MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 36/1973

Komplexe Analysis

2.9. bis 8.9.1973

Unter der Leitung von H.Grauert (Göttingen), R.Remmert (Münster) und K.Stein (München) fand in der Woche vom 2.September bis zum 8.September im Forschungsinstitut in Oberwolfach nach zwei Jahren wieder eine Tagung über "Komplexe Analysis" statt. Es wurden 26 Vorträge über neuere Ergebnisse aus verschiedenen Gebieten der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher gehalten.

Teilnehmer

R.Axelsson, Münster
D.Barlet, Paris
W.Barth, Leiden
W.Bartenwerfer, Göttingen
J.Bingener, Bochum
R.B.Braun, Tübingen
F.Catanese, Pisa
M.Commichau, Göttingen
K.Diederich, Münster
P.Dolbeault, Poitiers
A.Douady, Paris
A.Duma, München
G.Fischer, Regensburg
H.Flenner, Bochum
O.Forster, Regensburg
J.Frenkel, Strasbourg
P.M.Gauthier, Montreal
H.Grauert, Göttingen
S.Hayes, München
A.Hirschowitz, Nizza
H.Holmann, Fribourg
A.T.Huckleberry, Notre Dam
B.Kaup, Fribourg
W.Kaup, Tübingen
H.Kerner, Frankfurt
K.Knorr, Regensburg
K.Königsberger, Würzburg
B.Kramm, Frankfurt
G.Kraus, München
N.Kuhlmann, Bochum
P.Lelong, Paris
I.Lieb, Münster
F.Norguet, Paris
E.Oeljeklaus, Münster
H.Oeljeklaus, Münster
J.-B.Poly, Paris
G.Pourcin, Marseille
K.J.Ramspott, Mannheim
R.Remmert, Münster
O.Riemenschneider, Göttingen
K.Saito, Göttingen
G.Scheja, Bochum
M.Schneider, Regensburg
H.W.Schuster, Frankfurt
P.Siegfried, Genf
H.Skoda, Nizza
J.L.Stehlé, Strasbourg
K.Stein, München
U.Storch, Bochum
G.Trautmann, Kaiserslautern
A. van de Ven, Leiden
J.-P.Vigué, Orsay
K.-W.Wiegmann, München
K.Wolffhardt, München

Vortragsauszüge :

D. BARLET : ESPACE des CYCLES ANALYTIQUES COMPACTS d'un ESPACE ANALYTIQUE REDUIT .

- Dans un premier temps on definit la notion de revêtement ramifiés (morceau de cycle avec une parametrisation locale) et on construit un ensemble analytique banachique classifiant.

- On pose alors le problème en definissant une famille analytique de cycles compacts d'un espace analytique reduit Z paramètrée par un ensemble analytique banachique S.

On montrera ensuite que le théorème de "changement de projection" devient vrai si on " enrichit" la structure analytique de H $(\bar{U}\ \mathrm{sym}^{k}(\mathbb{C}^p))$ et on la construira la solution dont on montrera la finitude .

W. Barth : Über Vektorbündel auf $\mathbb{P}_n$.

Es sei α ein 2-Vektorbündel über $\mathbb{P}_n$ mit $c_1(\alpha) = o$ oder -1. Ist $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_n$ ein linearer Unterraum , so spaltet $\alpha | \mathbb{P}_1$ nach Grothendieck :

$\alpha | \mathbb{P}_1 = \xi_{\mathbb{P}_1}^{k} \oplus \xi_{\mathbb{P}_1}^{-k+c_1(\alpha)}$, wo $\xi_{\mathbb{P}}$ das Geradenbündel auf $\mathbb{P}_1$ vom Grad 1 ist. Sei $b(\alpha)$ die Invariante $\min_{\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_n} k$. Dann gilt folgende Abschätzung : Es gibt eine Funktion f von drei Veränderlichen, sodaß für jedes 2 - Vektorbündel α auf $\mathbb{P}_n$ (mit $c_1(\alpha) = o$ oder -1) , das nicht direkte Summe von Geradenbündeln ist , gilt:

$f(c_1(\alpha), c_2(\alpha), b(\alpha)) \geqslant n$ (Babylonische Ungleichung).

Der Vortrag war ein Bericht über eine gemeinsame Arbeit mit T. van de Ven , in der diese Ungleichung bewiesen wird.

