Approximationstheorie und verwandter Gebiete herangezogen. Es wurde ein sehr weitreichender Überblick über den derzeitigen Stand der Forschung auf diesem Gebiet vermittelt. Dabei wurde auch physikalischen Anwendungen ein weiterer Raum gewidmet.

Trotz der großen Zahl von Vorträgen blieb noch hinreichend Zeit für anspruchsvolle Diskussionen, die ohne Zweifel zum Teil neue Untersuchungen anregen werden sowie für den so

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

wichtigen Austausch von numerischen Erfahrungen. Die persönlichen Kontakte wurden durch die angenehme Atmosphäre des Instituts und durch seine Gastfreundschaft wiederum gefördert, für die der Instituts-Leitung und den Mitarbeitern im Institut herzlichst gedankt sei.

<u>Teilnehmer:</u>

Ade, H.	Mainz	Merten, K.	Darmstadt
Albrecht, J.	Clausthal	Meuer, H.W.	Jülich
Allgöwer, E.	USA, z.Zt. Zürich	Mittelmann, H.D.	Mainz
Ansorge, R.	Hamburg	Morris, J.L.	Dundee
Börsch-Supan, W.	Mainz	Mülthei, H.	Jülich
Bohl, E.	Münster	Natterer, F.	Hamburg
Burg, K.	Karlsruhe	Neunzert, H.	Aachen
Collatz, L.	Hamburg	Niethammer, W.	Mannheim
v.d. Craats, J.	Leiden	Opfer, G.	Hamburg
Engels, H.	Jülich	Ostermann, A.	Gießen
Esser, H.	Aachen	Pittnauer, F.	Dortmund
Fichera, G.	Rom	Rathscheck, V.	Hamburg
Finck von		Reimer, M.	Dortmund
Finckenstein, K.	Garching	Reinhardt, J.	Frankfurt
Frehse, J.	Heidelberg	Schaback, R.	Münster
Gekeler, E.	Mannheim	Schober, G.	USA, z.Zt. Zürich
Gentzsch, W.	Darmstadt	Schröder, J.	Köln
Gorenflo, R.	Aachen	Spijker, M.N.	Leiden
Gourlay, A.R.	Loughborough	Stummel, F.	Frankfurt
Hadeler, K.P.	Tübingen	Taubert, K.	Hamburg
Hass, R.	Hamburg	Thomée, V.	Göteborg
Henry, M.	Bozeman (USA)	Thompson, R.J.	Albuquerque, USA
Hertling, J.	Wien	Törnig, W.	Darmstadt
v.d.Houwen, P.J.	Amsterdam	Trottenberg, U.	Köln
Kolar, W.	Aachen	Werner, H.	Münster
Krabs, W.	Darmstadt	Witsch, K.	Köln
Martensen, E.	Karlsruhe	Zeller, K.	Tübingen
Meis, Th.	Jülich		

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

V o r t r a g s a u s z ü g e

ALLGÖWER, E.: An algorithm for approximating solutions of mildly nonlinear elliptic boundary value problems having several solutions

A recent fixed point algorithm which is a constructive form of the Brouwer fixed point theorem is applied to approximate solutions to $\Delta u = f(P,u,\nabla u)$ on D, $u(P) = 0$ for $P \in \partial D$ where D is a bounded simply connected region in R^2 with piecewise analytic boundary ∂D, and f is continuous and bounded on $\bar{D} \times R^3$.

ANSORGE, R. u. C. GEIGER: Fehlerabschätzungen bei Aufgaben mit schwach strukturierten Ausgangsdaten

Die Approximationstheorie spielt in der Numerischen Mathematik eine mehrfache Rolle: Sie dient zunächst vordergründig der einfacheren numerischen Berechnung komplizierter explizit gegebener Funktionen, in neuerer Zeit auch solcher Funktionen, die nur durch definierende Funktionalgleichungen gegeben sind. Daneben aber bewährt sie sich auch als methodisches Hilfsmittel, z.B. bei der Herleitung ableitungsfreier Schranken für die Fehler von (nicht der Approximationstheorie zuzurechnenden) Näherungsverfahren zur Lösung von Funktionalgleichungen oder zur Berechnung von Funktionalen, insonderheit dann, wenn die Ausgangsdaten (Anfangs- oder Randwerte, Integranden usw.) nicht den Regularitätsvoraussetzungen genügen, die bei der Konstruktion des Verfahrens oder der Herleitung klassischer Fehlerabschätzungen unterstellt wurden. Dieser Aspekt der Anwendung der Approximationstheorie wird in konstruktiver Weise unter Verwendung allgemeiner Jacksonsätze und Bernstein-Zamansky-Aussagen einheit-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

lich darstellt. Neben neuen Abschätzungen ergibt sich eine einheitliche Herleitung vieler älterer Ergebnisse, z.B. Peetre und Thomée (Anfangswertaufgaben), Wasow, Walsh and Young (Randwertaufgaben), Davis und Rabinowitz (Quadraturformeln) usw.

V. d. CRAATS, J.: Successive approximations for nonlinear two point boundary value problems

A new iterative method is constructed for the boundary value problem

$$y''(t) + f(t,y(t), y'(t)) = 0 \tag{1}$$

$$y(a) = A, \; y(b) = B. \tag{2}$$

We suppose that

$$f(t,y,z) \text{ is continuous on } [a,b] \times R^2 \tag{3}$$

and that f satisfies a Lipschitz condition of the form

$$|f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2)| \leq K(t)|y_1-y_2| + L(t)|z_1-z_2|. \tag{4}$$

Necessary and sufficient conditions on K(t) and L(t) are known under which all boundary value problems (1), (2), where f satisfies (3) and (4) have exactly one solution.

We shall show that the iterative method to be described is global convergent under these conditions.

ENGELS, H.: Spezielle Interpolationsquadraturen vom Gauß'schen Typ

Durch Integration eines allgemeinen, linearen, hermiteschen Interpolationsoperators erhält man entsprechende allgemeine Quadraturformeln. Dabei sollen Funktionswerte und erste Ab-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

leitungen in denselben Stützstellen Verwendung finden. Die erhaltenen Quadraturen erhalten die Bezeichnung vom Gauß'-schen Typ, wenn alle Gewichte der Ableitungen für jede beliebige Stützstellenzahl verschwinden. Es wird gezeigt, daß neben anderen das Wilf'sche Quadraturverfahren als Spezialfall einer solchen verallgemeinerten Interpolationsquadratur darstellbar ist, obwohl es von H.S. Wilf nach völlig anderen Gesichtspunkten konstruiert worden ist. Außerdem ergeben sich völlig neue Aspekte zur numerischen Bestimmung von Gewichten und Stützstellen der Wilf-Quadratur. Ein von Martensen angegebenes Quadraturverfahren zur Berechnung uneigentlicher Integrale ist ebenfalls als Sonderfall enthalten.

ESSER, H.: <u>Diskretisierung von Extremalproblemen</u>

Sei E ein linearer normierter Raum, $X \subset E$ und $f : E \longrightarrow R$ ein Funktional auf E. Gegeben sei die Aufgabe

$$(P) \quad \inf_{x \in X} f(x) = v(P), \; v(P) \text{ endlich.}$$

Um diese Aufgabe zu lösen, wird eine Folge von Näherungsaufgaben gebildet:

Sei $A(E, \prod_k E_k; R_k)$ eine diskrete Approximation von E im Sinne von Stummel. $X_k \subset E_k$ und $f_k : E_k \longrightarrow R$. Die Näherungsprobleme lauten

$$(P)_k \quad \inf_{x \in X_k} f_k(x) = v_k(P), \; v_k(P) \text{ endlich.}$$

Wann gilt $v_k \longrightarrow v$?

