MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 26/1973

Rieszsche Räume

24. 6. – 3o. 6. 1973

Die Arbeitstagung über Rieszsche Räume stand unter der Leitung der Professoren W. A. J. Luxemburg und H. H. Schaefer.

Teilnehmer

Ando, T., Sapporo
Becker, Paris
Bernau, S. J., Austin
van Casteren, J. A. W., Wilrijk
Dankert, Gabriele, z. Z. Erlangen
Dodds, P. G., Bedford Park
Ellis, A., Swansea
Findley, D. F., z. Z. Cambridge
Fremlin, D. H., Colchester
Fuchssteiner, B., Darmstadt
Goullet de Rugy, A., Paris
Hackenbroch, W., Saarbrücken
Huijsmans, C. B., Leiden
Ionescu Tulcea, A., Evanston
König, H., Saarbrücken
Kühn, B., Dortmund
Lessner, L., Teheran
Luxemburg, W. A. J., Pasadena
Meyer-Nieberg, P., Saarbrücken
Moore, L. C., Durham
Nagel, R., Tübingen
Portenier, C., Erlangen
Rall, C., Tübingen
Rogosinski, H. P., Swansea
Schaefer, H. H., Tübingen
Scheffold, E., Bochum
Wittstock, G., Saarbrücken
Wolff, M., Dortmund
Zaanen, A. C., Leiden

Vortragsauszüge

T. ANDO: A non-empty intersection theorem for convex sets and its applications.

Let E be a Banach space with unit ball U. It is canonically embedded into the second dual E^{**}. Given a closed convex set S, its $\sigma(E^{**}, E^{*})$-closure is denoted by $S^{\sim}$.

Intersection principle. Let S_1 and S_2 be closed convex subsets with $S_1^{\sim} \cap S_2^{\sim} \neq \emptyset$. If there are constants $0 \leq \alpha, \beta < \infty$ and $0 \leq \gamma < 1$ such that for any $\varepsilon > 0$

$$S_1 \cap (S_2 + \varepsilon U) \subseteq \alpha \varepsilon U^{\sim} + (1 + \beta\varepsilon) \{S_1^{\sim} \cap (S_2^{\sim} + \gamma \varepsilon U^{\sim})\}$$

then $S_1 \cap S_2$ is non-empty.

This principle can be seen as an abstract formulation of the so-called $\frac{1}{2^n}$ -technique. Applications to various problems, especially to problems concerning quotient spaces of an ordered Banach space, are given. One of the simplest applications is:

Let E be a real Banach space with a generating normal cone. Suppose that M is a closed subspace whose annihilator is the range of a projection P such that $f \geq Pf \geq 0$ for every positive linear functional f. Then the image of the cone under the quotient map to $E_{|M}$ is closed.

S.J. BERNAU: Contractive projections and Korovkin theorems for L_p.

Let (X, Σ, μ) be an arbitrary measure space and suppose $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$. An exchange subspace of $L_p(\mu)$ is a subspace M such that if $x, y \in M$, $|x| \operatorname{sgn} y \in M$. A vector sublattice of M is a subspace such that if $x \in M$, $(\operatorname{Re} x)^{+} \in M$.

Theorem 1: For a subspace M of $L_p(\mu)$ the following are equivalent:

(1) M is the range of a contractive projection on $L_p(\mu)$.

(2) M is a closed exchange subspace of $L_p(\mu)$.

(3) M is isometrically isomorphic to some $L_p(Y, \mathcal{B}, \lambda)$.

(4) M is isometrically isomorphic, by a direct sum of unitary multiplications, to a closed vector sublattice of $L_p(\mu)$.

These equivalences extend works of Grothendieck (Canadian 5 Math. 1955), Douglas (Pacific J. Math. 1965), Ando (Pacific J. Math. 1966), Tzafriri (Israel J. Math. 1969) and unify the proofs. They are due jointly to Lacey and Bernau (except 2 which is Bernau's alone).

Similar methods lead to Korovkin theorems for contractions on $L_p(\mu)$. Assume $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

Theorem 2: Let (T_n) be a net of linear contractions on $L_p(\mu)$ and let $M = \{x \in L_p(\mu): T_n x \to x\}$; then M is a closed exchange subspace of L_p.

Theorem 3: Suppose $S \subseteq L_p$ and let $\mathcal{S}(S)$ be the set of x in $L_p(\mu)$ such that $T_n x \to x$ for every net (T_n) of contractions on $L_p(\mu)$ such that $T_n y \to y$ for all $y \in S$, then $\mathcal{S}(S)$ is the closed exchange subspace generated by S.

Application: In $L_p[o, 1]$ (Lebesgue measure) if $S = \{1, id\}$ then $\mathcal{S}(S) = L_p[o, 1]$ (i. e. S is a Korovkin net for $L_p[o, 1]$).

The case $p = 1$ has been treated by Walbert (5. Approximation theory 1968), Lorentz and Berens and Lorentz (preprints 1972, 1973).

J. A. W. VAN CASTEREN: Vector lattices and solid subcones.

The setting is a normed partially ordered vector space E over $\mathbb{R}$ with weakly normal generating positive cone C. A subset S of C is said to be solid, if u in S implies $[o, u] = \{v \in C: o \leq v \leq u\}$ belongs to S. Denote by $\mathcal{L}$ the collection of all solid subcones of C. If F is a set, its cardinality is denoted by $|F|$.

Theorem: Let K_1 belong to $\mathcal{L}$, let K_2 be a subcone of C and let Γ be an infinite index set. Write $\Sigma = \{S \in \mathcal{L}: S \subseteq K_1,\ S \text{ closed in } K_1,\ S \not\subseteq K_2\}$.

Among the assertions:

(i) There exists a subset F of the dual cone C', $|F| \leq |\Gamma|$, such that $\bigcap \{\operatorname{Ker} \varphi \cap K_1: \varphi \in F\} \subseteq K_2$.

(ii) There exists a subset F of C', $\sigma(E', E'')$-Lindelöf degree $\leq |\Gamma|$, such that $\bigcap \{\operatorname{Ker} \varphi \cap K_1: \varphi \in F\} \subseteq K_2$.

(iii) The cartesian product $\prod \{S^\Gamma: S \in \Sigma\}$ contains an element (u_S^γ) such that for every $S_o \in \Sigma$ there exists γ in Γ for which the zero-vector does not belong to the closed convex hull of $\{u_S^\gamma: S \in \Sigma,\ S_o \subseteq S\}$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

the following implications hold

$i \Rightarrow ii$ and $i \Leftrightarrow iii$.

If in addition C has the Riesz decomposition property and if K_1 is of the form $K_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ v \in C: v \leq nu \}$, where u is in C, then $i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii$.

In the proof of this theorem the properties of the map

$$\not{b} : C \times C' \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R},$$

defined by $\not{b}(u, \varphi, S) = \sup \{ \varphi(v): v \in [o, u] \cap S \}$, were investigated.

P.G. DODDS: Riesz spaces and vector measures.

Let L be an archimedian Riesz space with separating order dual $L^{\sim}$ and denote by I_n the order ideal generated by L in $L^{\sim}, \tilde{n}$. A linear map A from L to the (real) Banach space Y is called o-bounded (o-weakly compact) if A maps each order interval in L to a bounded (relatively weakly compact) subset of Y. If A: L $\rightarrow$ Y is o-bounded, the dual map $A^{\sim}: Y^* \rightarrow L^{\sim}$ is defined in the natural manner.

Theorem: Let A: L $\rightarrow$ Y be o-bounded. The following are equivalent

(i) A is o-weakly compact.

(ii) $o \leq z_n \uparrow_n \leq x$ in $L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n$ ex. weakly in Y.

(iii) $A^{\sim}(U^*) \subseteq L^{\sim}$ is relativly $\sigma(L^{\sim}, I_n)$ compact, when U^* is the unit ball of Y^*.

In addition, let L have the principal projection property and assume that the Boolean algebra of principal components of e is σ-complete, for $o \leq e \in L$. Then each of the above is equivalent to

(iv) For each $o \leq e \in L$, and for each sequence $\{e_n\}$ of disjoint principal components of e, it follows that $\| Ae_n \| \rightarrow o$ as $n \rightarrow \infty$.

It is shown that a number of well known results in the theory of vector measures, as well as results concerning weakly compact mappings of spaces of type C(X) follows directly from the theorem.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

A. J. ELLIS: Some decompositions for A(K)

If K is a compact convex set and A(K) the Banach space of all real-valued affine continuous functions on K then the centre L of A(K) is a Riesz space which coincides with A(K) if and only if K is a Bauer simplex. The centre L decomposes the extreme boundary δK into sets of constancy $\{E_\alpha\}$, where each $E_\alpha = \delta F_\alpha$ for some closed split face F_α of K; the family $\{F_\alpha\}$ is called the Šilov decomposition of K. If we now decompose each F_α by means of the centre of $A(F_\alpha)$ and continue this process then we eventually obtain a decomposition $\{F_\alpha\}$ for K, where each F_β is a closed split face of K and the centre of $A(F_\beta)$ is trivial; $\{F_\beta\}$ is called the Bishop decomposition for K.

The Šilov decomposition always determines A(K) in the sense:

$$A(K)|_{\overline{\delta K}} = \left\{ f \in C_{\mathbb{R}}(\overline{\delta K}) : \; f|_{F_\alpha \cap \overline{\delta K}} \in A(F_\alpha)|_{F_\alpha \cap \overline{\delta K}}, \; \text{f. a. } \alpha \right\}.$$

This is no longer true for the Bishop decomposition, even for simplexes. However if K is the state space of a unital C^*-algebra $\mathfrak{A}$ then the Bishop decomposition does determines A(K), a fact which can be given an algebraic interpretation. If $\mathfrak{A}$ is weakly central then the Bishop and Šilov decompositions coincide.

When K is the state space of a function algebra $\mathfrak{B}$ and $Z = co(K \cup -iK)$ then the decompositions for Z are closely related to the corresponding known Šilov and antisymmetric decompositions for $\mathfrak{B}$; a geometric proof of the Hoffman-Wermer theorem can be deduced from this fact.

D. H. FREMLIN: A characterization of L-spaces

The following theorem is well known (see A. Peressini, "Ordered Topological Linear Spaces"):

If E and F are L-spaces, every continuous linear map $T: E \to F$ may be expressed as the difference of positive linear maps.

I prove the converse:

If E is a Banach lattice such that every continuous linear map $T: E \to l^1$ may be expressed as the difference of positive linear maps, then there is a norm on E, equivalent to the given norm, for which E is an L-space.

Sketch of proof: (a) Since every positive linear map from E to l^1 is continuous, the hypothesis implies that the Riesz space L of order-bounded linear maps from E to l^1 is precisely the Banach space of continuous linear maps from E to l^1. Consider the normed Riesz space L. Because the positive cone of l^1 is closed, the positive cone of L is closed. Because the positive cone of l^1 is normal, the positive cone of L is normal. Because L is a Riesz space, there is some $\alpha > o$ such that

$$\| |T| \| \leq \alpha \|T\| \quad \text{for every } T \in L.$$

(See G.J.O. Jameson, "Ordered Linear Spaces", for the basic theorems underlying the argument above.)

(b) My aim now is to show that the unit ball B of E' is bounded above in E', where E' is the Dedekind complete Banach lattice of continuous (or order-bounded) linear functionals on E. To do this it is enough to show that

$$C = \left\{ f_1 \vee \dots \vee f_n : f_i \in B \ \forall i \leq n \right\}$$

is norm-bounded; for C is directed upwards, and if it is relatively ω^*-compact, it must have a cluster point which is its supremum and therefore an upper bound for B. In fact I can show that $\|g\| \leq \alpha^2$ for every $g \in C$, where α is the constant found in part (a).

(c) Suppose that $f_1 \dots f_n \in B$, and that $g = \sup_i |f_i|$. Because E' is Dedekind complete, we may find $g_1 \dots g_n$ such that $o \leq g_i \leq |f_i|$, $g_i \wedge g_j = o$ if $i \neq j$, and $g = \sup_i g_i = \Sigma_i g_i$. Let k be such that $2^k \geq n$. By an argument due (I believe) to Banach, there is a $2^k \times 2^k$ unitary matrix U_k such that every component of U_k is $\pm \sqrt{2}^{-k}$. Now $U_k : l^2 \to l^2$ has norm 1. If we take V_k to be the matrix $U_k / \sqrt{2}^k$, then $V_k = l^2 \to l^1$ has norm 1, and every component of V_k has norm $\pm 2^{-k}$.

Let (γ_i) be any sequence such that

$$\Sigma_i |\gamma_i g_i(x)|^2 \leq ||x||^2 \quad \forall x \in E.$$

Define $S: E \to l^2$ by

$$Sx = (\gamma_i g_i(x))_{i \leq n} .$$

Then $||S|| \leq 1$ so $||V_k S|| \leq 1$ and $|| \, |V_k S| \, || \leq \alpha$.
Computing $|V_k S|$ (using the fact that the g_i are disjoint) we conclude that $|\Sigma_i \gamma_i g_i(x)| \leq \alpha \, ||x||$ for every $x \in E$.
From this we may deduce first that $\Sigma_i |g_i(x)|^2 \leq \alpha^2 ||x||^2$ for any $x \in E$, and then that $|\Sigma_i g_i(x)| \leq \alpha^2 ||x||$ for any $x \in E$, i.e. that $||g|| \leq \alpha^2$.

(d) Thus the assertion in (b) is proved. Now if h is any upper bound of B in E', the functional $x \mapsto h(|x|)$ is the required equivalent L-space norm on E.

B. FUCHSSTEINER: Verbandshalbgruppen

Sei $S, \leq, +$ eine prägeordnete abelsche Halbgruppe, S^* die Menge der additiven Abbildungen $S \to [-\infty, +\infty[$ und $(S, \leq)^*$ die ordnungstreuen Elemente von S^*. Es wird untersucht:

(1) Wann ist $(S, \leq)^*$ ein vollständiger Verband?
(2) Sei S^* vollständiger Verband, $\Phi \subset S^*$ und $\check{\Phi}$ der von Φ in S^* erzeugte Unterverband. Für welche Präordnungen $\leq$ (die durch Φ charakterisierbar sind) gilt: $\check{\Phi} \subset (S, \leq)^*$?

A. GOULLET DE RUGY: Une nouvelle representation des M-espaces de Kakutani.

Considérons un espace topologique complètement régulier T, une fonction φ s.c.i sur T strictement positive et posons

$$D_{\varphi}(T) = \left\{ f \in C_{\mathbb{R}}(T) : \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \text{ compact} \subseteq T \right.$$
$$\left. \text{t.q. } |f| \leq \varepsilon\varphi \text{ hors de } T \right\} .$$

C'est un espace vectoriel réticulé que l'on munit de la norme $||f||_{\varphi} = \inf \{ \lambda : |f| \leq \lambda\varphi \}$.

[N.B. On suppose, pour simplifier que $D_{\varphi}(T)$ sépare les points de T].

Ainsi normé, cet espace possède toutes les propriétés d'un M-espace, sauf, éventuellement celle d'être complet. Les problèmes à résondre sont les suivants:

- Caractériser les espaces $D_{\varphi}(T)$ qui sont des M-espaces.
- Caractériser les M-espaces qui sont isomorphes (pour l'ordre et la norme) à des espaces $D_{\varphi}(T)$.

Les problèmes sont complètement résolus par les résultats suivants:

Résultat 1: Un espace $D_{\varphi}(T)$ est complet ssi

(i) $\forall x \in T \ \exists V$ voisinage de T telque
$V \cap \{x : \varphi(x) \leq n\}$ est compact $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) T est un espace de Kelley et la suite de fermés $\{x : \varphi(x) \leq n\}$ est compactivore.

Résultat 2: Soient E un M-espace, P(E) la cône des formes linéaries positives, $P(E)_g^*$ la réunion des formes linéaries réticulantes (= lattice homomorphisms) non nulles. Alors E est isomorphe à un espace $D_{\varphi}(T)$ ssi il existe une fonction homogène continue (pour $\sigma(E', E)$ de $P(E)_g^*$ dans $]0, +\infty[$.
[C'est donc le cas d'un M-espace à unité topologique, en aprticulier séparable.]

Les espaces $D_{\varphi}(T)$ ont permis de contruire beaucoup d'examples de M-espaces aux propriétés plus ou moins pathologiques. Pour plus de détail voir: Le structure idéale des M-espaces; J. de Mat. Pures et App. 51 (1972), 331-373.

W. HACKENBROCH: Darstellung σ-vollständiger Vektorverbände und Operatordiagonalisierung.

Für σ-vollständige Vektorverbände E hat man die beiden folgenden Darstellungssätze (vgl. MZ 128 (72)):

"Stetige Darstellung": Es existiert ein lokalkompakter Hausdorff-Raum (direkte topologische Summe kompakter Quasi-Stone-Räume) und ein Vektorverband $\hat{E}$ von stetigen $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen (außerhalb magerer Mengen $\mathbb{R}$-wertigen) Funktionen (Operationen punktweise auf Enldichkeitsmengen), welcher $\mathcal{K}(\Omega)$ als dichtes Ideal enthält, sodaß $E \cong \hat{E}$ (verbandsisomorph).

"Integraldarstellung": Auf Ω existiert ein Maß $\pi: \Sigma_{\text{Baire}}(\Omega) \to E_+ \cup \{\infty\}$, sodaß $E \cong L^1(\pi, \mathbb{R})$; der Isomorphismus wird durch $f \to \int f d\pi$ dargestellt.

Als Konsequenzen ergeben sich neben Darstellungssätzen für Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm und dem Freudenthalschen Spektralsatz folgende Resultate über das Zentrum $\mathfrak{z}$ eines monoton σ-vollständigen Vektorraumes E (also das von der Identität im Raum $\mathcal{L} = \mathcal{L}(E)$ der regulären Operatoren erzeugte Ideal; $\mathfrak{z}$ ist dann selbst Vektorverband und Algebra):

(1) Sei E σ-vollständiger Vektorverband. Dann ist die "stetige Darstellung" ρ von E Spektraldarstellung von $\mathfrak{z}$ in dem Sinne, daß ein Isomorphismus $T \to \hat{T}$ von $\mathfrak{z}$ auf $C_b(\Omega)$ existiert mit $T = \rho^{-1}[\hat{T}]\rho$ ($[\hat{T}]$ = "Multiplikation mit $\hat{T}$").

(2) Sei E monoton σ-vollständig, $\mathfrak{z} \cong L^1(\pi, \mathbb{R}) (= L^\infty(\pi, \mathbb{R}))$ die Integraldarstellung des Zentrums; $\tilde{\pi} : \Sigma_{\text{Baire}}(\Omega) \to \mathfrak{z} \subseteq \mathcal{L}$. Dann gilt:

(i) $L^1(\tilde{\pi}, \mathbb{R})$ ist Algebra und Vektorverband, und $\int d\tilde{\pi}: L^1(\tilde{\pi}, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}$ ist Algebra- und Verbands-isomorphismus auf ein Ideal $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{L}$.

(ii) $o \leq T \in \mathcal{L}$ ist genau dann in $\mathcal{O}(E)$, wenn eine Folge $(T_n) \subseteq \mathfrak{z}$ existiert mit $o \leq T_n \uparrow T$ (insbesondere ist $\mathcal{O}(E)$ das von der Identität erzeugte Band in $\mathcal{L}$, wenn E vollständiger Vektorverband ist).

(iii) $T \in \mathcal{L}$ ist genau dann in $\mathcal{O}(E)$, wenn T diagonalisierbar: $T = \int t P(dt)$ mit einem Spektralmaß $P: \Sigma(\mathbb{R}) \to \mathfrak{z}$.

(iv) Ist E vollständiger Vektorverband, so ist $T \in \mathcal{L}$ genau dann in $\mathcal{O}(E)$, wenn $TQ = QT$ für jede (Haupt-) Bandprojektion Q gilt.

C.B. HUIJSMANS: Riesz spaces and commutative rings.

By comparing the multiplication in a commutative ring with the operation of taking infima in a Riesz space or in a distributive lattice with smallest element it is possible to formulate for each theorem about prime ideals in one of these structures a corresponding theorem for the other two structures.

For example: essentially in these three structures the condition that every proper prime ideal is a maximal ideal is equivlaent to the property that every principal ideal is a direct summand.

W.A.J. LUXEMBURG: Normal Riesz homomorphisms and a Radon-Nikodym theorem.

A linear mapping T of a Riesz space L into a Riesz space M is called a Riesz homomorphism whenever T preserves the lattice operations. A Riesz homomorphism T of L into M is called M-normal whenever $u_\tau \downarrow o$ in L implies $Tu_\tau \downarrow o$ in M.

T(L)-normality for Riesz homomorphisms can be characterized by the condition that the kernel of $T = \{f\colon T(f) = o\}$ is a band. M-normality can be characterized in a different fashion. Let $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M$ be the Boolean algebras of the bands of the archimedean spaces L and M resp. For every $A \in \mathcal{B}_L$ we set $t(A) = (T(A))^{dd}$, where $(T(A))^{dd}$ denotes the band generated by T(A) in M. The mapping t is in general not a Boolean homomorphism of $\mathcal{B}_L$ into $\mathcal{B}_M$. We have the following theorem:

If L and M are archimedean and T is a Riesz homomorphism of L into M, then T is M-normal iff t is $\mathcal{B}_M$-normal and, in that case, t is a Boolean homomorphism of $\mathcal{B}_L$ into $\mathcal{B}_M$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

A Riesz homomorphism T of an archimedean Riesz space L into L is called an orthomorphism whenever $f \in L$ implies $Tf \in \{f\}^{dd}$. From the previous result it follows immediately that every orthomorphism is L-normal. From this result the general theory of orthomorphisms can be fully developped. As a consequence the following type of Radon-Nikodym theorem holds:

> If L is Dedekind complete and $o \leq \varphi, \psi$ are normal positive linear functionals on L, then $\varphi \leq \psi$ iff there exists an orthomorphism T of L into L satisfying $T \leq I$ and $\varphi = \psi \circ T$.

From this result the well-known characterization of normal states on commutativ W^*-algebras due to Pallu de la Barrière follows.

P. MEYER-NIEBERG: Disjunkte Folgen in Banachverbänden.

In einem Vektorverband mit absolut monotoner Halbnorm ρ lassen sich unter gewissen Voraussetzungen zu einer Folge $(x_n)_1^\infty \in E_+$ mit $\rho(x_n) \geq 1 + \delta$ $(\delta > o)$ und mit $\rho(x_1 + \ldots + \rho_n) \leq C$ eine Teilfolge $(k(u))_1^\infty$ und eine Folge $(v_n)_1^\infty \subseteq E_+$ paarweise disjunkter Vektoren mit $x_{k(n)} \geq v_n$ und mit $\rho(v_n) \geq 1$ konstruieren. Diese Aussage wird benutzt, um zu zeigen, daß die Norm eines Banachverbandes genau dann ordnungsstetig ist, wenn jede ordnungsbeschränkte Folge paarweise disjunkter Vektoren eine Nullfolge in der Norm ist. Dazu ist außerdem äquivalent, daß E σ-vollständig ist und keinen zu l^∞ isomorphen Unterverband enthält.

Wir erhalten ferner ein Dunford-Pettis Kriterium, welches die schwach folgenpräkompakten Mengen eines Banachverbandes mit ordnungssteiger Norm charakterisiert. In diesen Räumen läßt sich außerdem jede schwache Cauchy-Folge $(x_n)_1^\infty \subseteq E_+$ schwach durch eine monoton wachsende Folge $(u_n)_1^\infty \subseteq E_+$ approximieren.

Anwendungen dieser Aussagen sind die folgenden Sätze:

Satz: E besitze eine ordnungsstetige Norm. Dann sind äquivalent:

(i) Die Einheitskugel von E ist schwach folgenpräkompakt.

(ii) E enthält keinen zu l^1 isomorphen Unterverband.

(iii) Die Norm auf E' ist ordnungsstetig.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) E ist schwach folgenvollständig.

(ii) E ist ein Band in E''.

(iii) E enthält keinen zu c_o isomorphen Unterverband.

L. C. MOORE Jr.: Nonstandard hulls of normal Riesz spaces.

Let (E, ρ) be a normed Riesz space and let $(\hat{E}, \hat{\rho})$ be the nonstandard hull formed with respect to an $\aleph_1$-saturated enlargement. [Nonstandard hulls of normed spaces were introduced by W. A. J. Luxemburg in "A general theory of monads". in W. A. J. Luxemburg, ed., Applications of Model Theory, Holt, Rinehart, and Winston (1969). See also the paper by C. Ward Henson and L. C. Moore Jr. in Trans., AMS 172 (1972), 4o5 – 436].

Under the obvious ordering $(\hat{E}, \hat{\rho})$ is a Banach lattice satisfying the properties

(i) $o \leq u_n \downarrow o$ in $\hat{E} \Rightarrow \hat{\rho}(u_n) \downarrow o$

(ii) $o \leq u_n \uparrow$ in $\hat{E}$ and $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \hat{\rho}(u_n) < \infty \Rightarrow$ there exists $v \in \hat{E}$ such that $u_n \leq v$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Definition: If (E, ρ) and (L, η) are normed Riesz spaces, then (L, η) is finitely Riesz representable (f. R. r) in (E, ρ) if for every finite dimensional Riesz subspace S of L and every $\varepsilon > o$ there exists a Riesz isomorphism T of S into E such that

$$\eta(y) \leq \rho(Ty) \leq (1+\varepsilon)\,\eta(y) \quad \text{for all } y \in S.$$

Theorem: If (L, η) has the principal projection property then (L, η) is f. R. r. in (E, ρ) iff (F, η) is Riesz isometrically embeddable in (E, ρ).

Theorem: $(\hat{E}, \hat{\rho})$ is Dedekind complete iff c_o is not f. R. r. in (E, ρ).

<u>Theorem:</u> Assume (E,ρ) is norm complete. The following are equivalent:

(i) $(\hat{E},\hat{\rho})$ is reflexive.

(ii) (E,ρ) is super-reflexive (in the sense of R.C.James).

(iii) Neither l_1 nor c_o is f.R.r. in (E,ρ).

This is joint work with David Lozort.

R. J. NAGEL: <u>Ergodentheorie in Banachverbänden.</u>

Ein <u>dynamisches System</u> (E,H) bestehe aus einem Banachverband E und einer Halbgruppe H positiver linearer Operatoren auf E. Wenn H mittelergodisch ist(d.h. $\overline{co}$ H besitzt Nullelement P in $\mathcal{L}_\sigma(E)$) und relativ-kompakt in $\mathcal{L}_\sigma(E)$, dann kann man E in zweifacher Weise zerlegen:

(1) $E = F \oplus F_o$, wo $F = PE$ der H-Fixraum in E ist.

(2) $E = G \oplus G_o$, wo $\bar{H}|_G$ als kompakte Gruppe wirkt.

Die folgenden Extremfälle werden diskutiert:

(α) $F = E$: trivial.

(β) $\dim F = 1$, genauer: $P = \mu \otimes u \in \overline{co}\ H$ für $u \in E_+$ ein quasiinnerer Punkt und $\mu \in E'$ strikt positiv. H heißt dann <u>irreduzibel</u>.

(β_1) $\dim F = 1$ und $G = F$: $P = \mu \otimes u \in \bar{H}$. H heißt dann <u>mischend.</u>

(β_2) $\dim F = 1$ und $G = E$: $\bar{H}$ ist dann eine kompakte, irreduzible Gruppe, und solche dynamische Systeme können genau beschrieben werden. (Nagel-Wolff: Archiv der Math. <u>23</u>, 17o-176 (1972)).

C. PORTENIER: <u>Characterization of certain Riescz spaces.</u>

Tout espace de Riesz localement convexe $(E,\mathcal{T})$ dont le cône dual E'_+ des formes linéaires positives continues est l'enveloppe fermée convexe de la réunion $\hat{g}$ de ses génératrices extrémales, peut être représénte comme un sous-espace réticulé de sections continues d'un fibré en droite $\hat{g}_{\mathbb{R}}$ de base $\hat{X}$ égale à l'espace des génératrices extrémales (i. e. $\hat{\mathfrak{g}}/_{\mathbb{R}_+^*}$). $\hat{\mathfrak{X}}$ n'est pas nécessairement régulier (donc $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ n'est pas nécessairement trivial), mais la fibration est complètement régulière parce que E jouit de la propriété de richesse suivante: pour tout $x \in \hat{\mathfrak{X}}$, tout voisinage U de x, il existe $f \in E$ tel que $f(x) > o$ et $f = o$ hors de U.

Cette méthode permet de donner une représentation de tous les M-espaces de Kakutani, ainsi que de leurs équivalents localement convexes.

Réciproquement étant donné une fibration $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{X}$ et un sous-espace réticulé E de sections continues de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ satisfaisant à la propriété de richesse ci-dessus, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à une sous-fibration dense de $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$. Citons le théorème suivant caractérisant une classe de tels espaces:

Th.: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $(E, \mathcal{T})$ est un espace de Dini, i. e. toute famille filtrante décroissante (f_i) de E telle que $\inf f_i(x) = o$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$ $[(f_i) \downarrow_{\mathfrak{X}} o]$ converge vers o pour $\mathcal{T}$.

(ii) Pour tout $\mu \in E'_+$ et toute famille $(f_i) \downarrow_{\mathfrak{X}} o$, on a $\inf \mu(f_i) = o$.

(iii) Tout idéal fermé de E est égal à l'ensemble des $f \in E$ tels que $f = o$ sur T (T fermé de $\mathfrak{X}$ ne dépendant que de l'idéal).

(iv) Toute face fermée de E'_+ est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales.

(v) Toute $\mu \in E'$ possède un support (dans $\mathfrak{X}$), i. e. il existe un plus petit fermé T de $\mathfrak{X}$ tel que $f = o$ sur T implique $\mu(f) = o$.

Si l'une de ces propriétés équivalentes est satisfaite, alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}}$, ce qui signifie que toute forme linéaire réticulante continue est une évaluation.

H. H. SCHAEFER: <u>Eine Injektivitätseigenschaft abstrakter L-Räume.</u>

Seien E ein Banachraum, E_o ein Banachteilraum von E. Die Räume C(K) (K kompakt, Stonesch) sind als Banachräume dadurch charakterisiert, daß sich jedes $T_o: E_o \to C(K)$ normerhaltend fortsetzen läßt zu $T: E \to C(K)$ für beliebige Paare (E_o, E). Die entsprechende Aussage gilt, wenn E als Banachverband, E_o als Banachverband und T_o, T als positiv angenommen werden. Aber H.P. Lotz (Trans. Amer. Math. Soc., noch nicht erschienen) hat gezeigt, daß die normerhaltende positive Fortsetzung von $T_o: E_o \to F$ zu $T: E \to F$ auch dann stets möglich ist, wenn F ein AL-Raum ist. Der Beweis dieses Satzes wird in allen wesentlichen Zügen diskutiert. Als Korollar erhält man unter anderem das Theorem (Dean, Ando): Jeder abgeschlossene vektorielle Unterverband eines AL-Raumes ist Wertebereich einer positiven, kontraktiven Projektion. Dualisierungen des Satzes von Lotz ergeben Lifting-Theoreme für abstrakte M-Räume.

G. WITTSTOCK: Tensorprodukte geordneter normierter Räume.

Für regulär geordnete normierte Räume $(E, E_+, \|\cdot\|)$ werden Tensorprodukte $E \otimes_\alpha F = (E \otimes F, C_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ eingeführt. $E \otimes_\alpha F$ sei wieder regulär geordnet, C_α sei ein Tensorkegel: $E_+ \otimes F_+ \subseteq C_\alpha$, $E'_+ \otimes F'_+ \subseteq C_\alpha'$ (C_α' der duale Kegel) und für die Norm $\|\cdot\|_\alpha$ und die duale Norm $\|\cdot\|_{\alpha'}$ gelte

$$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \cdot \|y\|, \quad \|x' \otimes y'\|_{\alpha'} = \|x'\| \cdot \|y'\|$$

f.a. $x \in E_+$, $y \in F_+$, $x' \in E'_+$, $y' \in F'_+$.
Beispiele sind u.a. das geordnete projektive Tensorprodukt $X \otimes_p Y = (X \otimes Y, \bar{C}_p, \|\cdot\|)$ und das geordnete injektive Tensorprodukt $X \otimes_i Y$. Dabei ist $C_p = co(E_+ \otimes F_+)$ und $t \in C_i$, wenn $o \leq \langle t, E'_+ \otimes F'_+ \rangle$. Es gilt immer $\bar{C}_p \subseteq C_\alpha \subseteq C_i$ und $\|\cdot\|_\varepsilon \leq \|\cdot\|_i \leq \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\pi$. In Beispielen treten sowohl von $\bar{C}_p$ und C_i verschiedene Kegel als auch nicht äquivalente Normen auf.
Sind E, F basisnormiert, so sind $E \otimes_p F$ und $E \otimes_i F$ basisnormiert und $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\pi$. Sind $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ (approximativ) ordnungseinsnormiert, so sind $E \tilde{\otimes}_p F$ und $E \tilde{\otimes}_i F$ (approximativ) ordnungseinsnormiert und $\|\cdot\|_i = \|\cdot\|_\varepsilon$. Dabei bezeichne $\sim$ die vollständige Hülle.
Hat $\tilde{E}$ die Rieszsche Zerlegungseigenschaft, so ist in $E \otimes F$ der Abschluß von

C_p in der feinsten Tensornorm $\|\cdot\|_\pi$ gleich dem injektiven Kegel C_i für alle F. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Rieszsche Zerlegungseigenschaft von E. Sind $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ basisnormiert (bzw. approximativ ordnungseinsnormiert), und hat E die Rieszsche Zerlegungseigenschsft, so gilt isometrisch und ordnungsisomorph $E \otimes_p F = E \otimes_i F$. Auf $1_2 \otimes 1_2$ sind jedoch alle Normen $\|\cdot\|_\varepsilon \leq \|\cdot\|_i \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\pi$ nicht äquivalent.

Haben $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ die Rieszsche Zerlegungseigenschaft, so hat jedes regulär geordnete normierte Tensorprodukt $E \tilde{\otimes}_\alpha F$ die Rieszsche Zerlegungseigenschaft. H.H. Schaefer hat nämlich zwei interessante Tensornormen für B-Verbände angegeben, die wieder B-Verbände ergeben.

M. WOLFF: Über das Spektrum gewisser ordnungsbeschränkter komplexer Operatoren.

Seien E, F komplexe Banachverbände (d.s. Komplexifizierungen reeller Banachverbände i.S. von H.P. Lotz), F sei o-vollständig, und S sei ein ordnungsbeschränkter linearer Operator von E in F. Dann kann man $|S|$ durch $|S|(y) = \sup\{|Sz| : |z| \leq y\}$ ($y \leq o$) und lineare Fortsetzung definieren. Nach H.H. Schaefer (mdl. Mitteilung) ist $|S| = \sup\{(\mathrm{Re}\,S)\cos\varphi + (\mathrm{Im}\,S)\sin\varphi : \varphi \in \mathbb{R}\}$, gebildet im o-vollständigen Banachverband aller reellen ordnungsbeschränkten Operatoren. Wir nennen einen solchen Operator r-zyklisch, wenn $|S| = \sup\{(\mathrm{Re}\,S)\cos 2\pi k/_r + (\mathrm{Im}\,S)\sin 2\pi k/_r : o \leq k \leq r-1\}$ gilt. Reelle Operatoren sind hiernach 2-zyklisch. Repräsentativ für die von uns vorgetragenen Sätze ist der folgende:

Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband mit ordnungsstetiger strikt monotoner Norm und S ein r-zyklischer Operator auf E, $T = |S|$ eine Kontraktion. Ist λ ein Eigenwert von S vom Betrage 1, so ist λ^{rk+1} ebenfalls Eigenwert von S und λ^{rk} Eigenwert von T für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Für reelle Operatoren ist dies im wesentlichen schon von H.H. Schaefer bewiesen worden.

A. C. ZAANEN: Normed Riesz spaces.

Let L be a Riesz space with norm ρ. Norm convergence of a sequence (notation $f_n \xrightarrow{\rho} f$) is compared with order convergence (notation $f_n \to f$) or relatively uniform convergence (notation $f_n \xrightarrow{ru} f$) of the same sequence. We recall that a subset D of L is called order closed (norm closed, ru-closed) if it follows from $f_n \to f$ ($f_n \xrightarrow{\rho} f$, $f_n \xrightarrow{ru} f$) with all f_n in D that $f \in D$. It is proved now that an ideal A in L is order closed (norm closed, ru-closed) iff it follows from $o \leq u_n \uparrow$ in A and $u_n \to u$ ($u_n \xrightarrow{\rho} u$, $u_n \xrightarrow{ru} u$) that $u \in A$. It follows from $f_n \xrightarrow{ru} f$ that $f_n \xrightarrow{\rho} f$ and $f_n \to f$, but not conversely. Norm convergence and order convergence are incomparable, although it is true that if $f_n \xrightarrow{\rho} g$ and $f_n \to h$, then $g = h$. If A is an ideal in L, then:

A order closed $\Rightarrow$ A norm closed $\Rightarrow$ A ru-closed.

If L is norm complete, this holds also if A is a Riesz subspace. The arrows in the last formula cannot be written in the converse direction, so the question arises under what condition for ρ every norm closed ideal is order closed (or every ru-closed ideal is norm closed). Every norm closed ideal is order closed iff it follows from $u_n \downarrow o$ that $\rho(u_n) \downarrow o$ (this is essentially due to T. Ando). The following holds:

L is Banach lattice $\Rightarrow$ $u_n \downarrow o$ impies $u_n \downarrow^{ru} o$ $\Rightarrow$ every ru-closed ideal is norm closed

In the converse direction it is known that if every ru-closed ideal is norm closed and L has the σ-property (i. e., given any sequence $\{u_n\}$ in L^+, there exist positive numbers $\{\lambda_n\}$ and $u_o \in L^+$ such that $\lambda_n u_n \leq u_o$ for all n), then $u_n \downarrow^{\rho} o$ implies $u_n \downarrow^{ru} o$.

B. Kühn, Dortmund