MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 44/1973

# Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 2

4. 11. bis 9. 11. 1973

Die Tagung wurde vorbereitet und geleitet von WR.u.Prof. Dr. R. Fritsch (Konstanz) und Prof. F. Raith (Freiburg). Zentrales Thema war die Gestaltung des Analysisunterrichts, vor allem im Hinblick auf die neu zu gestaltende Sekundarstufe 2 (Kollegstufe). Es wurde sowohl in Vorträgen als auch in einer etwa fünfstündigen Diskussion erörtert; ein kurzes Protokoll dieser Diskussion, die durch einige Thesen von Prof. Karcher (Bonn) eingeleitet wurde, findet sich am Ende dieses Tagungsberichts. Neben diesem schwerpunktmäßig behandelten Gebiet kam auch die unterrichtliche Behandlung von linearer Algebra und Stochastik zu Wort.

Teilnehmer:

| | | |
|---|---|---|
| K. Arzt | 74 Tübingen | Hallstattstr. 35 |
| E. Baumgartner | 4 Düsseldorf 13 | Am Haferkamp 65 |
| F. Barth | 8 München 50 | Abbachstr. 23 |
| K. Dormanns | 43 Essen | Am Brönngen 15 |
| V. Drumm | 78 Freiburg | Math.Inst.der Univ.,Hebelstr.29 |
| H. Dücker | 6 Frankfurt (M) - 1 | Winterbachstr. 36 |
| H. Eggs | 78 Freiburg-Landwasser | Auwaldstr. 19 |
| G. Fillbrunn | 6801 Neckarhausen | Buchenweg 8 |
| L. Fischer | 763 Lahr | Schwarzwaldstr. 101 |
| K. Fladt | 726 Calw | Walkmühlenweg 26 |
| R. Fritsch | 775 Konstanz | Werner-Sombart-Str. 26 |
| L. Führer | 1 Berlin 65 | Müllerstr. 96 |
| H. Gall | 4 Düsseldorf | Himmelgeister Str. 20 |
| K.-H. Jäschke | 242 Eutin | Bismarckstr. 14 |
| K.H. Kamps | 775 Konstanz | Aeschenweg 17 |
| H. Karcher | 5205 St. Augustin | Johannesstr. 43 |
| O. Kerner | 4046 Büttgen 3 | Eickeremder Str. 5 |

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

| | | |
|---|---|---|
| H. Kittler | 3 Hannover | Podbielskistr. 255 |
| A. Koch | 1 Berlin 44 | Sonnenallee 191 |
| J. Kratz | 8035 Gauting | Ulmenstr. 16 |
| J. Laub | A 1190 Wien | Krottenbachstr. 33/6 |
| J. Mallmann | 78 Freiburg | Sundgauallee 19 |
| E. Mellin | 78 Freiburg | Schönbergstr. 1 |
| R. Müller | 77 Singen | Fichtestr. 42 |
| P. Pahl | 6901 Dossenheim | Im Linsenbühl 22 a |
| H. Prade | 7801 Stegen | Kageneckstr. 1 |
| F. Raith | 78 Freiburg | Bürgerwehrstr. 18 |
| R. Reinhardt | 1 Berlin 47 | Horst-Caspar-Steig 23 |
| H. Rixecker | 66 Saarbrücken | Schumannstr. 46 |
| R. Schmähling | 404 Neuß | Geulenstr. 82 |
| G. Schneider | 344 Eschwege | Langemarckstr. 13 |
| K. Sielaff | 2 Hamburg 61 | Büttskamp 52 |
| E. Thiele | 1 Berlin 38 | Breisgauer Str. 30 |
| G. Tischel | 2 Hamburg 67 | Groten Hoff 9 |
| D. Umbreit | 3 Hannover | Hartenbrakenstr. 19 D |
| G. Wolff | 775 Konstanz | Jacob-Burckhardt-Str. 20 |
| H. Wolgast | 24 Lübeck | Kronsforder Allee 19 |
| H. Wuttke | 43 Essen 1 | Sundernholz 70 |
| H. Zeitler | 8593 Tirschenreuth | Maximilianplatz 12 |
| G. Ziebegk | 1 Berlin 39 | A.-Knoblauch-Ring 7 |

Vortragsauszüge:

F. Barth: Basis und Dimension eines Vektorraums

I. Neue Begriffe sollten soweit möglich auf intuitiv anschaulicher Grundlage eingeführt werden.
Für "Basis" wird vorgeschlagen:
(1) Jedes Element der betreffenden Menge läßt sich (eindeutig?) (linear?) kombinieren aus den Elementen der Basis.
(2) Die Basis enthält keine überflüssigen Elemente in dem Sinn, daß eine kleinere Basis dieselben Dienste tut.