<u>Satz</u>:

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

(i) zu jedem $x \in X \;\exists\; \{x_k\}$, $x_k(x) \in X_k \Rightarrow x_k \xrightarrow{d} x$ (x_k konvergiert diskret gegen x)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

(ii) zu jeder Folge $\{x_k\}$, $x_k \in X_k$ $\exists$ $\{y_k\}$, $y_k(x_k) \in X$ $\ni$

$$\| R_k y_k - x_k \|_k \longrightarrow 0$$

(iii) Aus $\{x_k\} \in \prod X_k$, $x_k \xrightarrow{d} x \in X \Rightarrow f_k(x_k) \longrightarrow f(x)$

(iv) Für $\{x_k\}$, $\{y_k(x_k)\}$ aus (ii) gelte

$$| f_k(x_k) - f(y_k) | \longrightarrow 0$$

Dann gilt, falls v_k, v endlich $\lim_{k \to \infty} v_k = v$.

Dieser Satz wird angewendet auf die Diskretisierung eines Kontrollproblems.

FICHERA, G.: <u>Approximation and Estimates for Multiplicity of Eigenvalues</u>

The problem of approximating and estimating the (geometric) multiplicity of the eigenvalues of a class of positive compact operators in a complex Hilbert space is considered. The theory includes eigenvalues for self-adjoint boundary value problems of higher order elliptic operators in a bounded domain of R^n. The largest group of transformations of Hilbert spaces is determined under which the multiplicity problem is invariant. Invariants with respect to this group are constructed and, by using these invariants, sequences monotonically converging to the multiplicity are obtained. As a non-standard application it is shown how the Betti numbers of an orientable compact differentiable manifold can be computed.

FINCK V. FINCKENSTEIN, K.: <u>Differenzenmethoden zur Lösung nichtlinearer Diffusionsgleichungen</u>

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

In einem Rechteck $G = \{(r,t) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ wird die zylinder-symmetrische Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \varphi(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad \varphi(u) > 0,$$

versehen mit Anfangs- u. Randbedingungen, mittels einer Schar von Differenzenverfahren, die von einem Parameter ϑ $(0 \leq \vartheta \leq 1)$ abhängen, numerisch behandelt. Unter der Voraussetzung genügender Glattheit von $\varphi(u)$ sowie der in den Anfangs- u. Randbedingungen auftretenden Funktionen wird gezeigt:

Falls man $\Delta t \cdot (\Delta r)^{-2} \leq \dfrac{1}{2(1-\vartheta) \max\limits_{G} |\varphi(u(r,t))|}$ wählt, dann existieren positive Konstanten K, a, b, so daß für den Verfahrensfehler z_{ij} gilt:

$$\|z\|_{\infty} \leq K^{-1} \cdot (e^{KT}-1) \cdot (a \cdot \Delta r^2 + b \cdot \Delta t).$$

FREHSE, J.: Fehlerabschätzungen bei elliptischen Differenzengleichungen mit Hilfe von Morreyraummethoden

Es wird eine Methode angegeben, mit der man im Fall von 2 unabhängigen Variablen zeigen kann, daß der Fehler bei der Differenzenapproximation von linearen oder quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen sich bis zum Rand des Gebietes in der Maximumnorm wie $O(h)$ verhält. Hierbei wird nur die Elliptizität und die Regularität der Koeffizienten vorausgesetzt, insbesondere also nicht, daß der Differenzenoperator ein Mittelwertoperator ist.

GEKELER, E.: Zur Berechnung periodischer Lösungen bei parabolischen Randwertproblemen

Sei $G = \{x \in R, 0 < x < 1\}$. In dem parabolischen Randwertproblem

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$u_t = [a(x,t)u_x]_x + f(x,t,u,u_x),\ (x,t) \in G \times \{-\infty,\infty\}$$

$$u(0,t) = s^-(t),\ u(1,t) = s^+(t),\ -\infty < t < \infty,$$

seien a, f, s^-, s^+ in t periodisch mit der Periode τ. Zur Lösung dieser Aufgabe wird $G \times \{0,\tau\}$ in der üblichen Weise mit einem Gitter überdeckt und die Differentialgleichung an jedem Gitterpunkt durch eine Differenzennäherung ersetzt. Es wird die Stabilität des so gebildeten algebraischen Gleichungssystems untersucht. Dabei gelangt das Monotonieprinzip von Minty bzw. ein Ergebnis von Carasso-Parter zur Anwendung oder aber das diskrete Maximumprinzip, je nachdem ob u_t durch eine Differenzennäherung zweiter oder erster Ordnung ersetzt wird.

GORENFLO, R.: Über S. Gerschgorins Fehlerabschätzungsmethode für Differenzenverfahren

Von S. Gerschgorin (ZAMM 10 (1930), 373 - 382) stammt die oft verwendete Methode der Fehlermajorisierung für invers-isotone Diskretisierung elliptischer Randwertaufgaben zweiter Ordnung. Durch Formalisierung im Kontext halbgeordneter linearer Funktionenräume und "ausgeglichene" Schreibweise des Differenzenschemas gelingt es, diese Methode bequem anwendbar zu machen für Konvergenzbeweise bei invers-isotonen Diskretisierungen elliptischer und parabolischer Aufgaben. Sie liefert die richtige Konvergenzordnung des Differenzenverfahrens. Die getrennte Summenabschätzung der diskreten Green'schen Funktion in Differenzengitterteilmengen scheinbar oder wirklich unterschiedlicher Konsistenzordnung ist hierbei überflüssig.

HADELER, K.P.: Einige Anfangswertaufgaben mit biologischen Anwendungen

In verschiedenen Bereichen der Biologie treten Anfangswertaufgaben für Differential- und Differenzengleichungen mit

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

speziellen Eigenschaften auf. Als Beispiele werden die quadratischen Transformationen in der Populationsgenetik, die Hodgkin-Huxley-Gleichung in der Neurophysiologie, Differentialgleichungen für homogene Nervennetze und die Differenzendifferentialgleichungen der Epidemietheorie angeführt.

HENRY, S.: <u>Best Approximate Solutions to the initial value problem</u>

$$\ddot{x}(t) + f(t,x(g(t))) = 0,\ x(0) = c_0,\ x'(0) = c_1$$

Consider the initial value problem (*)

$$\ddot{X}(t) + a(t)\cdot X(g(t)) = h(t),\ X(0) = \alpha_0,\ X(0) = \alpha_1.$$

Suppose that $A = \max\limits_{[-T,T]} |a(t)|$, $G = \max\limits_{[-T,T]} |g(t)|$.

Then if $A \max(2G, G^2) < 2$, (*) has a unique solution

$y(t)$ on $I = [-T,T]$. Let $L(X,g) = \ddot{X}(t) + a(t)\ X(g(t))$.

Then

$$\sup \left| \sum_{i=2}^{n+1} c_i\ L(t^i,g) + \alpha_0\ L(1,g) + \alpha_1\ L(t,g) - h(t) \right|$$

is minimized for some $(c_2^*, \ldots, c_{n+1}^*)$, and if

$$P_{n+1}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + c_2^* t^2 + \ldots + c_{n+1}^* t^{n+1},$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \| P_{n+1}^{(j)}(t) - y_{(t)}^{(j)} \| = 0,\ j = 0,\ 1,\ 2.$$

If $\{L(t^2,g), \ldots, L(t^{n+1},g)\}$ forms a Chebyshev set, then the above best approximations are completely characterized by known properties of Chebyshev sets and may be computed by the second algorithm of Remes. Error analysis is considered, and examples of operators that yield Chebyshev sets are given.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

HERTLING, J.: Numerische Berechnung der Verzweigungspunkte bei Hammerstein-Gleichungen

Approximation der primären Verzweigungspunkte von Hammerstein-Gleichungen mit Hilfe von Variationsmethoden, Abschätzungen des Verfahrensfehlers unter Verwendung des Unterraumes der L-Splines.

V. d. HOUWEN, P.J.: One-step Methods with Adaptive Stability Functions for the Integration of Differential Equations

In this lecture single step formulas are given for the integration of first order differential equations. The integration formulas are of the Runge-Kutta-type using two stages. The Runge-Kutta parameters, however, are not scalar quantities, but functions of the Jacobian matrix of the system.

First to fourth order accurate methods are given with the property that the stability function (characteristic root) of the formula can be freely chosen, provided that the consistency conditions are not violated.

This property, to adapt the stability function to the problem under consideration, makes it possible to integrate parabolic, hyperbolic or stiff differential equations by choosing a suitable stability function.

MEUER, H.W.: Eine Variante des Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahrens

Zur numerischen Behandlung des Anfangswertproblems in beliebig vielen Ortsveränderlichen für Systeme linearer hyperbolischer Differentialgleichungen 1. Ordnung wird in Abhängigkeit eines reellen Parameters eine Schar von Differenzenverfahren 2. Ordnung untersucht. Als Spezialfall ist die von Richtmyer ange-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

gebene Version des Lax-Wendroff-Verfahrens enthalten. Es wird ein Kriterium angegeben, das die Konvergenz der Verfahren garantiert und für eine gewisse Klasse auch physikalisch interessanterProbleme sogar notwendig für die Konvergenz ist.

MITTELMANN, H.D.: Zur Diskretisierung gemischter Randwertprobleme gewisser nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen

Das Direchletproblem quasilinearer, elliptischer Differentialgleichungen, die Eulergleichung eines Variationsproblems sind, kann durch Diskretisierung des Variationsproblems gelöst werden. Stepleman gab 1969 Kriterien an, wann das entstehende diskrete Problem eine eindeutige Lösung besitzt und die Funktionalmatrix des nichtlinearen Gleichungssystems positiv definit ist. Man kann auf ähnliche Weise gemischte Randwertprobleme behandlen. Das Funktional ist

$$\int_R F(x,u,\nabla u)dg + \int_{C_1} G(x,u)ds = \min, \; u = f \text{ auf } C_2 = C - C_1 .$$

Erfüllt G_{uu} gewisse Bedingungen, so kann für eine ganze Klasse von Diskretisierungen gezeigt werden, daß das diskrete Problem eine eindeutige Lösung besitzt und die Funktionalmatrix positiv definit ist. In diesem Fall konvergiert etwa das SOR-Verfahren.

NEUNZERT, H.: Theorie der asymptotischen Verteilungen und die numerische Lösung von Integrodifferentialgleichungen

Begriffe und Sätze aus der Theorie der asymptotischen Verteilungen erweisen sich als geeignetes Hilfsmittel zur Untersuchung

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

numerischer Verfahren zur Lösung gewisser Integrodifferentialgleichungen. Diese Simulationsmethoden werden besonders beim Studium stoßfreier Plasmen, die durch die sog. Vasovgleichung beschrieben werden, verwandt. Indem man die Lösung solcher Gleichungen als asymptotische Verteilung geeignet zu konstruierender Punktfolgen auffaßt, gelingt die Mathematisierung dieser Verfahren und der Nachweis ihrer Konvergenz.

PITTNAUER, F.: Asymptotische Lösungen von Funktionalgleichungen

Wir beschäftigen uns mit der Lösung "asymptotischer Funktionalgleichungen" der Gestalt

$$(1) \qquad F[g(z-z_o),\ g(z)] \sim h \quad \text{für } z \longrightarrow z_o,\quad z \in D$$

mit in D holomorphen Funktionen F und g. Dabei sei D ein Gebiet, welches $z = 0$ als inneren, $z = z_o$ als Randpunkt besitzt.

Es wird ein Reduktionssatz angegeben, der besagt, daß jede in D holomorphe Funktion g mit $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$ eine Lösung von (1) ist, falls sie eine "asymptotische Selbstentwicklung"

$$(2) \qquad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot g^n(z-z_o) \quad \text{für } z \longrightarrow z_o,\quad z \in D$$

mit geeigneten Koeffizienten c_n besitzt.

Schließlich wird gezeigt, daß sich (2) mittels geeigneter Polynome näherungsweise erfüllen läßt.

REINHARDT, J.: Diskrete Konvergenz stetiger Abbildungen in metrischen Räumen

Im Rahmen der von F. Stummel eingeführten Theorie diskreter Limesräume läßt sich die diskrete Konvergenz von Folgen nicht

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

notwendig linearer Operatoren bzw. die diskrete Konvergenz der Inversen äquivalent durch Konsistenz zusammen mit Stabilität bzw. inverser Stabilität beschreiben.

In diesem Vortrag werden die allgemeinen Stabilitätsbegriffe durch gleichgradige Stetigkeit und Stabilitätsungleichungen charakterisiert und damit fundamentale Fehlerabschätzungen für die Konvergenz von Approximierenden und die näherungsweise Lösung approximierender Gleichungen gewonnen. Darüber hinaus ist im Falle diskret konvergenter Metriken der diskrete Limes einer Operatorfolge immer stetig, und die Konsistenz kann abgeschwächt werden. Eine wichtige Anwendung sind Ein- und Mehrschrittverfahren zur näherungsweisen Lösung von Anfangswertaufgaben, wobei die verschiedenen Konsistenz- und Stabilitätsbedingungen der Literatur mit Hilfe unserer Begriffsbildungen auf eine einheitliche Form gebracht werden können. Als Beispiel wird dies für Konvergenzsätze von R. Ansorge u. R. Hass sowie im linearen Fall auch für Sätze der Lax-Richtmyer-Theorie gezeigt.

SCHOBER, G.: <u>Estimates for Fredholm eigenvalues based on quasiconformal mapping</u>

The Direchlet problem of potential theory for a smoothly bounded domain can be reduced to solving a linear integral equation with a double layer kernel. In two dimensions the same integral equation arises in constructive methods for conformal mapping. In solving the integral equation by successive approximations, the speed of convergence depends on the smallest positive non-trivial Fredholm eigenvalue. Properties and estimates for this eigenvalue are given utilizing a connection with the theory of quasiconformal mapping.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

SCHRÖDER, J. u. U. TROTTENBERG: Reduktionsverfahren zur Lösung elliptischer Differenzengleichungen

Differenzenverfahren für die Poisson'sche Differentialgleichung führen auf umfangreiche lineare Gleichungssysteme von schlechter Kondition. Für den Spezialfall Direchlet'scher Randbedingungen bei bestimmten rechteckigen Grundgebieten im R^2 wird ein schnelles stabiles Verfahren zur Lösung der Differenzengleichungen mitgeteilt. Bei diesem Verfahren werden die Differenzengleichungen durch Multiplikation mit Differenzensternen auf ein reduziertes System zurückgeführt. Die Matrix dieses Systems hat Block-Dreiecksform. Dabei haben die quadratischen Matrizen in der Diagonalen eine stark überwiegende Hauptdiagonale, so daß die Teilsysteme etwa mit dem Einzelschritt-Verfahren gelöst werden können. Bei numerischen Beispielen erwies sich die Durchführung des Algorithmus mit dem vorliegenden Testprogramm als etwa so schnell und genau wie das Verfahren von Buneman und das von Hockney (s. etwa: G. Golub in: Symposium on the Theory of Numerical Analysis, Springer-Verlag 1971, S. 2 - 19). Die Methode läßt sich auch auf das Mehrstellenverfahren anwenden und gestattet weitere Verallgemeinerungen (z.B.: periodische Randbedingungen, höhere Raumdimension).

STUMMEL, F.: Discrete convergence of differentiable mappings

This lecture reviews a new theory of discrete approximations of differentiable mappings in normed spaces which is an adaptation and continuation of the author's general theory of discrete approximations of normed spaces and of discrete convergence of mappings in discrete limit spaces. As a result, for example, we are able to extend and to generalize methods of Aubin, Stetter, Vainikko and others. In particular, we

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

characterize the stability conditions which are necessary and sufficient for discrete convergence by corresponding stability conditions on the Fréchet-derivatives of the mappings or on the associated linearized problems. The following theorems establish the discrete convergence of equidifferentiable sequences of mappings, the solvability of the approximating equations, a-priori- and a-posteriori-error estimates and linear equations for the discretization errors of the approximants as well as for the principal error function. Then the class of discretely compact sequences of equidifferentiable mappings is studied. Here we prove a number of particularly farreaching theorems showing the existence and discrete convergence of approximants under very general conditions. Interesting applications of the theory are obtained, for example, by projection methods, quadrature-formula methods and difference approximations for differential and integral equations.

THOMÉE, V.: Convergence estimates for semi-discrete Galerkin methods for initial-value problems

Consider a correctly posed initial-value problem $\partial u/\partial t = a\,\partial^q u/\partial x^q$, $u(x,0) = v(x)$. Consider also the set $\mathcal{S}_h$ of splines of order μ based on a regular mesh with mesh-width h, and of at most polynomial growth. Let S_h be the operator which take appropriate continuous functions into $\mathcal{S}_h$ and such that $S_h v(jh) = v(jh)$ for $j \in Z$. Let $u_h(x,t) = G_h(t)v \in \mathcal{S}_h$ be the solution of the semi-discrete Galerkin equations defined by the differential equation and $\mathcal{S}_h$ and with $u_h(x,0) = S_h v$. It is shown that $G_h(t)$ allows a representation $G_h(t) = S_h\ F_h(t)$ where $F_h(t)$ is a finite difference solution operator. Here $F_h(t)$ is accurate of order $2\mu - q$ for q even, $2\mu - q + 1$ for q odd so that at the mesh-points an error estimate of this order holds whereas the global error is at best of order μ.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

THOMPSON, R.J.: Convergence of Difference Approximations for Functional Differential Equations

Finite difference approximations are considered for functional differential equations of the form

$$\frac{du}{dt} = Au + F(t,u) \quad t \geq 0$$

$$u(t) = \varphi(t) \quad -\tau \leq t \leq 0$$

Here F denotes a functional with the property that the value of F(t,u) depends on the values of the function u on the interval $[-\tau,t]$. (For example, F might be of the form

$$F(t,u) = \int_{-\tau}^{t} f(s,u(s))ds$$

where f is some specified function.) A is a linear operator which may be unbounded.

The equation is considered in the context of a Banach space. Under appropriate hypotheses on F and A an existence and uniqueness theorem is proved. Then it is shown how convergent difference approximations can be obtained if the functional F can be approximated in some reasonable way.

TÖRNIG, W.: Monotonie bei nichtlinearen Differenzengleichungen

Für allgemeine lineare Differenzenoperatoren hat P.C. Ciarlet 1969 notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein diskretes Maximum-Prinzip gilt. Die Aussagen lassen sich auf nichtlineare Differenzengleichungen übertragen. Es werden konkrete Diskretisierungen des Dirichletproblems solcher quasilinearer Differentialgleichungen betrachtet, die Eulersche Gleichungen eines Variationsproblems der Form

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

$$\int_G f((\text{grad } u)^T C(x) \text{ grad } u) dg = \min$$

sind, wobei $f'(t) > 0$, $t \in [0,\infty)$ gilt und $C(x)$ symmetrisch und positiv definit ist. Hinreichend dafür, daß diese einem diskreten Randmaximumprinzip genügen, ist, daß sie vom "diagonaldominantenTyp" (D-Typ) sind. Für $n = 2$ werden zwei Diskretisierungen dieser Art angegeben, die stets in jeder Differenzengleichung nur maximal 9 benachbarte Gitterpunkte benötigen. Beide Diskretisierungen sind extrem einfach und erfordern keine zusätzlichen Voraussetzungen.

LOCHER, F. u. K. ZELLER: <u>MCC-Verfahren</u>

Bei der Lösung von Funktionalgleichungen kann man Reihenentwicklungen nach Cebysev-Polynomen (1. bzw. 2. Art: C- bzw. L-Approximation) ansetzen. Benützt wurde dies vor allem bei einfachen Differentialgleichungen: Clenshaw-Curtis 1960 (CC) bzw. Filippi 1964, 1970 (Modifikation MCC); hierüber gibt es viele weitere Untersuchungen: Lanczos 1956 (und Vorläufer), ..., Gentleman, Salzer, Schmidt 1972. Der grundsätzliche Unterschied zwischen CC und MCC läßt sich durch drei Reihenglieder beschreiben; zu berücksichtigen ist aber auch der (u.U. kompensierende) Einfluß der Koeffizienten-Abweichungen. Darauf basieren eingehendere Erörterungen der Verfahren: Pro und Kontra (zahlreiche Argumente); Kombination von CC mit MCC (Ausgleich); problemorientierte Anpassung der Koeffizienten-Numerik (beliebig viele Möglichkeiten); Ausbau von Theorie und Anwendung.

V. Rathscheck, Hamburg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft