MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 41/1973

Algebraische Kurven, die durch Modulfunktionen uniformisiert werden

7.10. bis 13.10.1973

Die Tagung stand unter der Leitung von M.Kneser (Göttingen) und P.Roquette (Heidelberg).

Teilnehmer

v.Asch, Utrecht
R.Berndt, Hamburg
E.J.Ditters, Nijmegen
P.Draxl, Bielefeld
Freitag, Mainz
G.Frey, Heidelberg
W.D.Geyer, Erlangen
E.Gottschling, Mainz
G.Harder, Bonn
H.Helling, Bielefeld
Howe, Bonn
Kiehl, Mannheim
M.Knebusch, Saarbrücken
M.Kneser, Göttingen
H.Kraft, Bonn
Legrady, Hamburg
E.Maus, Göttingen
J.Mennicke, Bielefeld
Petrie, Bonn
H.Pfeuffer, Mainz
A.Pfister, Mainz
Recke, Göttingen
F.Schwarz, Saarbrücken
U.Stuhler, Göttingen
S.Suckow, Mainz
R.Vogt, Saarbrücken
K.Wohlfahrt, Heidelberg

Vortragsauszüge

W.D.GEYER: Elliptische Kurven und Modulfunktionen der Stufe N

Die elliptischen Kurven E über $\mathbb{C}$ werden durch die Modulfunktion j klassifiziert. Die Modulfunktionen der Stufe N, d. h. die unter der Kongruenzuntergruppe Γ_N der $SL(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ invarianten meromorphen Funktionen mit ordentlichem Verhalten an den Spitzen, klassifizieren die elliptischen Kurven E mit "level-N-structure", d. h. gegebenen N-Teilungspunkten E_N. Die Modulfunktionen der Stufe N, deren Fourierkoeffizienten (in der Spitze ∞) im N-ten Kreiskörper $k_N = \mathbb{Q}(\sqrt[N]{1})$ liegen, bilden eine galoissche Erweiterung $\mathfrak{F}_N$ von $\mathbb{Q}(j)$ mit der Gruppe $GL_2(\mathbb{Z}/N)/(\pm 1)$ und Konstantenkörper k_N, sie enthält die Funktionen $j \circ \alpha$ für $\alpha \in M(2,\mathbb{Z})$ mit $\det(\alpha) = N$, es werden Erzeugende von $\mathfrak{F}_N$ angegeben, die sich unter der Galoisgruppe sehr einfach transformieren. Der Beweis besteht in einer generischen Spezialisierung des Funktionenkörpers an einer Stelle $z_o \in \mathbb{C}$, durch die $\mathfrak{F}_N$ in den Körper F_N übergeht, der aus dem Modulkörper $\mathbb{Q}(j_o)$ einer allgemeinen elliptischen Kurve durch Adjunktion der (x-Koordinaten der) Teilungspunkte hervorgeht. Für die Betrachtung von F_N benutzt man wesentlich die nichtausgeartete kanonische 2-Form auf E_N. [Literatur: Shimura,... Automorphic Functions, chap. IV, & VI .]

S.SUCKOW: Die Automorphismengruppe des Körpers aller (rationalen) Modulfunktionen

Sei $\mathfrak{F} = \bigcup_N \mathfrak{F}_N$ (s.o) der "Körper aller (rationalen) Modulfunktionen"

Aut($\mathfrak{F}$) dessen Automorphismengruppe. Aus Vortrag 1. gewinnt man einen Homomorphismus

$$\tau : GL(2,\hat{\mathbb{Z}}) = \varprojlim_{N} GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{F}),$$

den man explizit auf den Erzeugenden angeben kann. Weiter zeigt man, daß für $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ mit h auch h $\circ\alpha$ in $\mathfrak{F}$ liegt. Bezeichnet G_A die Adelisierung der Gruppe $GL_2(\mathbb{Q})$ und G_A^+ die Untergruppe der Elemente von G_A, die an der unendlichen Stelle positive Determinante haben, so wird durch die genannten Konstruktionen eine exakte Sequenz:

$$1 \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})\mathbb{Q}^\times \rightarrow G_A^+ \xrightarrow{\tau} \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{F}) \rightarrow 1$$

geliefert. Für den Beweis kommt es neben der Surjektivität von τ besonders auf die Verträglichkeit der Wirkung von Elementen aus $GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$ und $GL_2^+(\mathbb{Q})$ an. Außerdem wird die Wirkung von G_A^+ auf den Konstantenkörper $\mathbb{Q}_{ab}$ von $\mathfrak{F}$ mit Hilfe des Artin-Symbols beschrieben.

[Lit. Shimura l.c. chap. 6]

H.PFEUFFER: <u>Modelle für die Quotienten der oberen Halbebene nach Kongruenzuntergruppen</u>

Zwischen den über $\mathbb{Q}$ endlich erzeugten Teilkörpern, über denen $\mathfrak{F}$ (s. Vortrag 2) galoisch ist, und den offenen kompakten Untergruppen $\mathfrak{S}$ von Aut($\mathfrak{F}$) besteht ein Galois-Zusammenhang. Anstelle dieser $\mathfrak{S}$ wird die Menge

$\mathfrak{T} = \{S \mid \ker(\tau) \subseteq S \subseteq G_A^+$ offene Untergruppe, $S/\ker(\tau)$ kompakt$\}$

betrachtet. Sei $\mathfrak{F}_S$ der Fixkörper von $\tau(S)$, $\Gamma_S = S \cap GL_2^+(\mathbb{Q})$ und der Zahlkörper k_S der offenen Untergruppe det (S) der Idealgruppe von $\mathbb{Q}$ durch den klassenkörpertheoretischen Zuzammenhang zugeordnet. Dann ist für jedes $S \in \mathfrak{T}$

$\mathfrak{F}_S$ ein algebraischer Funktionenkörper mit Konstantenkörper k_S, $\Gamma_S/\mathbb{Q}^\times$ eine Fuchssche Gruppe 1. Art, von endlichem Index über $\mathbb{Q}^\times\Gamma_N/\mathbb{Q}^\times$ mit geeignetem N, $\mathbb{C}\cdot\mathfrak{F}_S$ der Körper aller automorphen Funktionen zu Γ_S.

Umgekehrt gibt es zu jeder Gruppe $\Gamma \subseteq GL_2^+(\mathbb{Q})$, von endlichem Index über einem Γ_N, ein $S \in \mathfrak{T}$ mit $\mathbb{Q}^\times\Gamma = \Gamma_S$; S ist aber durch Γ_S und k_S nicht eindeutig bestimmt.

Der Funktionenkörper $\mathbb{C}\mathfrak{F}_S$ der Riemannschen Fläche $\Gamma_S \backslash \mathfrak{H}^\times$ hat ein k_S-definiertes, nichtsinguläres, projektives Modell V_S und die Abbildung $\varphi_S : \mathfrak{H}^\times \to \Gamma_S\backslash\mathfrak{H}^\times \xrightarrow{\sim} V_S$ kann so gewählt werden, daß der Körper $k_S(V_S)$ der k_S-rationalen Funktionen auf V_S durch $\varphi_S^\times : f \to f\circ\varphi_S$ auf $\mathfrak{F}_S$ abgebildet wird.

Für $S, T \in \mathfrak{T}$, $x \in G_A^+$ mit $x\,S\,x^{-1} \subseteq T$ induziert $\tau(x) : \mathfrak{F}_T \to \mathfrak{F}_S$ einen Isomorphismus $\tau'(x) : k_T(V_T) \to k_S(V_S)$ und dieser eine k_S-rationale Abbildung $J_{TS}(x) : V_S \to V_T^{\,\sigma(x)}$ (mit $\sigma(x) = \tau(x)|_{k(T)} : k(T) \to k(S)$), die gewissen Multiplikationsregeln genügt, für $x\,S\,x^{-1} = T$ ein Isomorphismus, für $x = 1$ die Projektion und für $x = \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ die Übertragung der Transformation von $\mathfrak{H}^\times$ mit α auf die Modelle ist.

Lit. s.o.

E.MAUS: Ein explizites Reziprozitätsgesetz an den Fixpunkten von $G_{\mathbb{Q}}$ auf $\mathfrak{H}$

Jeder Fixpunkt $z \in \mathfrak{H}$ eines Elementes aus $G_{\mathbb{Q}}$ ist imaginär-quadratisch $/\mathbb{Q}$ und bestimmt eine Einbettung $q : K = \mathbb{Q}(z) \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$, derart, daß $q(K^{\times}) = \left\{ \alpha \in G(\mathbb{Q})^{+} \,\middle|\, \alpha(z) = z \right\}$ ist. Umgekehrt bestimmt jede Einbettung eines imaginär quadratischen K in $M_2(\mathbb{Q})$ einen Punkt $z \in \mathfrak{H}$, der Fixpunkt für $q(K^{\times})$ ist.

q heißt normiert, falls $\mu^{*}\binom{z}{1} = q(\mu)\binom{z}{1}$ ist. q wird stetig auf $K_A^{\times} \longrightarrow G_A^{+}$ fortgesetzt. Ziel ist der Beweis des

<u>Reziprozitätsgesetz:</u> Sei K imaginär quadratischer Zahlkörper, $q : K^{\times} \longrightarrow G_{\mathbb{Q}}^{+}$ eine normierte Einbettung, z deren Fixpunkt $\in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ der Körper der über $\mathbb{Q}_{ab}$ rationalen Modulfunktionen. Dann gilt für jedes in z definierte $h \in \mathfrak{F}$: $h(z) \in K_{ab}$ und für jedes $s \in K_A^{\times}$ ist $h(z)^{[s,K]} = h^{\tau(q(s^{-1}))}(z)$.

Zum Beweis wird zunächst das Transformationsverhalten für die Erzeugenden j, f_a von $\mathfrak{F}$ unter $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/K)$ an z nachgewiesen. Ihr Transformationsverhalten ist eine Folge des Hauptsatzes der komplexen Multiplikation elliptischer Kurven. Daraus wird das Reziprozitätsgesetz in der folgenden geometrischen Gestalt abgeleitet:

Für jedes $S \in \mathfrak{T}$ ist $\varphi_S(z)$ rational über K_{ab} und es gilt für $s \in K^{\times}$,

$$\varphi_S(z)^{[s,K]} = J_{ST}(q(s^{-1}))\,(\varphi_T(z)) \text{ mit}$$

$$T = q(s)\ S\ q(s)^{-1}$$

Das Reziprozitätsgesetz zeigt, daß analog zum Artinschen Reziprozitätsgesetz, die Abbildung $\tau : G_A^+ \to \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ lokal, d. h. an den Fixpunkten z, durch das Artinsymbol und damit durch den Frobenius bestimmt ist. Als Anwendung wird die Struktur von $K\,k_S(\varphi_S(z))$ bestimmt.

Kor.: $K\,k_S(\varphi_S(z))$ ist abelsch über K und gehört zur Klassengruppe $W_S = K^\times \{ s \in K_A^\times \mid q(s) \in S \}$

M.KNESER: Die Kongruenzrelationen von Eichler-Shimura für Modularkorrespondenzen

Für S,T,x wie in Vortrag 3 wird die Modularkorrespondenz $X_{TS}(x)$ auf $V_S \times V_T^{\delta(x)}$ definiert durch $X_{TS}(x) = J_{TW}(x) \circ {}^tJ_{SW}(1)$; dabei ist $W = S \cap x^{-1}Tx$, o die Komposition von Korrespondenzen und ^{t} die Transposition. Ist S fest, so gibt es eine endliche Ausnahmemenge $\mathfrak{L}_S$ derart, daß für jede Primzahl $p \notin \mathfrak{L}_S$ folgendes gilt: ω_p sei eine 2 x 2 -Matrix über $\mathbb{Z}_p$ mit Determinante p, $w \in G_A^+$ habe an der Stelle p die Komponente w_p, an allen anderen Stellen die Komponente 1, $\sim$ bedeute die Reduktion mod p bzw. modulo einer Fortsetzung der Stelle p auf den algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$, π die Potenzierung mit p, sowohl als Automorphismus von $\mathbb{F}_p$ als auch als Abbildung $\tilde{V}_S \to \tilde{V}_S^{\pi}$; dann ist $X_{SS}(w^{-1})$ rational über k_S und man hat $\widetilde{X_{SS}(w^{-1})} = \Phi_S + {}^t\Phi_S^{\pi} \circ \widetilde{J_{SS}(\det w^{-1})}$, mit Φ_S der Graph der Abbildung $\pi : \tilde{V}_S \to \tilde{V}_S^{\pi}$. Das ist die im Titel genannte Relation, deren Beweis mit Hilfe der Theorie der komplexen Multiplikation aus dem vorangehenden Vortrag gegeben wurde. Literatur: Shimura, loc. cit., Kapitel 7.

U.STUHLER: Modularkorrespondenzen

Im ersten Teil wurde die Wirkung von Korrespondenzen zwischen Kurven auf den Differentialen der zugehörigen Jacobischen erklärt. Danach wurde gezeigt, daß die den Doppelklassen $(\Gamma_\lambda\ \alpha\ \Gamma_\mu)$ (für Γ_λ, Γ_μ kommensurabel zu $\Gamma(1)$) zugehörenden Korrespondenzen $X(\Gamma_\lambda\ \alpha\ \Gamma_\mu) = \{(P_\mu(z), P_\lambda(\alpha z) \mid z \in \mathfrak{h}^*)\} \subset V_\mu \times V_\lambda$, (V_μ, P_μ) und (V_λ, P_λ) Modelle für $\Gamma_\mu\backslash\mathfrak{h}^*$, $\Gamma_\lambda\backslash\mathfrak{h}^*$, folgende Diagramme kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc}
S_2(\Gamma_\lambda) & \xrightarrow{(\Gamma_\lambda\ \alpha\ \Gamma_\mu)} & S_2(\Gamma_\mu) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathfrak{D}(V_\lambda) & \xrightarrow{X(\Gamma_\lambda\ \alpha\ \Gamma_\mu)} & \mathfrak{D}(V_\mu)
\end{array}$$

Hier sind $S_2(\Gamma_\lambda)$, $S_2(\Gamma_\mu)$ die spitzen Formen vom Gewicht 2, und die Doppelklasse $(\Gamma_2\ \alpha\ \Gamma_\mu)$ operiert wie üblich, die vertikalen Pfeile sind schließlich die üblichen Isomorphismen $f(z) \to f(z)dz$ von den Formen in die Differentiale. - Im zweiten Teil wurden dann diejenigen Gruppen $S \in \mathfrak{T}$ eingeführt, für deren Modelle V_S die Hasse-Weil-Vermutung bewiesen werden soll, nämlich $\mathfrak{S} = \mathbb{Q}^*U'$, mit

$$U' = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in U \mid d \in \underline{h}^*,\ b \equiv o(t),\ c \equiv o\ (N) \}$$

wo $U = G_{\infty,+} \times \prod_p G(\mathbb{Z}_p)$, $t \mid N$, und $\underline{h}^* \subset g^* = \mathbb{R}^* \times \prod_p \mathbb{Z}_p^*$ in der Idealgruppe $I(\mathbb{Q})$, wo $\underline{h}^*$ die ganzen Idele $\equiv \underline{1}$ mod N enthalten soll.

Alle zugehörigen Modelle V_S sind über $\mathbb{Q}$ definiert, genauso alle $X_{SS}(\alpha)$ für $\alpha \in \Delta' = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2,\mathbb{Z}) \cap G(\mathbb{Q})_+, a \in \underline{h}^*, c \equiv o(N), b \equiv o(t) \}$

als Multiplikatoren.

M.KNEBUSCH: Zetafunktionen von Shimura-Kurven

Es wurde gezeigt, daß die Zetafunktionen der Kurven V_S mit $S = Q^{\times} U'$ wie im vorigen Vortrag Produkte von Dirichletreihen $L(s,f) = \sum_{n=1} a_n n^{-s}$ zu gewissen Spitzenformen $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i}{t} nz}$ vom Gewicht 2 bzgl. Γ_S sind. Mit Resultaten aus der Frühjahrstagung über Modulformen folgt daraus, daß $\zeta(s,V_S/Q)$ sich holomorph auf die ganze Ebene fortsetzen läßt - nach Hinzufügen endlich vieler Euler-Faktoren- und einer Funktionalgleichung genügt. Außerdem wurde im wesentlichen die Ramanujan-Petersson-Vermutung $|\lambda_p'| \leq 2\sqrt{p}$ für die Eigenwerte λ_p der Hecke-Operatoren $T'(p)_{2,\phi}$ bewiesen. Als Hilfsmittel wurden die Modulkorrespondenzen, Standard-Resultate über abelsche Mannigfaltigkeiten und die Weil'schen Resultate über ζ-Funktionen von Kurven über endlichen Körpern benutzt (vgl. Shimura, § 7.5).

G.FREY: Kroneckersche und Néron'sche Modelle

Mit Hilfe der Igusa'schen Theorie der Modulformen in beliebiger Charakteristik wurde gezeigt, daß $(\overline{\Gamma_{\delta}(N)\backslash H})$ ein Modell über $\mathbb{Z}$ besitzt, das eigentlich ist und glatt über $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ ist. Als Folgerung sieht man, daß die Ausnahmemenge $\mathcal{L}_S$ aus Vortrag 5 als die Menge der Primteiler von N gewählt werden kann. Für abelsche Varietäten A über globalen Körpern K folgt nach Néron, daß ein glattes Gruppenschema $\mathfrak{A}$ über dem Ganzheitsring O von K existiert, so daß $\mathfrak{A} \otimes_{O} K \simeq A$ ist und $\mathfrak{A}$ minimal mit diesen Eigenschaften ist. Für elliptische Kurven kann das minimale Modell genau beschrieben werden, es treten 10 verschiedene Typen auf, bei denen die Ordnung der Diskriminate, die Anzahl der Komponenten nach Reduktion (auch die vielfachen Komponenten des komplettierten Schemas müssen berücksichtigt werden) und das Maß der wilden Verzweigung $\delta(e, A_e)$ nach einer Formel von Ogg zusammenhängen. (A_e sind die Punkte der Ordnung e von A).

K.WOHLFAHRT: <u>Neuformen</u>

Motiviert durch Barry Mazurs Definition von Weilschen Kurven werden "Neuformen" im Sinne von Atkin und Lehner (Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Annalen (85)) betrachtet. Es handelt sich dabei um Spitzenformen zu $\Gamma_0(N)$, $2 \leq N \in \mathbb{N}$, vom Gewicht 2 welche Eigenformen aller Operatoren T_p mit $p \nmid N$ (p Primzahl) sind und nicht schon von Formen einer niedrigeren Stufe herrühren. Ihre Fourierreihe läßt sich gemäß $f(z) = \sum a(n)t^n$, $t = e^{2\pi iz}$, $a(o) = 1$ normieren. Für Primzahlen $p \nmid N$, $q | N$ sind die Fourierkoeffizienten gleich den Eigenwerten. Wegen der Orthogonalität zu den Altformen sind die Neuformen bereits durch die $a(p)$ für $p \nmid N$ bestimmt.

Mit Hilfe der zugehörigen Dirichletreihen und einer Weilschen Abschätzung der Fourierkoeffizienten zeigt man mit Atkin und Lehner sogar: Sind F_1 und F_2 Neuformen bzw. zu $\Gamma_o(N_1)$, $\Gamma_o(N_2)$ und haben sie für fast alle $p \nmid N$ dieselben Eigenwerte unter T_p, so ist $F_2 = F_1$.

H.KRAFT: Die Bilder der Spitzen und das Manin'sche Reziprozitätsgesetz

Ju. I. Manin. parabolic points and zetafunctions of modular curves. Math. USSR, I-zvestja (1972) N°I

B. Mazur: Courbes elliptiques et symboles modulaire. Séminaire Bourbaki, 24e anné 1971|72 n°414

Mit Hilfe der kan. Identifikation $H_1(X, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^o(X, \Omega_X), \mathbb{C})$ erhält man zur Modellfläche $X_\Gamma = \Gamma \backslash H^*$ das modulare Symbol

$$\{\ ,\ \} : H^* \times H^* \to H_1\ (X, \mathbb{R}) : \{x, y\} = \int_x^y \pi^* \ ?\ \text{mit } \pi : H^* \to X.$$

Durch Betrachtung der Heckeoperatoren erhält man hieraus, daß für eine schwache Weilparametrisierung $\varphi : X_{\Gamma_o(N)} \to E$ die Bilder der Spitzen Punkte endlicher Ordnung sind. Genauer gilt auf $X_{\Gamma_o(N)}$ folgende Beziehung:

$$(1 + p - T_p)\ I = \sum_{d=o}^{p-1} \{0, \tfrac{d}{p}\}\ , \text{ mit } I = \{0, i\infty\}.$$

Definiert man $I^{\delta} = \{\delta 0, \delta i\infty\}$ für $\delta \in SL_2(\mathbb{Z})$, so hängt I^{δ} nur von den Linksnebenklassen $\Gamma_o(N) \backslash SL_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{P}^1\ (\mathbb{Z}/N)$ ab und es gilt $\sum \mathbb{Z}\ I^{\delta} \supset H_1(X_{\Gamma_o(N)}, \mathbb{Z})$.

Für jede Primzahl $p \nmid 2N$ gibt es eine Matrizenmenge $\mathcal{H}_p$ ($\sim$ Heilbronn-Matrizen), $\mathcal{H}_p \subset SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$, welche im wesentlichen die ganzzahligen Lösungen von $p = xx' + yy'$ mit $x > y > o$ und $x' > y' \geqslant o$ durchlaufen, mit folgender Eigenschaft :

$(1 + p - T_p)I = (\sum_{\zeta \in \mathcal{H}_p} I^{\bar{\zeta}})^+$ mit $\bar{\zeta}$ = Bild von ζ in $SL_2(\mathbb{Z}/N)$ und $?^+$ = Symmetrisierung bez. der Konjugation auf $H_1(X,\mathbb{R})$. Man erhält daraus das Maninsche Reziprozitätsgesetz für eine Weilsche Parametrisierung : $(1 + p - \lambda_p)\ \varphi(I) = \sum_{\mathcal{H}_p} y(\zeta)$ mit einer Funktion $y : \mathbb{P}^1(Z/N) \longrightarrow \mathbb{Z}$, die nicht von der speziellen Primzahl p abhängt. Mit dieser Formel ist es möglich, in Einzelfällen $N_p = 1 + p - \lambda_p$ = Anzahl der Punkte von E mod p, zu berechnen. Zudem hängt $\varphi(I)$ zusammen mit den Werten der L-Reihe von E an der Stelle 1. (vgl. Vortrag 11)

G.HARDER: Die Weilschen Vermutungen über elliptische Kurven $E/\mathbb{Q}$

In diesem Vortrag wurden Konsequenzen und Motivationen der Vermutungen von WEil behandelt. Wir wissen, daß für alle $N \in \mathbb{N}$ der Quotient $\overline{H/\Gamma_o(N)}$ eine natürliche $\mathbb{Q}$-Struktur besitzt, wobei $\Gamma_o(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv o \bmod N \right\}$ sei, $X_o(N)/\mathbb{Q}$ dieses glatte projektive Modell. Eine elliptische Kurve $E/\mathbb{Q}$ besitzt eine Weilsche Parametrisierung, falls es einen $\mathbb{Q}$-Morphismus

$$\varphi : X_o(N) \longrightarrow E$$

gibt mit $\varphi(i\infty) = o$ und $f(z)\,dz = \varphi^*(\omega_o) \in$ Raum der neuen Spitzenformen auf $X_o(N)$, wobei ω_o eine von Null verschiedene Differentialform auf E ist. Dann ist die Hasse-Weilsche Zetafunktion $L_E(s)$ gleich der Mellintransformierten von f. Das impliziert, daß $L_E(s)$ holomorph ist und einer Funktionalgleichung

$$L_E(2 - s) = \pm N^{s-1} L_E(s).$$

genügt. Umgekehrt zeigt Weil in seiner Arbeit (Math. Ann. 168) daß eine erweiterte Form dieser Funktionalgleichung zusammen mit Holomorphie und Beschränktheitsbedingungen die Existenz einer Weilschen Parametrisierung sehr plausibel macht. (Weils Vermutung).

Es wurden außerdem einige Zusammenhänge mit den Vermutungen von Birch - Swinnerton Dyer erläutert.

U. Stuhler (Göttingen)