Als Dimension soll anschaulich die Minimalzahl von Bestimmungszahlen (Koordinaten) verstanden werden, die nötig sind, um ein Element der Menge zu kennzeichnen.
Fragen: 1) Haben alle Basen gleiche Elementzahl?
2) Ist Dimension ein sinnvoller Begriff, d.h. hat jeder Vektorraum höchstens eine Dimension?

II. Es wurden 3 Wege aufgezeigt, um diese Problematik im Schulunterricht zu behandeln, ohne den Austauschsatz von Steinitz-Graßmann explizit zu benutzen.
a) Reihenfolge Basis-Dimension
b) Reihenfolge Rang-Dimension-Basis
c) Problemlose Behandlung des $\mathbb{R}^n$ mit dem Ziel, Analytische Geometrie zu treiben.

E. Baumgartner: Verschiedene Möglichkeiten der Definition der Exponential- und der Logarithmusfunktion

In den meisten Analysis-Schulbüchern wird die Logarithmusfunktion $L: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ als eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ definiert durch $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$, die Exponentialfunktion $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ als die Umkehrfunktion von L. Dieses Vorgehen setzt Kenntnis fast der gesamten Differential- und Integralrechnung in $\mathbb{R}$ voraus. Wegen der Bedeutung der Exponentialfunktion in der Mathematik und für Anwendungen sollte diese aber schon früher eingeführt werden. Dazu verhilft eine axiomatische Kennzeichnung der Exponential- bzw. der Logarithmusfunktion, wobei der Nachweis der Existenz bewußt zurückgestellt wird. Für die Schule bieten sich folgende Möglichkeiten an

1. Zur axiomatischen Einführung der Logarithmusfunktion:
Gibt es eine Funktion $L: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit 1.1 entweder
(1) L ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$,
(2) für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $L'(x) = \frac{1}{x}$,
(3) $L(1) = 0$;
1.2. oder
(1) L ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$,
(2) für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$
(d.h. $L: (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ ist ein Homomorphismus),

[(3) $L'(1) = 1$ bzw. $L(e) = 1$] ;
(Die Eigenschaft (3) dient nur dazu, die "natürliche" unter den Logarithmusfunktionen auszuwählen. Wegen seiner technischen Natur sollte das Axiom (3) nicht mit am Anfang stehen, sondern frühestens nach dem Berechnen der Ableitung hinzugenommen werden!)

1.3. <u>oder</u>

(1) für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$ gilt: $L(xy) = L(x) + L(y)$ ,

(2) für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist $L(x) \leq x-1$ .

Die Behandlung von $L$ mit 1.3. ist schon vor der Differentialrechnung möglich, teilweise sogar vor der Behandlung der Stetigkeit.

2. Zur axiomatischen Einführung der Exponentialfunktion:
Gibt es eine Funktion $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (später $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$) mit

2.1. <u>entweder</u>

(1) $E$ ist differenzierbar,

(2) für alle $x,y \in \mathbb{R}$ ist $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$
(d.h. $E: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^+,\cdot)$ ist ein Homomorphismus),

[(3) $E'(0) = 1$] ;

2.2. <u>oder</u>

(1) $E$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ,

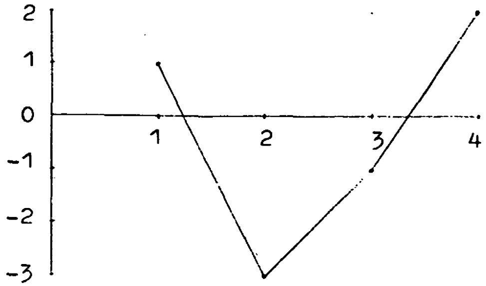
(2) $E' = E$ ,

[(3) $E(0) = 1$] .

G. Fillbrunn: <u>Hilfen zur Veranschaulichung und zur Abstraktion in der Linearen Algebra</u>

Die von mir gemachten Erfahrungen zeigen, daß in der Linearen Algebra noch vermehrt Anschauungshilfen zur Verfügung gestellt werden müssen. Solche und Hilfen zur Abstraktion können gewonnen werden, wenn man dem n-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , das eine Funktion darstellt mit der Definitionsmenge $\{1,...,n\}$ und der Zielmenge $\mathbb{R}$ , umkehrbar eindeutig einen Streckenzug zuordnet. Diese Zuordnung geht aus dem Beispiel

$$\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\\2\end{bmatrix} \longmapsto$$




hervor. Auf diese Art lassen sich nicht nur ein-,zwei-,drei-dimensionale, sondern auch höherdimensionale Vektorräume erzielen.

Von hier ausgehend, kann man zu zugehörigen affinen Räumen vorstoßen und windschiefe, parallele und sich schneidende Geraden betrachten. Man kann durch Zeichnung feststellen, daß z.B.

die Geraden $g_1 : \mathfrak{r} = \begin{bmatrix}3\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$, $h_1 : \mathfrak{r} = \begin{bmatrix}-1\\-3\\-2\\0\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-3\end{bmatrix}$

windschief,

die Geraden $g_2 : \mathfrak{r} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\\-2\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}2\\-2\\-2\\-4\\0\end{bmatrix}$, $h_2 : \mathfrak{r} = \begin{bmatrix}-3\\-2\\2\\-1\\1\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}2\\-2\\-2\\-4\\0\end{bmatrix}$

parallel sind und

die Geraden $g_3 : \mathfrak{r} = \begin{bmatrix}3\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$, $h_3 : \mathfrak{r} = \begin{bmatrix}0\\1\\3\\-3\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}2\\-1\\-2\\2\end{bmatrix}$

einen einelementigen Durchschnitt haben.

Es gelingt auch verhältnismäßig leicht, das Skalarprodukt, das die kanonische Basis als orthonormierte Basis hat, als Integral zu deuten.

L. Fischer: <u>Das Integral als Grenzwert einer Folge von Integralen von Treppenfunktionen</u>

Das Integral wird im Unterricht häufig durch eine Intervallschachtelung aus Unter- und Obersummenfolge definiert. Dieser

Weg benutzt eine ganz speziell gewählte Zerlegungsfolge für das Integrationsintervall. Für beliebige Zerlegungsfolgen ergibt sich i.A. keine Intervallschachtelung mehr.
Man greift daher zunächst auf einfachere Funktionen, die Treppenfunktionen, zurück. Das Integral einer Treppenfunktion

$t : [a,b] \to R$ wird definiert durch : $I(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$ ,

mit $x_o = a$ , $x_n = b$ . Es läßt sich zeigen, daß die Zahl $I(t)$ von der benutzten Intervallzerlegung unabhängig ist.
Funktionen $f$, die in $[a,b]$ stetig sind, lassen sich nun durch Treppenfunktionen $t$ "beliebig gut" approximieren.
Als Maß für die Güte der Approximation wird die Supremumsnorm $\|f-t\|$ genommen. Insbesondere kann man zu einer in $[a,b]$ stetigen Funktion $f$ eine Folge $n \to t_n$ von Treppenfunktionen finden, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.
Das Integral $I(f)$ einer in $[a,b]$ stetigen Funktion $f$ wird nun definiert durch: $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(t_n)$ . Dieser Wert hängt nicht von der gewählten gegen $f$ gleichmäßig konvergierenden Folge von Treppenfunktionen ab.
Es ergeben sich jetzt leicht wichtige Integraleigenschaften: das Integral ist linear, monoton und intervalladditiv.

H. Kittler: <u>Ein Vorschlag zur Behandlung von stochastischen Fragen in einem Grundkurs Analysis</u>

Es soll der Versuch unternommen werden, Probleme der Stochastik in einen Grundkurs Analysis einzubauen, ohne diesen umzufunktionieren. Dabei kann der Analysiskurs eine wertvolle Bereicherung an Motivationen und Anwendungen erfahren.
Eine zu starke Belastung des Analysiskurses muß allerdings vermieden werden. Das ist insbesondere dann möglich, wenn einige Grundlagen über Ereignisse und Wahrscheinlichkeit bereits aus der Mittelstufe vorausgesetzt werden können.
Dann lassen sich in diesem Kurs viele Fragen untersuchen, die mit Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsfunktionen (bzw. Dichtefunktionen) und Verteilungsfunktionen zusammen-

hängen. Da hier i.a. die Exponentialfunktion nicht zur Verfügung steht, liegt es nahe, Verteilungsfunktionen zu behandeln, die stückweise ganzrational sind. Die Behandlung solcher Verteilungsfunktionen ist der eigentliche Kern dieses Vorschlags. Es wird weiter gezeigt, wie sich dabei der Integralbegriff einführen läßt.
In der Diskussion zeigte sich, daß die Meinung über die Zweckmäßigkeit eines solchen Vorgehens geteilt war. Es wurde allgemein anerkannt, daß auf diese Weise eine Bereicherung eines Analysiskurses erreicht werden kann. Von einem Teil der Teilnehmer wurde jedoch bezweifelt, daß ein solches "Antippen" stochastischer Fragen dem Schüler die Problematik und die Methoden dieses Gebietes überhaupt nahebringen kann. Ein anderer Teil der Kollegen hielt dies aber durchaus für möglich. Wiederum andere Kollegen hatten Bedenken, daß die Zeit in einem Grundkurs dafür überhaupt ausreicht.

A. Koch: <u>Einführung in die Analysis und Differentialgleichungen</u>

Die Grundvorstellung der "linearen Approximation im Kleinen" und ihre Bedeutung soll durch eine frühzeitige - stark numerische - Behandlung von Differentialgleichungen besser herausgestellt werden. Zugleich gewinnt man so auch für andere Fragen der Analysis gute Motivationen.
An einem Abkühlungsvorgang wird die schrittweise Berechnung von Funktionswerten erarbeitet. Eine Betrachtung der Zahlenwerte führt zum Begriff der Halbwertszeit. Vergleich und Bestätigung mit und durch die Erfahrung folgen. Ähnliche Überlegungen an der Entladung eines Kondensators zeigen stärker noch die Verhersagemöglichkeit.
Zusammenfassend ergibt sich die Näherung einer Funktion im Kleinen durch eine Gerade. Tangente als beste Näherung. Die Untersuchung harmonischer Schwingungen vertieft die Betrachtungen und führt zur Motivation der Kettenregel und des Mittelwertsatzes.

R. Müller: <u>Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit elementarer algebraischer Strukturen im Unterricht</u>

Es wurde über einen Unterrichtsgang berichtet, der von der Fragestellung "Was machen wir eigentlich, wenn wir axiomatisieren?" ausgehend, auf elementare Weise die Begriffe syntaktische und semantische Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit einer algebraischen Struktur einführte und ihren Zusammenhang untersuchte. Am Beispiel der Gruppenstruktur wurde eine "Vervollständigung" einer algebraischen Struktur betrachtet:

Das Deduktionsgerüst

{A1 : $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
A2 : $a \cdot e = a$
A3 : $a \cdot \overline{a} = e$
A4 : $a = \overline{\overline{a}}$
G : $a = a$
S1 : Einsetzungsregel für Variable
S2 : Substitutionsregel für Terme}

ist

1. syntaktisch vollständig in dem Sinn, daß jede nicht ableitbare Gleichung, die als Axiom hinzugefügt wird, die syntaktische Widerspruchsfreiheit zerstört, d.h. daß alle zulässigen Gleichungen ableitbar werden.
2. semantisch vollständig in dem Sinne, daß alle allgemeingültigen Gleichungen eines Modells ableitbar werden.

H. Rixecker: <u>Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktion in den Klassen 10 bis 13</u>

Ältere Lehrpläne verlangen die Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktion in Klasse 10. Dies ist ein Überbleibsel aus einer Zeit, in der das Logarithmenrechnen für die angewandte Mathematik eine der wichtigsten Rechentechniken war. Heute sollte in der Klasse 10 das Rechnen mit Potenzen sich ohne viele Begriffsbildungen beschränken auf Iterationsverfahren zur Berechnung von Wurzeln und Logarithmen sowie auf die Handhabung des Rechenstabes.

Im Saarland sind für die Oberstufe ab 1976 fünf Semester Mathematik im Grundkurs obligatorisch vorgesehen. Wir meinen, daß drei Semester lang Analysis betrieben werden sollte, das letzte Semester sollte sich mit Integration und den Funktionen exp, ln, sin, cos, tan befassen.
Nach einem Rückblick auf das Potenzrechnen in den Klassen 5, 7 und 9 wird geschildert, wie in den Klassen 9 und 10 behutsam in mehreren Abstraktionsstufen reelle Zahlen durch Intervallschachtelung bestimmt werden. Erfahrungen aus dem eigenen Unterricht, in dem mitunter auch ein Tischcomputer benutzt wurde, werden mitgeteilt.
Ein Lehrgang zur Einführung der Funktionen ln und exp im ersten Halbjahr der Klasse 12 mit insgesamt 22 Unterrichtsstunden wird geschildert: Einführung von ln als $\int_1^x \frac{dt}{t}$ , Funktionalgleichung, Isomorphismus ln: $(\mathbb{R}^+,\cdot) \to (\mathbb{R},+)$ , exp als $(\ln)^{-1}$ , Ableitungen von ln und exp , Verkettung dieser Funktionen mit Polynomen vom Grad $n \leq 2$ , Anwendungen.

K. Sielaff: <u>Beispiele für methodisches Arbeiten mit dem Computer im Unterricht</u>

Beim Programmieren in einer problemorientierten dialogfähigen Sprache (BASIC, FOCAL) steht im Mittelpunkt der Tätigkeit die Analyse des Problems, z.B. in Gestalt von Flußdiagrammen. Die Übersetzung des Flußdiagramms in BASIC oder FOCAL ist relativ leicht zu erlernen und nur mit geringfügigem Ballast behaftet.
Für eine gründliche und dennoch zügige Einführung in das Programmieren muß geeignetes Übungsmaterial bereitgestellt werden. Dabei kommt es nicht so sehr darauf an, daß der Lehrer ein möglichst komfortables Programm gefunden hat, sondern wichtiger ist das Bereitstellen der vielen Zwischenstufen. Ergänzungen und Varianten eines bereits erarbeiteten Programms dienen dazu, einerseits schnell Möglichkeiten des Programmierens kennenzulernen oder zu befestigen und andererseits Neues über Lösungswege für das mathematische Problem zu erfahren.

Diese Aspekte werden erläutert an Beispielen zum Problem der Teilbarkeit und der Primzahleigenschaft.

G. Wolff: <u>Affine Räume: Drei Axiomensysteme und ihre Äquivalenz</u>

In der mathematischen Literatur gibt es eine Reihe von Axiomensystemen für affine Räume. Wir betrachten für einen Ring $R$ mit $1$ :

a) R-affine Räume im "klassischen" Sinne (siehe etwa [1]) ,

b) R-Parallelogrammräume (= R-affine Räume im Sinne von [2]) ,

c) R-Kreisel (= R-affine Räume im Sinne von W.Bos, unveröffentlicht).

Dabei heißt $\mathfrak{K}$ ein R-Kreisel, falls gilt: $\mathfrak{K} = (A,+,\cdot)$, wobei $A$ eine Menge ist und $+: A\times A\times A \to A$ und $\cdot: R\times A\times A \to A$ Mengenabbildungen sind derart, daß mit den Bezeichnungen $x \underset{p}{+} y :=$ $+(x,p,y)$ , $\lambda \underset{p}{\cdot} y := \cdot(\lambda,p,y)$ universell gilt: $x \underset{p}{+} p = x$ ,

$x \underset{p}{+} y = y \underset{p}{+} x$ , $(x \underset{p}{+} y) \underset{p}{+} z = x \underset{p}{+} (y \underset{p}{+} z)$ , $x \underset{p}{+} y = (x \underset{q}{+} y) \underset{p}{+} q$ ;

$(\lambda\cdot\mu) \underset{p}{\cdot} x = \lambda \underset{p}{\cdot} (\mu \underset{p}{\cdot} x)$ , $(\lambda+\mu) \underset{p}{\cdot} x = \lambda \underset{p}{\cdot} x \underset{p}{+} \mu \underset{p}{\cdot} x$ , $\lambda \underset{p}{\cdot} (x \underset{p}{+} y) =$ $\lambda \underset{p}{\cdot} x \underset{p}{+} \lambda \underset{p}{\cdot} y$ , $\lambda \underset{q}{\cdot} x = \lambda \underset{p}{\cdot} x \underset{p}{+} (1-\lambda) \underset{p}{\cdot} q$ .

Es bezeichne ${}_R\underline{\mathfrak{A}}$ bzw. ${}_R\underline{\mathfrak{P}}$ bzw. ${}_R\underline{\mathfrak{K}}$ die Kategorie der R-affinen Räume bzw. R-Parallelogrammräume bzw. R-Kreisel. Dann lautet die Äquivalenzaussage in knapper kategorientheoretischer Formulierung:

(1) ${}_R\underline{\mathfrak{K}}$ und ${}_R\underline{\mathfrak{P}}$ sind isomorph.

(2) ${}_R\underline{\mathfrak{K}}$ und ${}_R\underline{\mathfrak{A}}$ sind äquivalent. Genauer: Es gibt Funktoren

$${}_R\underline{\mathfrak{K}} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} {}_R\underline{\mathfrak{A}} \quad \text{mit} \quad \Psi\cdot\Phi = id({}_R\underline{\mathfrak{K}}) \ , \ \Phi\cdot\Psi \simeq id({}_R\underline{\mathfrak{A}}) \ .$$


[1] H.-J. Kowalsky: Lineare Algebra. Berlin 1963.

[2] F. Ostermann, J. Schmidt: Begründung der Vektorrechnung aus Parallelogrammeigenschaften. Math.-Phys.Sem.Ber. 10, 47-64 (1963).


H. Wolgast: <u>Die Behandlung von Iterationsverfahren mit Computern</u>

Iterationsverfahren mit reellwertigen Iterationsfunktionen $x \to g(x)$ mit Computern im Mathematikunterricht haben folgende Vorzüge:

1. Es sind typische, stark verallgemeinerungsfähige Verfahren der angewandten Mathematik.
2. Sie erlauben eine einfache anschauliche Deutung und die Möglichkeit, auf anschaulichem Niveau bereits Konvergenzkriterien zu formulieren und präzisieren.
3. Fixpunktsätze für kontrahierende Abbildungen können auf mehreren Abstraktions-Niveaus hergeleitet werden.
4. Fehlerabschätzungen können angegeben werden.
5. Im Rahmen von Konstruktionsverfahren für gut konvergente Verfahren kann das Newton-Verfahren als im allgemeinen quadratisch konvergentes Verfahren entwickelt werden.
6. Programme für Computer zur experimentellen Untersuchung rekursiver Folgen sind einfach.

Diese Thesen wurden an einem speziellen Beispiel demonstriert. Als Computer wurde ein Gerät mit der problemorientierten Sprache BASIC (hp 9830) verwendet.

H. Zeitler: <u>Kreisgeometrie, ein antiquiertes Thema?</u>

Zunächst wurden allgemeine Vorstellungen zum Geometrieunterricht am Gymnasium entwickelt.
Unterstufe: Experimentelles Arbeiten mit konkretem Material.
Mittelstufe: Lokales Deduzieren bei ständigem Substanzerwerb.
Oberstufe: "Axiomatisieren" vorhandenen Materials, Arbeiten mit Axiomensystemen .
Am Beispiel der Kreisgeometrie sollten dann die Gedanken zur Mittel- und Oberstufe konkretisiert werden.

<u>1. Kreisgeometrie in der Mittelstufe (naiv-anschaulich)</u>

1.1 Die Inversion
Definition durch eine Konstruktionsvorschrift.
Der Punkt $\infty$ , die Möbius-Punkte.
Eigenschaften der Inversion (Fixkreise, Fixpunktkreis, Winkeltreue, Kreistreue), die Möbius-Kreise.

1.2 Sätze, bewiesen durch Inversion
Das Kreiskettenproblem von J. Steiner, die Hexlets von Soddy, der Schließungssatz von Miquel.

2. Kreisgeometrie in der Oberstufe (axiomatisch-abstrakt)

2.1 Ein Axiomensystem

Eine Inzidenzstruktur heißt Möbius-Ebene, wenn drei Axiome erfüllt sind:

I Einzigkeitsaxiom

II Berühraxiom,

III Reichhaltigkeitsaxiom.

2.2 Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit, Vollständigkeit

2.3 Deduktive Möbius-Geometrie

Das Referat schloß mit einem Zitat von H. Weyl. Dieser stellte fest, man könne erst dann formalisieren und axiomatisieren, wenn genügend math. Substanz vorhanden wäre.

G. Ziebegk: Grundkurs Differential- und Integralrechnung I im Berliner Plan

Das Konzept geht von der Prämisse aus, daß sich der Kurs im wesentlichen an den zukünftigen Nichtmathematiker wendet. Demnach soll eine anwendungsnahe exemplarische Erarbeitung infinitesimaler Begriffe geboten werden, in der der Ableitungskalkül schnell bereitzustellen ist. Zeit und Ziel bedingen ein Rückschrauben des Präzisionsniveaus.
Der Themenkatalog enthält die Differential- und Integralrechnung, jeweils nur angewandt auf ganze rationale Funktionen. Der Stetigkeitsbegriff fehlt, ein eigenständig entwickelter Grenzwertbegriff ist nicht unbedingt erforderlich.

Das Hauptproblem ist die Einführung des Ableitungsbegriffes in einem Zeitraum von 3 - 4 Wochen (dreistündig).
1. Weg (nach H. Knabe, Berlin): Diskussion der Begriffe "Näherungswert" und "Fehlerschranke" an einfachen Beispielen, Rechnen mit Näherungswerten, Sekantensteigungen in einem Punkt; die Ableitung wird als Zahl definiert, die durch die Sekantensteigungen mit beliebig vorgegebener Fehlerschranke approximiert werden kann.
2. Weg: Klärung des Grenzwertbegriffes bei monotonen Folgen, Übertragung auf konvergente Folgen, Untersuchung von Folgen von Sekantensteigungen auf Konvergenz, Definition der Ableitung mit Hilfe des Folgenbegriffes.

Das Aufgabenmaterial muß die auf dem Ableitungsbegriff aufbauenden Zusammenhänge in variationsreichen Fragestellungen für den Schüler verfügbar machen, schematisches Kalkülrechnen ist auf ein Mindestmaß zu beschränken. Untersuchungen von einparametrigen Funktionenscharen ergeben auch bei der Beschränkung auf ganze rationale Funktionen ein hinreichend vielfältiges Aufgabenmaterial.

## Diskussion über die Gestaltung des Analysisunterrichts in der Schule.

I. Fünf Thesen bzw. Fragen, die Prof. Karcher zur Diskussion stellt.

1) Alle Begriffe, die eingeführt werden, müssen bald nach ihrer Einführung in mindestens einer Situation ihre Leistungsfähigkeit beweisen.
   Beispiele: a) Der Begriff der Vollständigkeit zeigt seine Leistungsfähigkeit bei der Definition des Integrals und der Umkehrfunktion. Die Behandlung von Folgen ohne irrationale Grenzwerte zeigt die Leistungsfähigkeit nicht.
   b) Der Begriff der linearen Approximation zeigt seine Leistungsfähigkeit schon bei der Behandlung der rationalen Funktionen. Betont man in der Differentialrechnung statt des Approximationsgesichtspunkts eher den Mittelwertsatz und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, so zeigt sich die Leistungsfähigkeit erst bei der Anwendung z.B. auf die Logarithmus- und Exponentialfunktion.
2) Der Kern der Analysis ist die Differential- und Integralrechnung und ihr Zusammenspiel. Der Begriff der Stetigkeit ist dagegen von zweitrangiger Bedeutung.
3) Es sollen nicht nur Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sondern auch Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ betrachtet werden.
4) Soll man sich in Grund- oder Leistungskursen auf "globale" Begriffe beschränken?
   Beispiel: Begriff der "globalen" Lipschitz-Stetigkeit

oder der gleichmäßigen Stetigkeit anstelle einer "lokalen" Stetigkeit.

5) Zumindest für Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ ist die $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit nicht das, was wir anschaulich meinen. Ein Versuch, mit einfacheren Grundbegriffen auszukommen, ist lohnend.

II. Gliederung für Analysislehrgänge.

1) a) Folgen und Vollständigkeit
   b) Stetigkeit (kurze Behandlung)
   c) Differenzierbarkeit (lineare Approximierbarkeit hervorheben)
   d) Integralrechnung (wahlweise zwei Möglichkeiten)
   e) Zusammenspiel von c) und d).

2) a) Folgen und reelle Zahlen in kurzer Behandlung
   b) Stetigkeit (kurze Behandlung oder Verzicht)
   c) Differenzierbarkeit (lineare Approximierbarkeit hervorheben)
   d) Integralrechnung (wahlweise zwei Möglichkeiten)
   e) Zusammenspiel von c) und d).

Jeder der beiden Wege ist gangbar unter Zugrundelegung

a) des klassischen Grenzwertbegriffs,
b) der vereinfachten "lokalen" Grundbegriffe,
c) der vereinfachten "globalen" Grundbegriffe.

III. <u>Diskussion</u>

Zu These 1): Diese These fand breite Zustimmung. Der Begriff der Leistungsfähigkeit muß jedoch unter zwei Aspekten gesehen werden:

a) die "innermathematische" Leistungsfähigkeit (Beispiel: Begriff der Vollständigkeit)
b) die "außermathematische" Leistungsfähigkeit (in den Anwendungen).

Die Meinung darüber, auf welchem Aspekt das Schwergewicht liegen sollte, war geteilt. Unbestritten war, daß die Leistungsfähigkeit eines Begriffs (im einen oder anderen Sinne) allein nicht seine Verwendung im Unterricht rechtfertigt. (These: Stetigkeit ist leistungsfähig, aber andere Begriffe stehen im Vordergrund.) Eine kurze Behandlung der Stetigkeit ist wünschenswert, da sie sich in der Differentialrechnung als leistungsfähig erweist.

Zu These 2): Der erste Satz dieser These wurde allgemein unterstützt. Es wurde jedoch darauf hingewiesen, daß die zentrale Stellung der Differential- und Integralrechnung in den "Empfehlungen" *) nicht angemessen zur Geltung kommt; der Zeitaufwand für den Stetigkeitsbegriff sollte im Gegensatz zu den "Empfehlungen" weitaus weniger als die Hälfte der zur Verfügung stehenden Zeit betragen. Über den Zeitpunkt der Behandlung der Stetigkeit gab es keine Übereinstimmung. Als Argument für eine möglichst frühzeitige Behandlung wurde die Entzerrung von Schwierigkeiten bei der Einführung der Differenzierbarkeit angeführt. Dieser Auffassung wurde mit folgender Begründung widersprochen: Stetigkeit ist ein Hilfsbegriff und soll erst dann behandelt werden, wenn für den Schüler ihre Nützlichkeit bei der Erörterung eines interessanten Problems deutlich wird. Es ist abzuwägen, ob durch die Behandlung der Stetigkeit die Integralrechnung zu kurz kommt.
Zur Diskussion stand die folgende Liste von Sätzen über stetige Funktionen:

a) Zwischenwertsatz
b) Existenz von Extrema bei kompakten Intervall
c) Abgeschlossenheit der stetigen Funktionen unter algebraischen Operationen.

Es wurde festgestellt, daß man prinzipiell Differential- und Integralrechnung ohne einen dieser Sätze betreiben kann. Allerdings läßt sich beispielsweise die Produkt-

---

*) gemeint sind die Empfehlungen für den Kursunterricht in Mathematik des Kultusministeriums von Nordrhein-Westfalen.

regel sehr einfach beweisen, wenn Satz c) zur Verfügung steht. Ein Arsenal stetiger Funktionen sollte in jedem Fall bereitgestellt werden.

Zu These 3): Es herrschte Übereinstimmung darüber, daß die Behandlung von Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ im Hinblick auf die Physik nützlich ist. Der Unterschied von Graph und Bild einer Abbildung läßt sich dabei gut verdeutlichen. Dieser Problemkreis sollte aber auf einen engen Rahmen beschränkt bleiben. Der Begriff der Differenzierbarkeit für solche Abbildungen ist jedoch unbedingt zu erörtern; dies führt zu einem besseren Verständnis der linearen Approximation.

Zu Frage 4): Prof. Karcher motiviert seine Frage: Viele mathematische Theorien definieren "lokale" Eigenschaften und beweisen "globale" Sätze. Es scheint trotzdem zur Vereinfachung für Grundkurse vertretbar, mit "globalen" Eigenschaften zu arbeiten.
Ein wesentlicher Einwand gegen die Verwendung der "globalen" Lipschitz-Differenzierbarkeit war: Differenzierbarkeit ist (in jedem Fall) eine lokale Eigenschaft; daher entsteht auf diese Weise ein Bruch in der Vorstellungswelt des Schülers. (Dies ist kein Argument gegen die Verwendung der "lokalen" Lipschitz-Differenzierbarkeit.) Weiterhin wurde angemerkt, daß die ausschließliche Verwendung der "globalen" Lipschitz-Stetigkeit der (auch bestrittenen) Verpflichtung der Schule widerspricht, die sonst gebräuchlichen Begriffe mitzuteilen.

Zu These 5): Prof. Karcher skizzierte ein Beispiel einer stetigen Abbildung $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, welche sich mit dem "anschaulichen Stetigkeitsbegriff" schwer vereinbaren läßt. Anschließend stellte er die Frage, ob akzeptiert wird, daß der klassische Stetigkeitsbegriff unanschaulich ist. Befürworter dieser These wiesen darauf hin, daß es zahlreiche Beispiele für stetige Funktionen mit "schrecklichen"

Eigenschaften gibt; eine "typische" stetige Funktion existiere nicht. Dagegen wurde geäußert, daß man sich die Klasse aller stetigen Funktionen natürlich nicht vorstellen könne; es komme nur darauf an, unabhängig von der Anschauung durch eine geeignete Definition aus der Gesamtheit aller Funktionen eine wichtige Klasse auszusondern, die insbesondere die im anschaulichen Sinne stetigen Funktionen enthält; dabei seien freilich "schreckliche" Funktionen miterfaßt; das gleiche Problem stelle sich auch für den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit.

Zu II: Prof. Karcher wirft die Frage auf, ob der erste Weg nicht schlechter ist, weil die Definition der Stetigkeit mit Hilfe des Folgebegriffs die Intuition von Stetigkeit nicht fördert. Im übrigen wurde angeregt, den zweiten Weg unter Verwendung der lokalen oder globalen Lipschitz-Differenzierbarkeit zu erproben.

L. Fischer (Lahr)
G. Wolff (Konstanz)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft