MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 21/1974

Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen

19.5. bis 25.5.1974

Die diesjährige, von O. Haupt (Erlangen) und R. Schneider (Freiburg i.Br.) geleitete Tagung über "Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen", deren Vortragsprogramm wie vorgesehen am 20.5. begann, zeichnete sich durch starken Besuch und eine besonders große Zahl gehaltener Vorträge aus. Neben einer Ausweitung der behandelten Themen war eine besonders aktive Beteiligung der Teilnehmer, die dieses Mal in gleichen Anzahlen aus dem Ausland und dem Inland kamen, zu beobachten. Es erscheint erwähnenswert, daß gerade auch bei den jüngeren Teilnehmern konkrete, anschaulich formulierbare, dabei aber keineswegs leicht lösbare Untersuchungsgegenstände im Vordergrund standen. Daß die Tagungen ihre Wirkung nicht verfehlen, kam unter anderem auch darin zum Ausdruck, daß zu dem einen oder anderen Problem, das in früheren Tagungen aufgetreten oder angeregt worden war, dieses Mal eine Lösung vorgetragen werden konnte. Es steht zu hoffen, daß diese anregende Wirkung durch eine den Teilnehmern nachträglich zur Verfügung gestellte Sammlung der in den Diskussionen aufgetretenen offenen Fragen und sonstiger aussichtsreicher Problemstellungen noch gefördert wird.

Teilnehmer

G.Aumann, München	E.Ehrhart, Straßburg (Frankreich)
J.Bair, Lüttich (Belgien)	G.Ewald, Bochum
T.Bisztriczky, Toronto (Canada)	Wm.J.Firey, Corvallis (USA)
J.Bokowski, Berlin	A.Florian, Salzburg (Österreich)
J.H.H.Chalk, (USA)	R.Fourneau, Lüttich (Belgien)
L.Danzer, Dortmund	H.Groh, Kassel
D.Derry, Vancouver (Canada)	P.Gruber, Linz (Österreich)

R.Hammer, Stuttgart
O.Haupt, Erlangen
E.Heil, Darmstadt
J.Höbinger,Linz(Österreich)
B.Kind, Bochum
F.Klein, Paderborn
P.Kleinschmidt,Bochum
M. Kömhoff, Freiburg
J.Kraeft, Bochum
Krautwald, Konstanz
H.Künneth, Erlangen
N.D.Lane,Hamilton(Canada)
D.Larman, London(UK)
P.Mani,London(UK)
P.McMullen, London(UK)
U.Pachner, Bochum
J.R.Reay, Bellingham(USA)
J.Schaer,Calgary(Canada)
P.Scherk,Toronto(Canada)
R.Schneider, Freiburg
F.J.Schnitzer,Leoben(Österreich)
Chr.Schulz, Bochum
G.C.Shephard, Norwich(UK)
W.Spiegel, Berlin
K.Strambach, Erlangen
J.Turgeon,Montreal(Canada)
G.Valette, Brüssel(Belgien)
W.Weil,Freiburg
J.M.Wills, Siegen
T.Zamfirescu, Dortmund

Vortragsauszüge

G.AUMANN: Konvexartige Hüllenoperationen

Die für den Satz von den extremen Punkten kompakter konvexer Teilmengen des euklidischen n-dimensionalen Raumes charakteristische Funktionalgleichung für t und h

$$hX = h(\bigcap \{tY : Y \text{ kompakt} \wedge hY = hX\}),$$

worin t bzw. h die Bildung der abgeschlossenen bzw. abgeschlossenen konvexen Hülle bezeichnen, wird unter allgemeineren Voraussetzungen diskutiert; für den wesentlichen Fall, nämlich daß $t \leq h$, wird eine "direkte" Konstruktion aller Lösungen t,h der entsprechenden Funktionalgleichung bereitgestellt.
Die Besonderheit der klassischen Konvexität, nämlich daß die Extrempunktmengen im Verband der abgeschlossenen Mengen ein Ideal nach unten bilden, wird durch den Begriff der "i-Konvexität" einbezogen; die Konstruktion von i-Konvexitäten benötigt allerdings transfinite Hilfsmittel.

J.BAIR: Characterizations of the elements of a convex partition

Our purpose is to characterize the elements of a convex partition in order to obtain a geometric separation of an arbitrary family of sets. We describe the linear access and

the intrisic core of a properly convex element of a finite convex partition and we get a lower bound of a convex partition which contains a linearly bounded set.
Our results are true in any real linear space, but they are more simple in a finite dimensional space.

T. BISZTRICZKY: Hypersurfaces of order two

Starting with Marchaud's results on surfaces of order two in P^3, the differentiable hypersurfaces in real projective n-space P^n are classified. This classification turns out to be a straigtforwar generalization of that of the quadrics in P^n. In addition, Marchaud's theorem that a certain type of surface of order two in P^3 is necessarily a quadric, is generalized for P^n.

J. BOKOWSKI: Gitterpolyeder und Wills'sche Vermutung

K^d sei die Klasse der konvexen Körper im $E^d (d \geq 1)$ und $C_j \in K^d$ ein Einheitswürfel, $C_j = \{(x_1, \dots, x_d) \in E^d / 0 \leq x_i \leq 1, i=1, \dots, j;\ x_i = 0 \text{ sonst}\}$.
Gesucht wird eine obere Schranke für die Anzahl $G(K)$ der in $K \in K^d$ liegenden Gitterpunkte $G = G(K) = \text{card}\{(x_1, \dots, x_d) \in K / x_1, \dots, x_d \in \mathbb{Z}\}$ in Form eines mit G vergleichbaren Funktionals $\emptyset$: $K^d \to \mathbb{R}$, das "bessere" Eigenschaften als G besitzt.
G ist (im Sinne von Hadwiger) additiv, monoton, invariant gegenüber der Einbettung in einen Raum höherer Dimension und für $C_j (j=0, \dots, d)$ gilt $G(C_j) = 2^j$. Es gibt genau ein Funktional W: $K^d \to \mathbb{R}$, das neben den angegebenen Eigenschaften von G zusätzlich bezüglich der vollen Bewegungsgruppe invariant ist.
Die Wills'sche Vermutung $G(K) \leq W(K)$ für alle $K \in K^d$ wird auf allgemeine Gitterpolyederklassen übertragen und diskutiert.

J.H.H. CHALK: Convex Cones

Let K denote a closed convex half-cone with vertex at the origin O in $\mathbb{R}^n$ and containing inner points but no complete straight line. For points x in K,

$$d = d(x, \partial K) = \inf_{\substack{k \in K \\ x \in M(k)}} V(M(k)),$$

where $V(M(k))$ denote the volume of the Macbeath region $M(k) := K \cap (2k - K)$, provides a useful example of a "distance" of the point $x \in K$ from the boundary ∂K of K which is invariant under volume-preserving affine transformations of $\mathbb{R}^n$. For points x outside K, the region M(k) is useless and (cf., J.H.H. Chalk and C.A. Rogers, Crelle's J., 230(1968), 139-166) the impasse was partially resolved by defining somewhat similar regions for the whole cone $D = K \cup (-K)$; for example

$$S(k) = S(K,k) = 2M(k)-2k$$

$$\text{or} \quad C(k) = C(K,k) = \operatorname{conv}(M(k), -M(k)),$$

$$\text{or} \quad A(H) = A(K,H) = \operatorname{conv}\{(K\cap H)\cup(-K\cap H)\}.$$

Apart from factors, bounded in terms of n, these led to "distances" d_i (i=1,2,3) which were essentially equivalent and were useful for points x outside D.

D. DERRY: Über einen Satz von Hjelmslev

Es sei K eine geschlossene differenzierbare Kurve im reellen projektiven Raum L_n der lokalen Ordnung n. Hat K keine n-2-Sekanten, dann zeigte Hjelmslev, daß K Ordnung n hat. Ein entsprechender Satz für Polygone wird bewiesen.

E. EHRHART: Die Polyedermethode in der Kombinatorik

Es sei die Lösungsanzahl j_n eines Systems von Gleichungen und Ungleichungen der Form $\sum a_i x_i = \alpha n$, $\sum b_i x_i \geq \beta n$ zu bestimmen (alle Buchstaben bezeichnen ganze Zahlen, n ist ein Parameter). Ist j_n weder null noch unendlich, so definiert das System einen geschlossenen konvexen Polyeder P_n, und j_n ist die Anzahl seiner ganzen Punkte. Sind die Eckpunkte von P_1 ganz, so ist j_n ein Polynom, sind sie rational, so ist es ein gemischtes Polynom (das heißt seine Koeffizienten sind periodische Funktionen von n). Die Eckpunkte geben sofort eine lineare Rekursionsformel für j_n. Ersetzt man in den Ungleichungen $\geq$ durch $>$, so zählt die Lösungsanzahl i_n des Systems die inneren Gitterpunkte des k-dimensionalen P_n. Es gilt das merkwürdige Recipzozitätsgesetz $i_n = (-1)^k j(-n)$.

Ich behandle mehrere Probleme die zur Bestimmung der Lösungsanzahl eines Systems obiger Art führen und zeige anhand dieser Beispiele, wie man die Funktion j_n (oder i_n) praktisch ermittelt.

Literatur: E. Ehrhart, "Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire", J. reine angew. Math., 1967, und "Polynomes arithmétiques et méthode des polyédres en Combinatoire", Inst. de rech. math. avancée de Strasbourg, 1974.

W.J. FIREY: Kinematic measures of support figures

For $i = 0, 1$, let ω_i be a Borel set of directions in Euclidean n-space E^n, and let σ_i be the inverse spherical image on the boundary of convex body K_i of ω_i; g signifies an element of the group G of rigid motions of E^n. We say $g\sigma_1$ supports K_o in σ_o if $g\sigma_1 \cap \sigma_o \neq \emptyset$ and $gK_1 \cap K_o$ is a subset of the boundary of K_o. We define an invariant measure $\bar{\mu}(M)$ for the set M of all g such that $g\sigma_1$ supports K_o in σ_o. This definition is analogous to the Minkowski definition of surface area, here applied in G with its Haar measure. Within a normalization

$$\bar{\mu}(M) = \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} S_{n-q-1}(K_o;\omega_o)\ S_q(K_1;\omega_1),$$

where $S_q(K_1;\omega_1)$ denotes the q-th area function of K_1 at ω_1 as defined by Fenchel and Jessen. This solves certain collision problems. For example: Suppose K_i in E^3 are bombarded at random by equal balls and that σ_i are inverse spherical images on K_i of a Borel set of directions ω. If, for all choices of ω, the probability that a ball hits K_o in σ_o is the same as the probability that a ball hits K_1 in σ_1, then K_1 is a translate of K_o, if $S_q(K_1;\Omega) = S_q(K_o;\Omega)$, $q = 2,1,0$.

A. FLORIAN: Reguläre Mosaike und Newton'sche Zahlen

Eine Menge kongruenter konvexer Scheiben, die paarweise keinen inneren Punkt gemeinsam haben, wird eine Packung genannt. Zwei Scheiben einer Packung, die einen gemeinsamen Randpunkt haben, heißen Nachbarn. L. Fejes Tòth definierte die Newton'sche Zahl einer Scheibe s als die Maximalzahl kongruenter Exemplare, die sich ohne gegenseitige Überlappung an s anlegen lassen. Ist in einer Packung kongruenter Scheiben die Anzahl der Nachbarn einer jeden Scheibe gleich ihrer Newton'schen Zahl, so spricht man von einer Maximalpackung und im analogen Sinn von einem Maximalmosaik. Nach K. Böröczky ist jedes euklidische oder sphärische reguläre Mosaik $\{p,q\}$ (d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$) Maximalmosaik. Im Vortrag wird in teilweiser Beantwortung einer von L. Fejes Tòth aufgeworfenen Frage gezeigt, daß es unter den regulären hyperbolischen Mosaiken $\{p,q\}$ mit $q \geq 4$ bloß endlich viele Maximalmosaike gibt.

- 6 -

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R. FOURNEAU: Lattices of closed convex sets

Answering a question of Ky Fan, we characterize the isomorphisms, the ideals and the congruences of two lattices of closed convex sets.

H. GROH: Convexity and flat planes

A flat plane is a pair of a 2-manifold P ("points") and a set L ("lines") of closed 1-manifolds in P, such that any two points lie on exactly one line. -
We call (P,L) an X-plane if P is homeomorphic to X.
All R^2-planes whose automorphism group $\underline{a}$ P contains a subgroup G with dim G=2, G point transitive, are classified.
In this result it turns out that in all cases the lines may be described as convex arcs.
Conjecture: All R^2-planes with dim $\underline{a}$ P ≥ 2 can be classified.
Problem: Determine the additional (symmetry) properties of the convex arcs if dim $\underline{a}$ P ≥ 3.

P. GRUBER: Fixpunkte von Kontraktionen im $\mathbb{R}^n$

Ist auf einem reellen linearen Raum L eine Norm $\|\ \|$ vorgelegt, dann nennt man eine Abbildung f von L in sich kontrahierend, wenn für alle $x,y \in L$ gilt $\|f(x)-f(x)\| \leq \|x-y\|$. Eine der Fragen, die bei der Untersuchung von Fixpunkten einer solchen Abbildung f auftritt, ist die nach der Gestalt der Menge aller Fixpunkte von f. Im Vortrag wird diese Frage für den zweidimensionalen Fall vollständig beantwortet und im Fall endlicher Dimensionen > 2 für glatte, streng konvexe Normen. Daneben werden verwandte Probleme behandelt.

R. HAMMER: Über axiomatische Konvexität und die Beziehung zur zur elementaren Konvexität

Es gibt verschiedene Erweiterungen des Konvexitätsbegriffs, so daß man "konvexe Mengen" in nicht affinen Räumen definieren kann. Dabei geht man gewöhnlich von Eigenschaften konvexer Mengen des E^n aus und fordert diese Eigenschaften axiomatisch für die verallgemeinerte Konvexität. So kann man die Mengen eines Mengensystems S auf einer Grundmenge M "konvex" nennen, wenn Ø, M und der Durchschnitt von Mengen aus S wieder zu S gehören. Gilt in einem solchen System konvexer Mengen einer der Sätze von Helly,

Radon oder Carathéodory, so soll das System die "Helly"-, "Radon"- oder "Carathéodory"-Eigenschaft haben.
Levi zeigt, daß in einem System konvexer Mengen aus der Radon-Eigenschaft die Helly-Eigenschaft folgt. Hier wird nun untersucht, was für weitere Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften existieren, in Abhängigkeit von zusätzlichen Axiomen für das zugrundegelegte System S konvexer Mengen. Außerdem wird gezeigt, wie durch Hinzunahme geeigneter Axiome S als das System der elementar-konvexen Mengen eines affinen Raumes charakterisiert werden kann.

E. HEIL: Affine Gleichdicke

Sei K ein konvexer Körper im affinen Raum A^n $(n > 2)$, V das Volumen des kleinsten umschriebenen Parallelotpos, v das des größten einbeschriebenen verallgemeinerten Oktaeders. Es wird über ein Ergebnis von W. Krautwald berichtet: Genau dann gilt $n!v = V$, wenn K affines Bild eines Körpers konstanter Breite ist. Beim Beweis wird der Satz von Blaschke benutzt, daß ein glatter 3-dimensionaler konvexer Körper ein Ellipsoid ist, wenn seine Projektionen von Radonschen Kurven berandet werden. Größte einbeschriebene Oktaeder und kleinste umschriebene Parallelotope führen auf konjugierte Durchmesser, so daß man, wie bekannt, auf diese Weise in einem n-dimensionalen Banachraum ein normiertes Biorthogonalsystem erhält. Bei unendlicher Dimension ist die Situation vermutlich insofern anders, als man von einem beliebigen Vektor ausgehend ein unendliches normiertes Biorthogonalsystem konstruieren kann.

J. HÖBINGER: Über eine Kennzeichnung des Ellipsoids von Aitchison, Petty und Rogers

Ein konvexer Körper K mit $\dim K \geq 3$, der ein falsches Zentrum $p \in \operatorname{int} K$ besitzt, ist ein Ellipsoid. Diese Kennzeichnung der Ellipsoide von Aitchison, Petty und Rogers wird erweitert auf den Fall, daß das falsche Zentrum p am Rand von K bzw. im Äußeren von K gelegen ist.

P. KLEINSCHMIDT: Nicht-simpliziale Sphären mit wenigen Ecken

Ein Zellkomplex, dessen Zellen konvexe Polytope sind, heißt n-Sphäre, wenn seine Trägermenge homöomorph zum Rand der

(n+1)-dimensionalen Einheitskugel ist.
Sind alle Zellen einer n-Sphäre S Simplizes, so heißt S "simplizial". Mani zeigt, daß alle simplizialen n-Sphären mit n+4 Ecken isomorph (im Sinne der kombinatorischen Isomorphie) zum Randkomplex eines (n+1)-Polytopes sind (Journal of Combinatorial Theory (A) 13, 346-352, 1972).
Das Referat beschäftigt sich mit der folgenden Verallgemeinerung des Resultats von Mani: Jede n-Sphäre mit n+4 Ecken ist isomorph zum Randkomplex eines (n+1)-Polytopes.
Im Beweis werden Eigenschaften der Schattengrenzen von Polytopen ausgenutzt. Außerdem ergibt sich eine neue Anwendungsmöglichkeit der Methode der Gale-Diagramme.

H. KÜNNETH: Ein n-Scheitel-Satz

Es sei C eine orientierte (geschlossene) einfache Kurve und K ein Kreis in der euklidischen Ebene. Vier Schnittpunkte p_1, p_2, p_3, p_4 von $C \cap K$ heißen "normales Quadrupel", wenn sie auf C direkt aufeinander folgen und bei einer Orientierung von K $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ auf K. Gibt es m solche normale Quadrupel, die paarweise gemeinsame Elemente haben können, so hat C mindestens m Scheitel.

N.D. LANE: On singular points of normal arcs of cyclic order four

An arc α in the inversive plane is normal if each circle C can be oriented so that the points of $C \cap \alpha$ lie in the same order on C as they do on α. The ideas of the expansion and contraction theorems of O. Haupt and H. Künneth are used to show, by an elementary argument, that an endpoint of an arc α of cyclic order four is not singular and that the number of singular points of α is at most 11.

D.G. LARMAN: Almost ellipsoid sections of a convex body

(Joint work with P. Mani). If C is a centrally symmetric convex body in E^n with centre O, let D be an ellipsoid with centre O such that $(1-\varepsilon)D \subset C \subset D$. Suppose also that ε is made as small as possible, laken over all such D. Then the transformation T which lakes $(1-\varepsilon)D$ into the unit ball B^n is called a standard transformation for C. If C is not necessarily centrally symmetric and $p \in \operatorname{int} C$ we say that T is a standard transformation of C with respect to p if T is a standard transformation for $\{C \cap (2p-C)\}$.

The smallest ε for which there exists a ball F of centre q such that $\varepsilon q+(1-\varepsilon) F \subset C \subset F$ is called the asphericity of C and denoted by $\alpha(C)$. If G is a k-dimensional subspace of E^n let C/G denote the orthogonal projection of C into G. Let $\mu_{n,k}$ denote the Haar measure of the k-dimensional subspaces of E^n.

We prove: Theorem 1 Given $0<\varepsilon<1$, $0<\delta<1$ and a natural number $k>1$ there exists $N(\varepsilon,\delta,k)$ such that for all centrally symmetric convex bodies C of dimension $n \geq N(\varepsilon,\delta,k)$ and all standard transformations T of C

$$\mu_{n,k}\{G: \alpha(T(C)\cap G)<\varepsilon,\ \alpha(T(G)/G)<\varepsilon\} > 1-\delta$$

Theorem 2 Given $0<\varepsilon<1$, $0<\delta<1$ and a natural number $k>1$ there exists $N(\varepsilon,\delta,k)$ such that for all convex bodies C of dimension $n \geq N(\varepsilon,\delta,k)$ all interior points p of C, and all standard transformations T of C with respect to p,

$$\mu_{n,k}\{G: \alpha(T(C)\cap G)<\varepsilon\} > 1-\delta .$$

Corollary Given $0<\varepsilon<1$ and a natural number $k>1$ there exists $N(\varepsilon,k)$ such that for all convex bodies C of dimension $n \geq N(\varepsilon,k)$ and all interior points p of C there exists a k-dimensional subspace G (depending on p) such that $\alpha(C \cap (G+p))<\varepsilon$.

These results extend the famous theorem of Dvoretzky: "Some results on convex bodies and Banach Spaces" Proceedings of Symposium on linear spaces. Jerusalem (1960) 123-160.

P. MANI: Squares in Lake Michigan

Theorem 1. Assume $n \neq 4$. Let $f: S^{n-1} \longrightarrow E^n$ be a smooth embedding. There is an n-dimensional crosspolytope $P \subset E^n$, all of whose vertices belong to Im(f).

Theorem 2. Let $C \subset E^n$ be an n-dimensional convex body. There is an (n-1)-dimensional crosspolytope $P \subset E^n$, all of whose vertices to bd(C).

P. MCMULLEN: Non-linear angle sum relations for polytopes and polyhedral cones

If F is a face of a polyhedral cone G, let $\beta(F,G)$ and $\gamma(F,G)$ denote the internal and external angles of G at F, normalized so that the total angle is 1. For a pointed polyhedral cone K with apex o, the basic relation involving these angles is

$$\sum_F \beta(o,F)\ \gamma(F,K) = 1.$$

As an algebraic consequence, using the angle relations of Dehn

and Sommerville, there are two other such relations; these provide a geometric proof in the polyhedral case of the spherical Gauss-Bonnet theorem.
These results are then applied to polytopes, to prove, for example,

$$\sum_F (-1)^{\dim P - \dim F} \beta(F, P)\, V_r(F) = \begin{cases} V_r(P) \text{ if } \dim P = r, \\ 0 \text{ otherwise,} \end{cases}$$

where V_r is the intrinsic r-volume (in E^d, just the (d-r)-th quermassintegral, suitably normalized). Such formulae have spherical analogues, which will also be mentioned.

U. PACHNER: Komannigfaltigkeiten

K sei ein PL-Komplex, d.h. eine durchschnittsstabile endliche Menge von PL-Kugeln im euklidischen Raum E^d, so daß der Rand einer jeden Zelle A aus K Vereinigung aller echt in A enthaltenen Zellen ist. Ferner sei set K eine geschlossene PL-Mannigfaltigkeit der Dimension n, M ein (n-k)-Subkomplex von K, K^* dualer Komplex zu K, f: $K\setminus\{\emptyset\} \to K^*\setminus\{\emptyset\}$ eine inklusionsumkehrende Bijektion und $M^* = f(M)$. Set M ist genau dann eine geschlossene (n-k)-Mannigfaltigkeit, wenn in set K^* eine geschlossene (n-k)-Mannigfaltigkeit N existiert, so daß gilt: N schneidet genau die Zellen aus K^*, die zu M^* gehören und für $A \in M^*$ ist $N \cap A$ stets eine (dim A-k)-Kugel. Zum Schluß werden evtl. noch einige aus obigem Satz resultierende Antworten zu Problemen aus "How To Cut All Edges Of A Polytope" (B. Grünbaum) gegeben.

J.R. REAY: Radon-type theorems in interval convexity spaces

Each partially-ordered set $(X,\leq)$ has a natural convexity defined by intervals $[x,y] = \{p \mid x \leq p \leq y\}$. The following theorem of Tverberg, in $\mathbb{R}^d$, becomes Radon's Theorem when n=2; Each $[(d+1)(n-1)+1]$-set X in $\mathbb{R}^d$ has a Radon n-partition, i.e., $X = \bigcup X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ if $i \neq j$, and $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{conv} X_i \neq \emptyset$. We wish to consider analogous results in $(X,\leq)$. Let r_n be the least integer so that each r_n-set in X has a Radon n-partition. Then

1) The number r_n is not heriditary.
2) $(X,\leq)$ is linear $\Leftrightarrow$ $r_2=3 \Leftrightarrow r_n=2n-1$ $\forall n$.
3) $(X,\leq)$ is the union of 2 linear sets $\Leftarrow$ $r_2=4 \Leftrightarrow r_n=2n$ $\forall n$.
   That is, if each 4 points of $(X,\leq)$ can be divided into 2 disjoint sets whose order-convex hulls meet, then any set S' of 2n points of X can be divided into n disjoint sets whose order-convex hulls have a common point $x \in X$.
4) Further, $x \in S'$ except in one characterized case.
5) Relations between r_n and $m=\min\{j \mid X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{j} X_i^{\text{linear}}\}$ are given
6) If $r_2=k \geq 3$ then upper bounds on r_n are given.

R. SCHNEIDER: <u>A measure of convexity for compact sets</u>

For a subset M of d-dimensional real vector space R^d let

$$c(M) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid M + \lambda \operatorname{conv} M \text{ is convex}\}.$$

Among the compact subsets of R^d, the convex sets are characterized by the equality $c(M) = 0$. It is proved that $c(M) \leq d$ for arbitrary subsets of R^d, with equality if and only if M consits of d+1 affinely independent points. If M is either unbounded or connected, then $c(M) \leq d-1$; the bound d-1 is best possible in each case.

C. SCHULZ: <u>Hamilton-Flächen in 4-dimensionalen Prismen</u>

Unter einer <u>Hamilton-Fläche</u> vom Geschlecht g in einem d-Polytop P, verstehen wir einen Subkomplex M von $\operatorname{skel}_2 P$, der $\operatorname{skel}_1 P$ enthält und dessen Trägermenge set M eine orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht g ist. Eine Menge E paarweise disjunkter Facetten eines 3-Polytopes Q mit $\bigcup_{F \in E} \operatorname{vert} F = \operatorname{vert} Q$ heiße eine Eckenzerlegung von Q.

<u>Satz</u> Sei P ein einfaches 4-dimensionales Prisma mit Basis Q und bezeichne n die Anzahl der Facetten von Q, deren Eckenzahl ungerade ist, so gilt: a) Für n=0 gibt es auf P genau 3 verschiedene Hamilton-Flächen. b) Für n=2 gibt es auf P genau eine Hamilton-Fläche. c) Für $n > 2$ gibt es auf P höchstens eine Hamilton-Fläche.

Der Beweis dieses Satzes beruht wesentlich auf dem folgenden Lemma:
<u>Lemma</u> Auf einem 4-dimensionalen Prisma gibt es genau dann eine Hamilton-Fläche vom Geschlecht g, wenn seine Basis eine Eckenzerlegung der Mächtigkeit g+1 besitzt.
Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich außerdem zu jeder ganzen Zahl $n \geq 1$ ein 4-Prisma P_n mit n Hamilton-Flächen paarweise verschiedenen Geschlechts konstruieren.

G.C. SHEPHARD: Convex nets for 3-polytopes

Intuitively, if we take the boundary of a 3-dimensional convex polytope P (3-polytope) and "slit" it along the edges of a maximal tree in the edge-graph of P, then it may be possible to "open it out flat" to form a plane polygon. Such a polygon (the carrier polygon), along with an indication of the folds and a prescribed identification of its edges, will be called a net for P. A net is said to be convex if the carrier polygon is convex. A 3-polytope P is said to have the convex net (c.n.) property if there exists $P' \approx P$ and P' has a convex net. The purpose of the talk is to describe polytopes with the c.n. property, and a slightly stronger form of the following theorems will be proved:

Theorem 1 Thefollowing 3-polytopes have the c.n. property:

(a) All pyramids, bipyramids, prisms, cyclic polytopes, wedges.

(b) All 3-polytopes with at most 6 vertices or at most 6 facets.

(c) All stack polytopes S of which every component has at least one 2-face in common with S.

(d) All 3-polytopes P formed by repeated simple truncations of a tetrahedron T subject only to the condition that at least two vertices of T are also vertices of P.

Theorem 2 There exists a 3-polytope with 17 vertices which does not have the c.n. property.

A number of open problems in this area will also be mentioned.

W. SPIEGEL: Zur Minkowski-Additivität bestimmter Eikörperabbildungen

Ist auf dem Raum $K(E_n)$ der nichtleeren, kompakten, konvexen Punktmengen (kurz: der konvexen Körper) des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n eine Funktion $\psi: K(E_n) \to K(E_n)$ erklärt, so heißt diese additiv, falls für alle $A, B \in K(E_n)$ mit $A \cup B \in K(E_n)$ die Beziehung $\psi(A \cup B) + \psi(A \cap B) = \psi(A) + \psi(B)$ gilt. Die Funktion ψ heißt Minkowski additiv, falls sie für alle $A, B \in K(E_n)$ die Gleichung $\psi(A + B) = \psi(A) + \psi(B)$ erfüllt. ("+": Minkowskische Addition). Es wird gezeigt, daß jede translations- und dilatationsäquivariante, stetige, additive Eikörperabbildung $\psi: K(E_n) \to K(E_n)$ auch im Minkowskischen Sinne additiv ist. Für Abbildungen $\psi: K(E_n) \to E_n$ wurden im Zusammenhang mit der axiomatischen Charakterisierung des Steinerpunktes analoge Fragen schon behandelt, wobei wesentlich ausgenutzt wurde, daß die Abbildung ψ durch die Forderungen der Additivität, Äquivarianz und Stetigkeit eindeutig bestimmt war. Bei Abbildungen obigen Typs fehlt aber diese Eindeutigkeitsaussage.

J. TURGEON: Progrès récents à propos de la conjecture de M. Peter Scherk sur les rangs d'une courbe d'ordre n

Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace projectif réel à 3 dimensions. Une courbe dans $\mathbb{R}^3$ est une application continue du cercle unité dans $\mathbb{R}^3$. Une courbe est appelée directement différentiable si elle possède une tangente et un plan osculateur en chacun de ses points. Enfin, une courbe est d'ordre 3 si aucun plan dans $\mathbb{R}^3$ ne contient plus de trois de ses points. On soit que si une courbe directement différentiable est d'ordre 3, alors aucune droite dans $\mathbb{R}^3$ ne coupe plus de 4 de ses tangentes. M. Ralph Park et moi avons obtenu ensemble le résultat suivant. Etant données quatre tangentes d'une courbe d'ordre 3, il existe exactement deux droites dans $\mathbb{R}^3$ qui coupent ces quatre tangentes.

G. VALETTE: Dissections of convex bodies

We say that a dissection $\{K_1,K_2,\ldots,K_k\}$ of a convex body K is similar if $k \geqslant 2$ and if $K_1,\ldots,K_k$ are similar to K. We prove two results which may be useful in the problem of classifying the similar dissections of convex bodies. 1. If a convex body K of the euclidean d-space admits a similar dissection, then K is a polytope. 2. If a convex polygon with m sides my be dissected into several convex polygons with m sides, then m = 3, 4 or 5.

W. WEIL: Regularisierung von Stützfunktionen

Es werden drei Möglichkeiten angegeben, Stützfunktionen h im E^d zu regularisieren:

(I) Man faltet h auf einer Hyperebene E^{d-1}, die nicht durch O geht, sowie auf $-E^{d-1}$ und setzt positiv homogen fort.

(II) Man faltet h auf E^d, nimmt die Werte der Faltung auf der Einheitssphäre S^{d-1} und setzt positiv homogen fort.

(III) Man faltet h mit einer Funktionenfamilie auf der Drehgruppe SO(d).

In allen drei Fällen erhält man (bei geeigneter Wahl der Funktionenfolge, mit der gefaltet wird) eine Folge von Stützfunktionen h_k, $k=1,2,\ldots$, die gegen h in der Maximumsnorm auf S^{d-1} konvergieren und beliebig glatt sind (im Fall (I) nur außerhalb eines Hyperebene durch O). Als Folgerungen von (I) bzw. (III) werden die beiden Sätze angegeben: Ein Polytop P ist Summand eines konvexen Körpers K $\Leftrightarrow$ Jede eindimensionale Stützmenge von P ist nach

Translation enthalten in der entsprechenden Stützmenge von K. -- Ein dreidimensionaler Körper konstanter Breite und konstanter Helligkeit ist eine Kugel (Verallgemeinerung eines Satzes von Nakajima).

T. ZAMFIRESCU: <u>On longest paths and circuits on convex polytopes</u>

T. Gallai (1966) asked whether there exists a connected graph such that for each of its vertices there is a longest path avoiding it. H. Walther (1969) constructed such a graph, having 25 vertices. I have an example with 12 vertices. B. Grünbaum found later (1973) a polytopal graph satisfying this condition (and possessing 484 vertices). I constructed a polytopal graph with the property that for each 2 vertices there is a longest path avoiding both of them. My graph has 57.838 vertices. Problem: Find graphs satisfying the above condition with 3 instead of 2 avoided vertices. B. Grünbaum and I found also graphs satisfying the above properties with circuits instead of paths and possessing respectively 124 and 14.818 vertices. The analogous (with circuits instead of paths) problem in the case of 3 (instead of 1 and 2) avoided vertices is also open. Third and fourth problems: Find a 4-connected graph such that each vertex be missed by some longest path, respectively circuit.

Bernd Kind (Bochum)