J. Bingener : Resträume zu analytischen Mengen.

Gegeben sei ein Steinscher Raum X und eine analytische Teilmenge $T \subseteq X$. Wir interssieren uns für die Frage, wann der Restraum $U := X \setminus T$ eine (Steinsche) Holomorphiehülle besitzt bzw. bereits Steinsch ist. Zunächst wird die kanonische Abbildung von U in seine Holomorphiehülle untersucht. Sodann ordnen wir dem analytischen Restraumproblem eine Familie von algebraischen Restraumproblemen zu. Es werden Kriterien algebraischer Art dafür angegeben, daß U eine Holomorphiehülle besitzt bzw. Steinsch ist. Schließlich wird unter Verwendung des Rees - Transformierten eine Beispielklasse von Resträumen 3-dimensionaler normaler Steinscher Räume angegeben, die keine Holomorphiehülle besitzen.

P. Dolbeault : Formes differentielles à singularités semi - analytiques et cohomologie entière.

Sur une variété analytique réelle, le q-ième groupe de cohomologie à coefficients entiers est isomorphe à un groupe de cohomologie de classes de couples de formes différentielles localement sommables à singularités dans des ensembles semi-analytiques. La demonstration repose sur un lemme de J. POLY exprimant que tout courant 0-continu $T = dAT + AdT$, à une forme C^{∞} près, AT étant localement sommable et l'opérateur A n'augmentant pas le support singulier. Ce résultat est analogue au théorème d'Allendoerfer - Eells (Comm. math. Helv. 1958) .

A. Douady : <u>Le probleme des modules locaux pour les espaces $\mathbb{C}$ - analytiques compacts.</u>

Soit X un espace $\mathbb{C}$ - analytique compact. On définit les cuirasses sur X . Elles forment une variété analytique banachique $\mathcal{Q}(X)$. On définit aussi la notion de <u>cuirasse abstraite</u> (on puzzle) (sans espace analytique donné à l'avance). Elles forment un espace analytique banachique horrible $\mathcal{Z}$, qui a déjà la propriété verselle. En faisant subir à $\mathcal{Z}$ une cure d'amaigrissement, on construit un espace Z , qui a encore la propriété verselle, et des inclusions $V \subset Z \subset W$, où V et W sont des variétés banachique , V de codimension finie dans W . En fait Z est de la forme $S \times V$, où S est de dimension finie et a la propriété semi universelle.

A. Duma : <u>Differentiale und Metriken auf regulären Familien kompakter Riemannscher Flächen.</u>

Sei $\mathcal{V}_g \xrightarrow{\pi_g} T_g$ die universelle Familie kompakter Riemannscher Flächen vom Geschlecht g ($\geqslant$ 2) über dem Teichmüller-Raum T_g.

<u>Lemma .</u> Für jeden Punkt $t_0 \in T_g$ gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ und $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_g\} \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_g)^g$, so daß die Beschränkung von ω auf jeder Faser $\mathcal{V}_{g,t}$, $t \in \mathcal{U}$, eine orthonomale Basis des Vektorraums aller hol. Diff. darstellt.

$\omega^{(s)}$ bedeute die s - te Ableitung von ω entlang der Faser.

Für alle $0 \leq s \leq g - 1$ sei

$$Z^{(s)}(\omega) := \{x \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) : \omega \wedge \dots \wedge \omega^{(s)}(x) = 0\}$$

$$\rho^{(s)}(\omega) := \sum (\omega \wedge \dots \wedge \omega^{(s)})_\alpha \cdot \overline{(\omega \wedge \dots \wedge \omega^{(s)})_\alpha}$$

wobei die Summe über alle Komponenten α von $\omega \wedge \dots \wedge \omega^{(s)}$

gebildet wird.

Auf $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \setminus Z^{(s)}(\omega)$ sei :

$$K^{(s)}(\omega) = -\frac{1}{2\rho^{(s)}(\omega)} \Delta \log \rho^{(s)}(\omega)$$

(Δ ist der Laplace Operator).

<u>Lemma</u>: $Z^{(s)}(\omega), K^{(s)}(\omega)$ und $\rho^{(s)}(\omega)$ hängen nicht von $\mathcal{U}$ und ω ab. Sie lassen sich auf ganz T_g erklären.

Sei $R(x) := \{ r \in \{0,\ldots,2g-2\}$; es gibt ein hol. Diff. ω auf $V_{g,\pi(x)}$, dessen Ordnung in x gleich r ist$\}$

$$= \{ r_1(x) < \ldots < r_g(x) \}.$$

Für $1 \leqslant j \leqslant g$ setzt man :

$$W_j := \{ x \in V_g \, ; \sum_{\alpha=1}^{j} (r_\alpha(x) - \alpha + 1) > 0 \}$$

W_g ist die Menge aller Weierstraß - Punkte.

<u>Satz 1 .</u> $W_{s+1} = Z^{(s)}$; damit ist W_{s+1} analytisch.

<u>Satz 2.</u> $W_{s+1} \setminus W_s$ ist analytisch.

Es folgt ein einfacher Beweis für das "principle of non-degeneracy" von Rauch.

Man kann einen Hilfssatz von Grauert und Reckziegel verallgemeinern, indem man zeigt :

Jede reguläre Familie kompakter Riemannscher Flächen über einen red. komplexen Raum ist lokal stark negativ gekrümmt.

H. Flenner : **Normale , 2 -dim. reine analytische**
$\mathbb{C}$ - Algebren sind regulär.

Satz Äquivalent für eine analytische $\mathbb{C}$ - Algebra, welche 2 - dim & normal :

i) A ist rein ii) A ist regulär.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) ist gerade die "Reinheit des Verzweigungsortes".
(i) $\Longrightarrow$ (ii) geschieht über die loc. Fundamentalgruppe π des zugehörigen Raumkeimes. Endliche, normale Erweiterungen von A, welche höchstens über dem maximalen Ideal von A verzweigt sind, entsprechen nämlich genau den Untergruppen von endlichem Index von π .
Es gilt also, zu zeigen, daß die lokale Fundamentalgruppe stets Untergruppen von endlichem Index besitzt.
Methode dafür : ein wenig Gruppentheorie & Topologie.
Man zeigt nämlich, daß Graphenmfgk. mit negativ definiter Schnittmatrix stets endliche Überlagerungen besitzen.

O. Forster : Deformationen von Vektorbündeln
(Bericht über eine gemeinsame Arbeit mit K. Knorr)
Satz. Sei X ein kompakter komplexer Raum und V_o ein Vektorbündel über X . Dann existiert eine semi - universelle Deformation von V_o . - Ein Beweis dieses Satzes wurde bereits 1970 von Donin angekündigt. Deligne besitzt ebenfalls einen Beweis dieses Satzes, der die Singularitätenauflösung von Hironaka benützt.
Unser Beweis beruht darauf, die nach einem allgemeinen Satz von Schlessinger existierende formale verselle Deformation so abzuändern, daß sie konvergent wird. Benutzt wird weiter ein Satz von Schuster, der besagt, daß eine (konvergente) Deformation, die im formalen Sinne versell ist, schon im analytischen

Sinn versell ist.

Die Konstruktion benutzt die von Grauert in seiner Arbeit über die Deformation isoloierter Singularitäten entwickelte Divisions - und Erweiterungstheorie für Ideale in Potenzreihenringen sowie einen Glättungssatz für die 1. Cohomologie der Garbe der holomorphen Funktionen mit Werten in $GL(n, \mathbb{C})$.

P. M. Gauthier : <u>Surjectivité d'une application générique</u>

Soit X un espace analytique séparable de pure dimension n et dont l'algèbre des functions holomorphes sépare les points. Alors à l'exception d'un ensemble maigre les applications holomorphes de X dans $\mathbb{C}^n$ sont surjectives. Si en plus $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$, alors on a un résultat semblable pour les applications de X dans $\mathbb{P}^n$.

S. Hayes : <u>Homotopie und Approximation für Okasche Paare von Garben homogener Räume</u>

Für Okasche Paare $\mathcal{E}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{E}_1$ von Garben homogener Räume über dem reduzierten Steinschen komplexen Raum X gilt : h induziert eine bijektive Abbildung

$$\pi(X, \mathcal{E}_2) \longrightarrow \pi(X, \mathcal{E}_1)$$

zwischen den Homotopieklassen der globalen Schnitte.

Wenn die Topologie von $\mathcal{E}_2$ (bzw. $\mathcal{E}_1$) mit den Beschränkungsabbildungen (bzw. der Homotopie) verträglich ist, dann gilt außerdem für jede Rungesche Teilmenge Y von X : Ein Schnitt $f \in \mathcal{E}_2(Y)$ läßt sich genau dann durch Schnitte aus $\mathcal{E}_2(X)$ approximieren, wenn sein Bild h(f) in $\mathcal{E}_1(Y)$ durch Schnitte aus $\mathcal{E}_1(X)$ approximierbar ist.

Als Anwendungen ergeben sich u. a. : eine Vereinheitlichung verschiedener bekannter Aussagen zum Okaschen Prinzip, eine Lösung eines Transformationsproblems für Erzeugendensysteme verschiedener Länge, ein Okasches Prinzip für die Approximation einer hol. Matrix max. Ranges, die zwei Erzeugendensysteme ineinander transformiert, und ein solches für die Approx. von Schnitten in einem Endromisbündel.

A. Hirschowitz : Pseudoconvexité au dessus des espaces homogènes

Si X est un espace homogène compact et U un domaine fini localement pseudoconvexe au dessus de X et si les fonctions holomorphes sur U separent les points , alors U est de Stein. Si X est une grassmanienne au une quadrique de dimension $\geq$ 3 , il suffit qu'il existe dans U une fonction holomorphe non constante.

A. T. Huckleberry : Analytic and Algebraic Dependence of Functions on Spaces Satisfying Certain Types of Pseudoconvexity Conditions.

A summary of results of Huckleberry - Stoll on the analytic size of the Silov boundary will be given. These results will be used to give a quick proof of the Huckleberry - Nirenberg bound on the number of analytically independent holomorphic functions on a k - pseudoflat complex space.

Finally, let $\mathcal{R}(X)$ be the field of meromorphic functions on a connected complex manifold X and $\mathcal{Q}(X)$ be the field of quotients of holomorphic functions. The problem of and recent developments in the computing of a natural bound on trans - deg $_{\mathcal{Q}(X)}$ $\mathcal{R}(X)$ will be discussed.

B. Kramm : Starrheit von analytischen Abbildungskeimen

$g : X \longrightarrow S$ sei ein analytischer Abbildungskeim. Eine Deformation von g durch den analytischen Raumkeim T wird repräsentiert durch einen analytischen Abbildungskeim $g' : X' \longrightarrow S \times T$ derart, daß $pr_T \circ g' : X' \longrightarrow T$ flach und das kommutative Quadrat

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & X' \arrow[d, "g'"] \\ S \arrow[r, hook] & S \times T \end{tikzcd}$$

ein Pullback ist. Ein Abbildungskeim g heißt starr, wenn er über jedem T nur die triviale Deformation zuläßt.

Es mögen B bzw. A die lokalen Algebren von X bzw. S bezeichnen. Dann gilt : $g: X \longrightarrow S$ ist genau dann starr, wenn der B - Modul $\mathrm{Exalan}_A(B,B)$ verschwindet; dabei ist $\mathrm{Exalan}_A(B,B)$ die Spezialisierung des HOCHSCHILD/GROTHENDIECK-schen $\mathrm{Exalcom}_A(B,B)$ auf den analytischen Fall und isomorph zur ersten ANDRÉ'schen (analytischen) Cohomologiegruppe $H^1(A,B,B)$. Falls g "fast überall starr" und X reduziert ist (das ist z.B. erfüllt, wenn g flach und reduziert und X reduziert ist), ist $\mathrm{Exalan}_A(B,B)$ isomorph zu $\mathrm{Ext}^1_B(\Omega_{B/A}, B)$.
Die bisher gemachten Aussagen verallgemeinern Sätze von H.W. SCHUSTER (1968). Ferner gilt der Satz : Ist S ein regulärer Raumkeim, so ist $g: X \longrightarrow S$ genau dann starr, wenn g äquivalent zu einer Projektion mit starrer Faser ist. Weitere Beispiele starrer Abbildungskeime sind glatte (lisse) Morphismen und gewisse eigentliche Modifikationsabbildungen. Man erhält einen einfachen Beweis des Satzes von der Reinheit des Verzweigungsortes.

G. Kraus : <u>Meromorphe Funktionen auf allgemeinen komplexen Räumen.</u>

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum .

$\mathcal{Q}_X$ sei die Garbe auf X, deren Halme genau die totalen Qotientenringe von $\mathcal{O}_{X,x}$ $(x \in X)$ sind.

$\mathcal{M}_X$ sei die Garbe auf X mit

$$\mathcal{M}_X(U) := \{ f : U \longrightarrow \mathbb{P} \mid f \text{ meromorphe Abbildung ; } f^{-1}(\infty) \text{ ist analytisch dünn in } X \}$$

Es wird folgender Satz bewiesen :

<u>Satz</u> $\mathcal{Q}_X \cong \mathcal{M}_X$.

N. Kuhlmann : <u>Holomorphe Abbildungen mit projektiven Fasern</u> (Stabilitätsaussagen)

Es seien $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein mFB - Raum lokal vom Typ (J) , $\tau : X \longrightarrow Y$ ein relativ - analytischer Raum, der eigentlich über Y liegt. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ sei relativ Y pseudokohärent und transplatt. Für alle $\tilde{Q} \in Y$ sei die zugehörige Idealgarbe $m_{\tilde{Q}}$ pseudokohärent. Es sei $\hat{m}_{\tilde{Q}} := \tau^*(m_{\tilde{Q}}) \cdot \mathcal{O}_X$, $F_{\tilde{Q}} = (\tau^{-1}(\tilde{Q}), \mathcal{O}_X/\hat{m}_{\tilde{Q}} | \tau^{-1}(\tilde{Q}))$. Für alle $\tilde{Q} \in Y$ sei $F_{\tilde{Q}}$ ein komplexer Raum.- $Q \in Y$ sei fest gewählt. - Im folgenden sei Y' stets eine Umgebung von Q, $X' := \tau^{-1}(Y')$. - <u>Satz</u>. 1) Es sei F_Q projektiv, $H^2(F_Q, \mathcal{O}_{F_Q}) = 0$. Dann gibt es ein Y' , so daß $\tau | X' : X' \longrightarrow Y'$ projektiv ist.

2) Es seien B_Q projektiv, $H^i(B_Q, \mathcal{O}_{B_Q}) = 0$ für $i = 1,2$, $F_Q = B_Q \times \mathbb{P}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{N_r}$. Dann existiert ein Y' , so daß für alle $\tilde{Q} \in Y' \cap \tau(X)$ $F_{\tilde{Q}} = B_{\tilde{Q}} \times \mathbb{P}^{N_1} \ldots \times \mathbb{P}^{N_r}$ ist ($B_{\tilde{Q}}$ projektiv); ist $F_Q = \mathbb{P}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{N_r}$, so existiert über Y' eine abgeschlossene Einbettungsabbildung $X' \longrightarrow Y' \times \mathbb{P}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{N_r}$.

3) F_Q sei nichtsingulär und birational äquivalent zu $B_Q \times \mathbb{P}^N$ (B_Q projektiv, nichtsingulär, $H^2(B_Q, \mathcal{O}_{B_Q}) = 0$). τ sei regulär.

Dann existiert ein Y', so daß für alle $\tilde{Q} \in Y' \cap \tau(X)$ $F_{\tilde{Q}}$ birational äquivalent zu $B_{\tilde{Q}} \times \mathbb{P}^N$ ist. ($B_{\tilde{Q}}$ projektiv, nichtsingulär, $H^2(B_{\tilde{Q}}, \mathcal{O}_{B_{\tilde{Q}}}) = 0$). Es seien F_Q projektiv, B_Q nichtsingulär, projektiv, $H^2(F_Q, \mathcal{O}_{F_Q}) = 0$, F_Q ein $\mathbb{P}^N$- Bündel über B_Q. Dann existiert ein Y', so daß für alle $\tilde{Q} \in Y' \cap \tau(X)$ $F_{\tilde{Q}}$ ein $\mathbb{P}^N$-Bündel über einem projektiven $B_{\tilde{Q}}$ ist; ist $B_Q = \mathbb{P}^N$, so ist $B_{\tilde{Q}} = \mathbb{P}^N$. - Die letzte Aussage ist für Hirzebruchmannigfaltigkeiten verschärfbar. - Nach einer brieflichen Mitteilung ist Herr Schuster für den Fall komplexer Räume seit längerem im Besitz eines Beweises von 1).

J. Le Poitier : Théorèmes d'annulation de la cohomologie de type (p,q) à valeurs dans un fibré vectoriel positif de rang quelconque et applications.

Théorème Soit M une variété analytique complexe compacte de dimension n, $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel holomorphe positif de rang r au-dessus de M. Alors

$$H^{p,q}(M,E) = 0$$

dès que $p+q \geq n+r$.

Ce résultat généralise un résultat bien connu de Kodaira-Nakano et répond à une conjecture de Griffiths.

On donne ensuite des extensions de ce théorème au cas de la cohomologie à valeurs dans les fibrés $\Lambda^{\nu} E \otimes E^{(\mu)}$ ($E^{(\mu)}$ étant la μ-ième puissance tensorielle symétrique de E).

Ces résultats sont appliqués à des problèmes d'extension de classes de cohomologie; on obtient des théorèmes du genre "Lefchetz" en cohomologie de type (p,q).

F. Norguet : Convexité holomorphe dans des espaces de cycles analytiques.

Soit X un sous - ensemble ouvert d'une variété algébrique projektive; supposons X fortement q-pseudoconvexe ; à toute fonction d'exhaustion définissant cette q-pseudoconvexité, est associée naturellement une fonction d'exhaustion de l'espace $C_q^+(X)$ des q-cycles analytiques de X, plurisousharmonique aux points réguliers de $C_q^+(X)$; la solution d'un problème de Levi (généralisant des résultats de Narasimhan) permet de prouver la convexité holomorphe de $C_q^+(X)$; si X est q-complet, $C_q^+(X)$ est de Stein. Cette méthode, mise au point en collaboration avec Y.-T. Siu, est plus directe que celle utilisée dans mes travaux antérieurs avec A. Andreotti; elle reste valable si X est un espace analytique complexe réduit quelconque, pouron que $C_q^+(X)$ soit défini.

J-B Poly : Une formule des résidus

Soient X une variété analytique complexe et Y un sous-ensemble analytique complexe fermé de X, pur de codimension $k \geq 1$. On montre que le courant d'intégration sur Y peut s'écrire $I_Y = dK + L$, où K est une forme différentielle localement sommable sur X, à support singulier dans Y, et L une forme $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Une forme différentielle φ sur $X-Y$ est dite K-simple si elle peut s'écrire $\varphi = (K \wedge \Psi + \Theta)|_{X-Y}$ où Ψ et Θ sont des formes $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Prolongeant la théorie de Leray et Norguet, on définit la forme-résidu d'une forme K-simple, et on établit une formule des résidus qui s'énonce approximativement ainsi :

Soit Z une chaîne semi-analytique de X de dimension $p+1$ telle que

$\bar{Z}$ est compact dans X

bZ ne rencontre pas Y

dim $Z \cap Y \leq p+1-2k$

Alors, pour toute p-forme K-simple φ telle que $d\varphi$ soit $\mathcal{C}^{\infty}$ dans X on a

$$\int_{bZ} \varphi - \int_{Z} d\varphi = \int_{Z \cap Y} \operatorname{res} \varphi .$$

G. Pourcin : <u>Déformation de singularités isolées et ouverture de la versalité</u>

Soit X_o un sous-espace analytique fermé à singularités isolées d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On donne une construction d'une déformation semi-universelle de $\coprod_{x \in \operatorname{sing} X_o} X_o, x$ différente de celle de H. Grauert basée sur les techniques de privilège de A. Douady et qui permet d'obtenir de plus l'ouverture de la versalité. Soit K un compact $\mathcal{O}_{X_o}$ - privilégié tel que $\operatorname{Sing} X_o \subset \subset \mathring{K} \subset K \subset U$. Soient $B(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K et analytique sur $\mathring{K}$ et et G l'espace analytique banachique des idéaux de B(K) admettant une présentation finie directe. On démontrequ' au voisinage du point de G associé à X, G est isomorphe au produit d'un espace analytique de dimension finies et d'un ouvert d'espace de Banach. On en déduit le <u>Théorème :</u>

Il esiste un germe d'espace analytique de dimension finie S, s_o, un ouvert U_1 de C^n contenant K et un sous- espace X de $S \times U_1$ plat sur S tels que

i) $X \longrightarrow S$ soit une déformation semi-universelle de $\coprod_{x \in \operatorname{sing} X_o} X_o, x$.

ii) Pour tout point s de S assez voisin de s_o

(a) $X \longrightarrow S$ est une déformation verselle de

$$C(s) = \coprod_{x \in \operatorname{sing} X(s)} X(s), x \; .$$

(b) Pour toute immersion de germes d'espaces analytiques $B \longrightarrow B'$ le morphisme

$$\operatorname{Hom}(B',S) \longrightarrow \operatorname{Def}_{C(s)}(B') \times_{\operatorname{Def}_{C(s)}(B)} \operatorname{Hom}(B,S) \quad (*)$$

est surjectif.

$(*)$ $\operatorname{Def}_{\mathbb{C}(s)}(B)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphie locale des déformations de $C(s)$ audessus de B.

O. Riemenschneider : <u>Deformationen rationaler Singularitäten</u>

Es sei (X_o,x_o) eine rationale Singularität, $\tilde{X}_o \longrightarrow X_o$ eine Auflösung der Singularität und $\tilde{\pi} : \tilde{X} \longrightarrow (S,s_o)$ eine Deformation von $\tilde{X}_o \cong \tilde{\pi}^{-1}(s_o)$ (mit regulärer Basis S). Dann läßt sich $\tilde{\pi}$ faserweise zu einer Deformation $\pi : X \longrightarrow (S,s_o)$ von $X_o = \pi^{-1}(s_o)$ zusammenblasen.

Dieses Resultat wird erläutert mit Hilfe der speziellen Klasse von rationalen Singularitäten, deren Auflösung ein exzeptionelles Kurvensystem mit dem folgenden düalen Graphen enthält :

$$\overset{-b_1}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{-b_2}{\bullet} \;\cdots\; \overset{-b_{r-1}}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{-b_r}{\bullet} \quad (b_\varrho \geq 2,\ \varrho = 1,\dots,r;\ \bullet = \mathbb{P}_1)$$

(Quotientensingularitäten nach zyklischen Gruppen).

Ist $n : q = b_1 - 1 \rfloor b_2 - \dots - 1 \rfloor b_r$ und $n : (n-q) = a_2 - 1 \rfloor a_3 - \dots - 1 \rfloor a_{e-1}$ die Kettenbruch - entwicklung von Hirzebruch - Jung ($a_j \geq 2$), so gilt

$$e = 3 + \sum_{\varrho=1}^{r} (b_\varrho - 2) = \text{Einbettungsdimension von } (X_o,x_o)$$

und

$$d = \dim \operatorname{Ext}^1(\Omega^1_{X_o,x_o}, \mathcal{O}_{X_o,x_o}) = (a_2 - 1 + \sum_{j=3}^{e-2} a_j + (a_{e-1} - 1)) \, .$$

Es gibt stets eine Deformation $\pi : X \longrightarrow S$ von X_o mit regulärem Basisraum S der Dimension $\sum_{j=2}^{e-1} (a_j - 1) = \sum_{\rho=1}^{r} (b_\rho - 1)$, die eine Unterfamilie der versellen Deformation (und im Falle $e = 3,4$ sogar isomorph zu dieser) ist, s.d. π (zumindest nach endlichem Basiswechsel) durch Zusammenblasen einer Deformation von $\tilde{X}_o$ gewonnen werden kann.

Dies liefert interessante Einsichten über die Variation der exzeptionellen Menge bei 1-konvexen Abbildungen (O-konvex im Sinne von Siegfried).

K. Saito : Einfach elliptische Singularitäten

Eine normale Singularität einer Fläche heißt einfach elliptisch, wenn die exzeptionelle Kurve in der minimalen Auflösung der Singularität eine singularitätenfreie elliptische Kurve ist. Wenn die Selbstschnittzahl der exzeptionellen Kurven -3, -2, -1 ist, lassen sich die Singularitäten durch folgende Gleichungen beschreiben und werden bzw. $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ genannt.

$\tilde{E}_6$: $y(y-x)(y-\lambda x) - x z^2$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0,1$

$\tilde{E}_7$: $y x (y-x)(y-\lambda x) - z^2$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0,1$

$\tilde{E}_8$: $y(y-x^2)(y-\lambda x^2) - z^2$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda \neq 0,1$

Für quasihomogene Singularität (X,x) definiert man zwei nicht-negative rationalwertige Invarianten $r(X,x)$ und $s(X,x)$. Dann sind die folgenden Aussagen für eine quasihomogene Singularität (X,x) äquivalent.

i) In einer lokalen Deformation von (X,x) treten nur quasi-homogene Sing. auf.

ii) $s(X,x) \leq 1$

iii) $r(X,x) \geq 1$

iv) (X,x) ist ein rationaler Doppelpunkt oder vom Typ $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ oder $\tilde{E}_8$.

P. Siegfried : <u>q-konvexe Morphismen und Bildgarben</u>

Für einen q-konvexen Morphismus $\pi : X \longrightarrow S$ gilt : die Bildgarben einer kohärenten Garbe sind kohärent für die Grade $\geq q+1$ (das ist das beste Resultat, das man erreichen kann). Wird zusätzlich S Steinsch angenommen, dann sind die Kohomologieklassen von X in bijektiver Beziehung mit den Schnitten der Bildgarben in diesen Graden.

H. Skoda : <u>La réciproque du problème de Bezout pour les ensembles analytiques dans $\mathbb{C}^n$</u>.

On étudie dans $\mathbb{C}^n$ les liaisons entre la croissance du volume d'un ensemble analytique X et la croissance des fonctions entières qui definissent X.

G. Trautmann : <u>Erweiterung von Vektorraumbündeln</u>

Es wird das folgende Problem untersucht : Gegeben sei ein holomorphes Vektorraumbündel V auf $\mathbb{C}^{n-1} - \{o\}$. Unter welchen Bedingungen an V gibt es dann ein holomorphes Vektorraumbündel $\tilde{V}$ über $\mathbb{C}^n - \{o\}$, so daß dessen analytische Einschränkung auf $\mathbb{C}^{n-1} - \{o\}$, bis auf direkte Summanden mit trivialen Bündeln, isomorph zu V ist ? $\tilde{V}$ soll dann eine Erweiterung von V heißen. Füe jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ über einer Umgebung X der $o \in \mathbb{C}^n$, deren Einschränkung auf $X - \{z_1 = \dots = z_{n-1} = o\}$ lokal-frei ist, wird eine kanonische Darstellung durch Matrizen angegeben, deren Elemente nur die Koordinatenfunktionen $z_1, \dots, z_{n-1}$ sind und holomorphe Funktionen in der Variablen z_n. Anhand dieser Darstellungen lassen sich gewisse Bedingungen für die Existenz von Erweiterungen ableiten, die an einem Beispiel demonstriert werden. Für das sog. "Rangproblem" ergibt sich die Konsequenz, daß nur sehr wenige Vektorraumbündel minimalen Ranges erweitert werden können.

A. Van de Ven : <u>On babylonian vector bundles</u>

To an algebraic vector bundle α of rank 2 on a projective space P_n three integers can be attached : the Chern classes c_1, c_2 and the absolute value b of the difference of the degrees of the components of the restriction of α to a generic line.

<u>Theorem.</u> There exists a function $N(c_1, c_2, b)$ such that every bundle α with the invariants c_1, c_2 , b on P_n is decomposable if $n > N(c_1, c_2, b)$.

<u>Consequence 1.</u> Be given on every P_n a bundle α_n, such that $\alpha_n | P_{n-1} \cong \alpha_{n-1}$. Then the α_n are decomposable.

<u>Consequence 2.</u> There exists a function M(g) such that every non-singular subvariety of codimension 2 in P_n is a complete intersection if $n > M(g)$.

J.- P. Vigué : <u>Opérateurs différentiels sur les cônes normaux</u>

L'algèbre des germes d'opérateurs différentiels au voisinage du sommet du cône d'equation : $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ dans $\mathbb{C}^3$ a été étudiée par Bernstein, Gelfand et Gelfand. Nous montrerons la généralisation suivante de ce théorème.

Soit $X \subset \mathbb{C}^3$ un cône normal défini par un polynôme homogène de degré n. Soit $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,o})$ l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels sur X au voisinage de O. Alors, si $n \geq 3$, $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,o})$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,o}$- algèbre de type fini.

B. Kramm (Frankfurt /M)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft