MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 48/1972

(letzter Bericht 1972)

Mathematikunterricht in der neugestalteten Oberstufe

10.12. bis 16.12.1972

Die Tagung stand unter Leitung von W. Bos und R. Fritsch (Konstanz). Bei den auf der Tagung gehaltenen Vorträgen zeichneten sich zwei Schwerpunkte ab:

1. Vorträge über mathematische und mathematisch-didaktische Themen,
2. Referate über den Stand der Planungen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts in der neugestalteten Oberstufe.

Außerhalb der Vorträge trafen sich die Teilnehmer zu gezielter gegenseitiger Information an Hand eines Fragenkatalogs. Dabei wurde deutlich, daß die Planungen in den einzelnen Bundesländern bisher unterschiedlich weit vorangetrieben worden sind und sich divergierende Entwicklungen abzeichnen. Die Schlußdiskussion brachte folgendes Ergebnis:

Die im Dezember 1972 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach versammelten Mitglieder von Kommissionen für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II fast aller Bundesländer - Bremen und Rheinland-Pfalz waren auf der Tagung nicht vertreten - stellen einstimmig folgendes fest:

> Um eine gemeinsame Grundausbildung nach 1. Abs. 2 der KMK-Vereinbarung vom 7.7.1972 mit den dort unter 4.4. genannten Zielen zu gewährleisten, ist für jeden Schüler

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

für das Fach Mathematik die Teilnahme an m i n d e s t e n s v i e r Grundkursen im vollentwickelten Kurssystem erforderlich. Dabei kommt den Gebieten Analysis, Lineare Algebra und Stochastik zentrale Bedeutung zu.

Ferner wurde in folgenden Punkten Übereinstimmung erzielt:

Schüler mit Leistungsfach Mathematik müssen von den vier verbindlichen Kursen mindestens je einen Leistungskurs in Analysis und in Linearer Algebra belegen. Außerdem wird die Beschäftigung mit Fragen der Stochastik im Rahmen eines weiteren Kurses dringend empfohlen.

Schüler, die Mathematik als Prüfungsfach, aber nicht als Leistungsfach wählen, müssen von den vier verbindlichen Kursen mindestens je einen Grundkurs in Analysis und in Linearer Algebra belegen. Die Beschäftigung mit Fragen der Stochastik im Rahmen eines weiteren Kurses wird dringend empfohlen.

Kurse aus einem Vorsemester können i.a. nicht angerechnet werden. Ausnahmen sind nur bei einer vorzeitigen Zulassung zur Reifeprüfung möglich, sofern der betreffende Kurs mindestens mit der Note "gut" abgeschlossen wurde.

Schüler, die im vollentwickelten Kurssystem in Mathematik nur zwei Grundkurse belegen, können eine Grundausbildung im obigen Sinne nicht erhalten.

Teilnehmer

Arzt, K.	Tübingen
Barth, F.	München
Baumgartner	Düsseldorf
Böddeker, W.	Recklinghausen
Bos, W.	Konstanz
Bost, G.	Saarbrücken
Botsch, O.	Heidelberg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Cukrowicz, J.	Hamburg
Dücker, H.	Frankfurt
Dzewas, J.	Hamburg
Fillbrunn, G.	Ladenburg
Fladt, K.	Calw
Fritsch, R.	Konstanz
Giedinghagen, F.W.	Lüdenscheid
Glaser, H.	Schweinfurt
Grunert, J.	Bonn - Bad-Godesberg
Hänke, W.	Meppen
Hillmann, D.	Recklinghausen
Jäschke, K.-H.	Kiel
Kamps, K.H.	Konstanz
Kittler, H.	Hannover
Klingen, L.	Bonn
Knabe, H.	Berlin
Koch, A.	Berlin
Kratz, J.	München
Kunle, H.	Karlsruhe
Lamprecht, E.	Saarbrücken
Laub, J.	Wien
Meyer, K.	München
Pahl, P.	Heidelberg
Postel, H.	Kassel
Prade, H.	Freiburg
Reinhardt, R.	Berlin
Rixecker, H.	Saarbrücken
Rösch, B.	Leverkusen
Schneider, G.	Eschwege
Scholz, W.	Kiel
Schwarz, F.	Saarbrücken
Sielaff, K.	Hamburg
Tischel, G.	Hamburg
Winkelmann, B.	Bayreuth
Wolgast, H.	Lübeck
Wuttke, H.	Essen
Zeitler, H.	Tirschenreuth

Vortragsauszüge

W. Bos: Multiplikation im $\mathbb{R}^n$

Der Satz von Hurwitz, ein elementarer Beweis; s. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 73 (1971) 53 - 59.

G. Bost: Auswertung der Mathematikklausuren im Schulversuch "Oberstufe Saar".

Im Schulversuch "Oberstufe Saar" werden die sehr differenzierten Korrekturen der Mathematikklausuren auf Lochkarten übertragen. Wegen der Zentralität der Prüfungen und der relativ großen Schülerzahl (ca. 400) ist eine statistische Analyse der Ergebnisse möglich. Im wesentlichen wurde und wird in Zukunft untersucht;

a) inwieweit die in den Aufgaben repräsentierten Lernziele erreicht wurden,
b) inwieweit Klausuren zuverlässig (im testtheoretischen Sinne) messen,
c) in welchen Lernzielbereichen sich verschiedene Gruppen im Ergebnis unterscheiden (z.B. Schulen, Kurse, Mädchen-Jungen, "gute" Schüler - "schlechte" Schüler, Grundkursschüler - Studienkursschüler).

Fernziel ist, aus der statistischen Analyse der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Aufgaben Hinweise zu erhalten auf die mathematischen Fähigkeiten, die den Ergebnissen zugrunde liegen.

O. Botsch: Aufbau der Mittelstufen-Geometrie auf der Spiegelung.

Einführung der Achsenspiegelung in folgenden Stufen:

1. Dem Parallelenaxiom tritt ein fast gleichlautendes Orthogonalenaxiom zur Seite: "Durch jeden Punkt der Ebene gibt es genau eine Orthogonale zu einer gegebenen Geraden." (Die Orthogonalität ist ein zwar anschaulich belegter, aber nicht zu definierender Grundbegriff.)

2. Die "Axialstreckung" ξ aus einem Punktepaar $Q,Q' = \xi(Q)$ und einer Achse $\perp QQ'$ wird definiert. Ihre Kollinearität beruht auf dem Axiom "affiner Desargues".

3. Die "Achsenspiegelung" σ ist definiert als die involutorische Axialstreckung ξ. Hieraus ergibt sich konstruktiv die Abbildung σ bei gegebener Achse oder gegebenem Paar $Q, \sigma(Q)$.

4. Die Kongruenz von Strecken, Winkeln, Figuren wird definiert aus σ_a oder Produkten $\gamma = \sigma_a \sigma_b \cdots$

H. Dücker: <u>Begründung für die von der hessischen Fachgruppe vorgesehene Auswahl der Kursthemen.</u>

Die hessische Fachgruppe hat den Auftrag, für die Stufe 12/13 vier voneinander unabhängige Grundkurse und 4 Leistungskurse im Pflichtbereich zu entwerfen. Die Entwürfe sollen keine Stoffkataloge sein, sondern Qualifikationen und Lernziele beschreiben, die für alle Schüler verbindlich sind. Bei der Themenauswahl sind folgende Gesichtspunkte beachtet worden:

1. Die Erwartungen und Anforderungen der Abnehmer (insbesondere der Hochschulen).
2. Die innermathematische Nützlichkeit (Verständnis für die mathematische Verfahrens- und Erkenntnisweise).
3. Die Voraussetzungen für die Verwirklichung der Pläne (Ausbildungs- und Kenntnisstand der zur Verfügung stehenden Lehrer, die Lehrbücher).
4. Die Motivation der Schüler in der derzeitigen Situation der Schule.

Unter Abwägung dieser Gesichtspunkte schlägt die Fachgruppe folgende Themen sowohl für Grundkurse als auch für Leistungskurse vor:

Analysis; Lineare Algebra; Boolesche Algebra; Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

G. Fillbrunn: <u>Aufgaben zur Linearen Algebra der Klassen 11-13</u>

Besprechung von Aufgabenvorschlägen zur Linearen Algebra der Klassen 11-13 der Gymnasien Baden-Württembergs. Wesentliche Inhalte dieser Aufgaben sind Fragen zur linearen Unabhängigkeit, Basis und Dimension, sowie zum Skalarprodukt und zur linearen Abbildung.

H. Glaser: Verschiedene Wege vom Vektorraum zum affinen Punktraum.

1. Weg: Die Elemente eines Vektorraumes $\mathfrak{V}$ werden durch drei Axiome mit den Elementen einer Menge $\mathfrak{A}$, genannt affiner Raum, in Verbindung gebracht. Die Bijektion φ: $P \longmapsto \overrightarrow{OP}$ bildet den affinen Raum $\mathfrak{A}$ auf den Vektorraum $\mathfrak{V}$ ab. Die Geraden sind Punktmengen der Form $g = \{X \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{u},\ \vec{u} \in \mathfrak{V}\}$. Der Vektorraum $\mathfrak{V}$ kann selbst als affiner Raum betrachtet werden.

Bei der Darstellung der Affinitäten müßte zwischen den auf die Punkte und den auf die Vektoren wirkenden Abbildungen unterschieden werden, so daß besonders an dieser Stelle die Unterscheidung zwischen Punkten und Vektoren lästig wird.

2. Weg: Der Vektorraum $\mathfrak{V}$ wird von Anfang an als affiner Raum aufgefaßt. Die Elemente aus $\mathfrak{V}$ sind die Punkte; die Geraden sind die Nebenklassen der eindimensionalen Unterräume. Die Axiome einer affinen Ebene sind bequem nachweisbar.

Bei der Einführung der Metrik sollte man vom Betrag eines Vektors sprechen. Bei der Darstellung der Affinitäten ergibt sich eine besonders einfache Sprache. Der zweite Weg wird für die Schule empfohlen.

J. Grunert: Eingangskurs in der Klasse 11

1.) Kurze Schilderung des Curriculums und seiner Intentionen,
2.) Bericht über die bisher gemachten Erfahrungen,
3.) Kritische Diskussion des Curriculums.

K.-H. Jäschke: Zu den vorläufigen Richtlinien für den Mathematikunterricht in der Studienstufe in Schleswig-Holstein

Die vorgestellten Richtlinien sind von einer ad hoc gebildeten Kommission aus sechs Mathematiklehrern, die bereits selber Unterrichtserfahrungen auf neueren Gebieten gesammelt haben, in sieben, größtenteils ganztägigen Sitzungen und häuslicher

Einzelarbeit erstellt worden. Die Kursthemen sind so gewählt, daß dem Schüler je nach Erfahrung, Neigung und Kenntnisstand der zur Verfügung stehenden Fachlehrer vorwiegend traditionelle Lehrstoffe oder auch neu in den Unterricht eindringende Gebiete angeboten werden können. Um eine gewisse Einheitlichkeit zu sichern und die traditionellen, für viele andere Wissenschaften als Hilfsmittel erforderlichen Gebiete gebührend zu berücksichtigen, sind je ein Kurs über Analysis und Analytische Geometrie verbindlich gemacht worden.

Für jeden der vorgeschlagenen 16 Kurse sind die Lerninhalte, bei den neueren Themen zusätzlich eine grobe Lernzielskizze und einige Literaturhinweise angegeben worden. Ein Abdruck der Richtlinien (leider ohne Literaturhinweise) wird in einem der nächsten Hefte des Zentralblattes für Didaktik der Mathematik erfolgen.

K.H. Kamps: <u>Das Königsberger Brückenproblem (Topologische Aspekte eines Mathematikunterrichts in der Oberstufe)</u>

Vom klassischen Beispiel des Königsberger Brückenproblems ausgehend wird gezeigt, daß eine Behandlung von Themen aus der Theorie der Netze (Graphentheorie) in der Oberstufe aus verschiedenen Gründen sinnvoll sein kann. Zum einen wird ein mathematischer Rahmen geschaffen, in dem geometrische Begriffe, die in der Grundschule und den anschließenden Klassen intuitiv erfaßt worden sind, exakt formuliert und geometrische Erfahrungstatsachen exakt bewiesen werden können. Ferner ergeben sich Querverbindungen zur Theorie der Vektorräume und Matrizen, einem Gebiet, das immer stärker in den Oberstufenunterricht eindringt. Nicht zuletzt aber hat die Theorie der Netze etwa in der Anwendung auf Optimierungsfragen wie kaum ein anderes Teilgebiet der Mathematik unmittelbaren Praxisbezug und führt in die Arbeitsweise der angewandten Mathematik ein.

H. Kittler: <u>Die Situation des Mathematikunterrichts in Niedersachsen</u>

1. Erläuterungen zu den in Niedersachsen erschienenen Handreichungen bezüglich des Faches Mathematik; weitere Arbeit nach Erscheinen der Handreichungen.

2. Planungen in Niedersachsen über die Interpretation und Ausfüllung des KMK-Papiers.
3. Folgerungen von 2. bezüglich des Faches Mathematik.

L. Klingen: Der didaktische Wert des Einsatzes von Tischcomputern im Mathematikunterricht.

Die curricularen Empfehlungen Nordrhein-Westfalens bringen für Leistungs- und Grundkurse der reformierten Oberstufe einen Katalog von Algorithmen, die für Mikrocomputer geeignet sind. Ausgehend von Mitteilungen über das Ergebnis von Abnehmerbefragungen und basierend auf Ersterfahrungen mit einer solchen Anlage werden

a) einige Unterrichtsthemen im Detail dargestellt,
b) Begründungen für den didaktischen Wert solcher Lehrgänge geboten und
c) Organisationsmöglichkeiten für quasi simultanen Einsatz eines Rechners in einem Kurs genannt.

A. Koch: Ein Grundkurs in der Sekundarstufe II

Gründe für die Behandlung logischer Fragen im Unterricht und für eine Kurs Logik. Ziele des Kurses im Blick auf die Schüler, die Lehrer und die Schule.

A.) Aufbau des Kurses:
1. Analyse logischer Rätsel, um die Aufmerksamkeit auf die logischen Sprachbestandteile zu richten und sie zugleich ohne zu starken ablenkenden Kontext betrachten zu können. Dabei werden die aussagenlogischen Verknüpfungen und ihre Negationen geklärt.
2. Symbolische Darstellung der aussagenlogischen Verknüpfungen.
3. Quantoren
4. Anwendung: Indirekter Beweis, die vollständige Induktion.

B.) Lernziele des Kurses.

C.) Ergänzungen:

1. Falls der Strukturbegriff geklärt, Bedeutung formalen Schließens.
2. Schlußregeln. Die Rolle eines Widerspruchs in einem Satzsystem.

J. Kratz: <u>Leitziele und Inhalte des Mathematikunterrichts im Rahmen des bayerischen Kollegstufenmodells.</u>

Der Vortrag will am Beispiel der Curriculumentwicklung zum Mathematikunterricht der Kollegstufe in Bayern einige grundsätzliche Fragen erörtern, die sich für den Mathematikunterricht in der neugestalteten Oberstufe stellen. Dabei sollen vor allem die didaktischen Leitlinien, von denen her die Auswahl der Lerninhalte ihre Rechtfertigung bezieht, dargestellt werden.

Der Vortrag gliedert sich in folgende Teile:

1. Richtziele des Mathematikunterrichts in der Kollegstufe,
2. Leitthemen des Mathematikunterrichts in der Kollegstufe,
3. Beispiele für die Realisierung der Leitthemen im Stoffplan,
4. Hinweise zur Entwicklung "Curricularer Lehrpläne" in der Mathematik.

R. Reinhardt: <u>Mathematikunterricht in der neugestalteten Oberstufe in Berlin.</u>

1. Allgemeine Grundsätze für die Neugestaltung der Oberstufe: Nach einer Einführungsphase (bis 1976 zwei bis drei Monate, später ein Semester) folgt ein Kurssystem von vier Semestern. Curriculares Grundprinzip: Kurse müssen vom Schüler wählbar sein unabhängig vom jeweils besuchten Schuljahr (z.B. Schüler des 11. und des 12. Schuljahres gemeinsam im gleichen Kurs).
2. Einführungsphase: Wiederholung und Vertiefung des Mittelstufenstoffes; propädeutische Vorübungen zur Analysis (Idee der Approximation).

3. Kurssystem: Es wird eine Tabelle der vom Schüler wählbaren Kurse angegeben, mit besonderem Hinweis auf verbindliche Kurse und Kurse mit neuem Inhalt (z.B. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Arbeit mit Computer). Im Rahmen der Begründungen erfolgt das Zustandekommen von Kursen nach dem Prinzip von Angebot (Lehre) und Nachfrage (Schülerinteresse).
4. Kurze Hinweise auf inhaltliche Besonderheiten und Lernziele.

H. Rixecker: <u>Zusammenarbeit zwischen Gymnasium und Universität bei der Neugestaltung des Mathematikunterrichts in der Oberstufe</u>.

Der Vortrag schildert die Zusammenarbeit zwischen Gymnasium und Universität im Schulversuch "Oberstufe Saar" und gibt zum Schluß einige allgemeine Bemerkungen über eine solche Zusammenarbeit.

Der Schulversuch hat zwei Ziele, die Verbesserung der Studierfähigkeit und die Erhöhung der Aussagekraft von Reifezeugnissen.

Durch eine straffe Stoffeinteilung und zentrale Klausuren in den wichtigsten Grundkursen und in den Studienkursen soll den Zielen nähergerückt werden.

Die Erstellung der curricularen Stoffpläne, die Festlegung der Klausuren und ihre Auswertung werden von Gremien veranlaßt, in denen Vertreter der Universität und der Versuchsschulen zusammenwirken. Die Noten im Fach Mathematik werden nach anonymen fraktionierten Korrekturen vom Computer der Universität errechnet.

Bei der Neugestaltung der Oberstufe erscheint eine Zusammenarbeit mit der Universität dringend notwendig.

G. Schneider: <u>Die Erwägungen der Fachgruppe Mathematik, Sekundarstufe II, in Hessen zur Rolle des Mathematikunterrichts in Klasse 11 als Grundlage für das Kurssystem (Kompensation, Erweiterung der Grundlagen und Orientierung)</u>

Der <u>Auftrag</u> an die Fachgruppe.

Notwendigkeit der Anpassung des Auftrags an die Bedürfnisse der Mathematik.

<u>Grundkurs</u> für 11/1: Wiederholung und Präzisierung von Themen der Sekundarstufe I in z.T. neuen Zusammenhängen. Angabe der Themen, zu denen der Kurs Lernziele enthält.

<u>Grundkurs</u> Differentialrechnung für Klasse 11/2 oder als erster Kurs im Kurssystem 12/13: Einerseits für viele Schüler einzige Gelegenheit, die Methoden der Analysis kennenzulernen, andererseits Grundlage für alle weiteren Analysiskurse.

<u>Orientierungskurse:</u> Ausbau der Grundkurse durch 2-3 Zusatzstunden zur Orientierungskursen. Beispiel aus dem Entwurf zum Lernzielkatalog.

G. Tischel: <u>Hinführung zur Analysis. Ein Unterrichtsmodell für die Klassenstufe 11 der neugestalteten gymnasialen Oberstufe.</u>

Auch in der neugestalteten Oberstufe sollte jedem Schüler eine mathematische Grundausbildung mit allgemein verbindlichen Inhalten vermittelt werden. Für diese Grundausbildung, die im Vorsemester und in den ersten beiden Halbjahren erfolgen muß, werden in Hamburg die Gebiete Analysis und Lineare Algebra vorgeschrieben.

Im Vorsemester, das nur ein halbes Jahr dauert, soll die Behandlung der Analysis einsetzen. Der Unterrichtsstoff wird in drei Abschnitte unterteilt: Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit. Für jeden Abschnitt stehen ca. 16 Stunden zur Verfügung. Eine genaue Stoffverteilung, die einen möglichen Unterrichtsgang skizziert, wird angegeben.

Die allgemeinen Ziele des Vorsemesters sind mit diesem Unterrichtsgang weitgehend verträglich.

Die Kürze des Vorsemesters zwingt zu ganz bestimmten didaktischen Ansätzen.

B. Winkelmann: <u>Elementare Homomorphismen zwischen Booleschen Algebren</u>.

Die Boolesche Algebra spielt heute eine wichtige Rolle in der Reform der gymnasialen Oberstufe, obwohl eine eingehende didaktische Analyse dieses Stoffgebietes noch aussteht. Eine solche Analyse muß insbesondere die mathematische und didaktische Bedeutung des Homomorphiebegriffes herausarbeiten. Dabei heißt eine Abbildung zwischen Booleschen Algebren ein Homomorphismus(von B.A.), wenn sie ein Verbandshomomorphismus und mit den Komplementbildungen vertauschbar ist. Während der Begriff der Isomorphie im wesentlichen nur Vergleiche zwischen Modellen aus verschiedenen Modellklassen (Mengenalgebra, Ereignisalgebren und die Algebra der Aussagenlogik und Schaltalgebra) zuläßt, gestattet der umfassendere Homomorphiebegriff auch eine natürliche Strukturierung innerhalb der einzelnen Modellklassen. Das dient der vertieften Einsicht in die Modelle, macht den Vorgang des Mathematisierens bewußter und liefert die Ausgangsbasis für die Betrachtung weiterer algebraischer Konstruktionen: Unter- und Quotientenobjekte, direkte Summen, direkte Produkte, Unabhängigkeits-, Freiheits- und Erzeugungsfragen.

H. Wolgast: <u>Die Behandlung von Iterationsverfahren mit einem Kleincomputer</u>.

Ein Kleincomputer gibt Gelegenheit, das numerische Verhalten der Konvergenz von Iterationsverfahren in $\mathbb{R}$ im Vorfeld der Definition und Sätze empirisch zu untersuchen. Als numerisches Beispiel wird die Iteration $x_{n+1} = \pi + a.\sin x_n$ gewählt, denn diese Funktionenschar gestattet es, nur durch Veränderung des Parameters a verschiedenes Konvergenzverhalten zu demonstrieren.

Daraus ergeben sich Arbeitshypothesen, die über eine graphische Veranschaulichung zur Formulierung von Konvergenzkriterien als Spezialfall des Fixpunktsatzes für Banach-Räume führen. Eine Definition der Konvergenzgeschwindigkeit, mehrere Fehlerabschätzungen schließen das Thema ab.

Als Kleincomputer wird das Modell 9820 der Firma Hewlett-Packard verwendet, das mit seiner fast-problemorientierten Programmiersprache gut für Leistungskurse "Numerische Mathematik" in einer Studienstufe geeignet erscheint. Die zum Referat verwendeten Programme werden hergeleitet.

H. Zeitler: Moderne Mathematik am Tetraeder

Zunächst wird das reguläre Tetraeder mit seinen 15 Punkten, 35 Strecken, Kreisen und Ellipsen als Steiner-Tripel-System und dann als dreidimensionaler projektiver Raum gedeutet. Über Ovoide in diesem Modell kommt man zu endlichen Möbius-Ebenen. Schließlich wird - wieder vom Tetraeder ausgehend - ein algebraisches Verknüpfungsgebilde entwickelt. Das Referat endet mit der Verwendung des Tetraeders als Modell für Koalitionsbildungen bei Abstimmungen.

K.H. Kamps (Konstanz)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft