MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 27|1974

Wochenend-Seminar über Zahlentheorie

28. 6. bis 30. 6. 1974

Diesmal wurde dem Wochenendseminar, das von Herrn Professor P. Roquette (Heidelberg) geleitet wurde, ein Skriptum von Jehne über "Superprimdivisoren" in Zahlkörpern zugrunde gelegt, zusammen mit anknüpfenden maßtheoretischen Überlegungen von Jarden. Die Vortragenden waren (in Reihenfolge) Kiehne, Pank, Stützer, Klingen und Jarden; zum Schluß fand noch unter der Leitung von Professor Jehne eine Diskussion über offene Fragen statt.

Teilnehmer

W. Blonski, Heidelberg
G. Frey, Erlangen
B. Hain, Erlangen
Globig, Regensburg
H. Göhner, Heidelberg
Happle, Karlsruhe
P. Henn, Heidelberg
W. Hermann, Heidelberg
M. Jarden, Heidelberg
W. Jehne, Köln
E. Kani, Heidelberg
U. Kiehne, Heidelberg
N. Klingen, Köln

Krotz, Saarbrücken
J. Leicht, Heidelberg
G. Martens, Erlangen
J. Neukirch, Regensburg
M. Pank, Heidelberg
J. Ritter, Heidelberg
P. Roquette, Heidelberg
A. Stichtenoth, Heidelberg
H. Stichtenoth, Mannheim
Stützer, Köln
R. Transier, Heidelberg
E. Vieweg, Mannheim
H. Zimmer, Saarbrücken

Superprimdivisoren von Zahlkörpern

Ein Superprimdivisor eines Zahlkörpers K ist ein nicht-Hauptultrafilter (NHUF) auf der Menge P_K der Primdivisoren von K. Ist L eine endliche Erweiterung vom Grad n von K, so kann man Begriffe wie "$\mathfrak{P}$ liegt über $\mathfrak{p}$", "Verzweigungsindex von $\mathfrak{P}$", "Relativgrad von $\mathfrak{P}$" usw. auch für Superprimdivisoren definieren, und es gilt dann die übliche Formel:

$$\sum_{U|u} {}_{L/K}(U)\, f_{L/K}(U) = [L : K].$$

Dazu wurde zunächst folgende allgemeine Situation betrachtet. Es sei E eine Menge, aufgefaßt als topologischer Raum mit diskreter Topologie, und $\hat{E}$ die Menge aller Ultrafilter von E, topologisiert durch die von den Mengen $\Gamma(A) := \{\mathfrak{U} \in \hat{E} : A \in \mathfrak{U}\}$ (wobei A alle Teilmengen von E durchläuft) erzeugten Topologie. Es wurde dann gezeigt, daß $(\hat{E}, \phi_E)$ - wobei $\phi_E : E \to \hat{E}$ die natürliche Einbettung ist, die jedem $x \in E$ seinen Umgebungsfilter zuordnet - die Stone-Čech Kompaktifizierung von E ist, und daß die $\Gamma(A)$ genau die offen-abgeschlossenen Mengen von $\hat{E}$ sind. Aus der universellen Eigenschaft der Stone-Čech Kompaktifizierung folgt nun, daß sich jede Surjektion $f : E \to E'$ zu einer eindeutigen (stetigen) Surjektion $\hat{f} : \hat{E} \to \hat{E}'$ fortsetzen läßt. Diese Tatsache wurde dann auf die Funktionen $j : P_L \to P_K$("Einschränkung") $e_{L/K} : P_L \to \{1,\dots,n\}$ ("Verzweigungsindex"), $f_{L/K} : P_L \to \{1,\dots,n\}$ ("Relativgrad") angewandt.

Als nächstes wurde jedem $U \in \Omega_K = \hat{P}_K \setminus \phi_{P_K}(P_K)$ eine sogenannte "Invariante", inv U, aus der reduzierten Idelklassengruppe $\bar{C}_K = C_{K/\varepsilon_K}$ (ε_K = Zusammenhangskomponente der 1) zugeordnet. Dazu wurde zunächst gezeigt, daß man die Menge $\bar{C}_K$ in natürlicher Weise mit einer Menge von Filterbasen von P_K (genannt Kongruenzfilter) identifizieren kann; hierzu wurde der Satz über arithmetische Progressionen benötigt. Dann wurde gezeigt, daß jeder NHUF $U \in \Omega_K$ genau einen Kongruenzfilter enthält, und es wurde somit die Zuordnung $U \to$ inv U gewonnen. Diese besitzt folgende Eigenschaft:

<u>Satz</u> 2: Sei $\Omega_L(K)$ die Menge der Superprimdivisoren von L, die bezüglich K den Relativgrad 1 besitzen, und $\Omega_K(L) = j(\Omega_L(K))$. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_L(K) & \xrightarrow{\mathrm{inv}_L} & \bar{C}_L \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_{L/K}} \\ \Omega_K(L) & \xrightarrow{\mathrm{inv}_K} & \bar{C}_K \end{array}$$

Sei nun L eine endlich galoissche Erweiterung von K mit Gruppe $\mathfrak{G}$. Wie üblich operiert dann $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$ transitiv auf $j^{-1}(u)$ für $u \in \hat{P}_K$, und der Stabilisator von $U|u$ ist $\langle[\frac{L/K}{U}]\rangle$, wobei $[\frac{L/K}{\cdot}]$ die Fortsetzung des Frobeniussymbols auf $\hat{P}_K$ ist. Ferner läßt sich zeigen, daß das fortgesetzte Frobeniussymbol sich unter Restriktion, Normbildung usw. genauso verhält wie das gewöhnliche.

Ist nun L eine (nicht notwendig endliche) galoissche Erweiterung von K, so sei $\Omega_L = \varprojlim \Omega_M$, wobei M alle in L enthaltenen endlich galoisschen Erweiterungen von K durchläuft. Die Frobeniusabbildungen $[\frac{M/K}{\cdot}] : \Omega_M \to \mathfrak{G}(M/K)$ bilden dann ein projektives System, dessen Limes $[\frac{L/K}{\cdot}] = \varprojlim [\frac{M/K}{\cdot}] : \varprojlim \Omega_M \to \varprojlim \mathfrak{G}(M/K) = \mathfrak{G}(L/K)$ "verallgemeinertes Frobeniussymbol" genannt wurde. In ähnlicher Weise wurde das verallgemeinerte Artinsymbol definiert, und anschließend bewiesen:

<u>Satz</u> 3: Es sei L galoissch über K mit Gruppe $\mathfrak{G}$. Dann

ist das verallgemeinerte Frobeniussymbol $[\frac{L/K}{\cdot}] : \Omega_L \to \mathfrak{G}$ sowie das verallgemeinerte Artinsymbol $(\frac{L/K}{\cdot}) : \Omega_L \to \varkappa(\mathfrak{G})$ (= Konjugiertenklassen von $\mathfrak{G}$) eine stetige Surjektion, und folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_K \arrow[r, "(\frac{L/K}{\cdot})"] \arrow[d, "\mathrm{inv}_K"'] & \varkappa(\mathfrak{G}) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
\bar{C}_K \arrow[r, "(\cdot, L_{ab}/K)"] & (L_{ab}/K)
\end{tikzcd}$$

Als nächstes wurde die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_{L/K}(U) = \{\sigma \in \mathfrak{G}(L/K) : \sigma U = U\}$ sowie deren Fixkörper $Z_{L/K}(U)$, der Zerlegungskörper, eines Superprimdivisors $U \in \Omega_L$ betrachtet. Indem man einsieht, daß $\mathfrak{Z}_{L/K}(U)$ isomorph zum Ultraprodukt $\prod_{\mathfrak{P} \in P_L} \mathfrak{Z}_{L/K}(\mathfrak{P})/U$ ist (falls L/K endlich), so folgt, daß $\mathfrak{Z}_{L/K}(U)$ eine prozyklische Gruppe ist, die von $[\frac{L/K}{U}]$ erzeugt wird. Für den Zerlegungskörper gilt $Z_{L/K}(U) = L \cap K_{j(U)}$, wobei $K_{j(U)} = \prod_{\mathfrak{p} \in P_K} K_{\mathfrak{p}}/j(U)$ die "Komplettierung von K bei j(U)" ist. (Hierbei sind L und $K_{j(u)}$ als natürlich eingebettet in $L_U := \varinjlim_M M_{j_M(U)}$ zu betrachten). Analog läßt sich übrigens auch der Restklassenkörper von $U \in \Omega_K$ definieren: $\bar{K}_u = \prod_{\mathfrak{p} \in P_K} \bar{K}_{\mathfrak{p}}/U$.

<u>Satz</u> 4: Es sei $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluß von K und K_{ab} die maximal abelsche Erweiterung von K(in $\tilde{K}$). Ferner sei Abs(F) die Menge der über dem Primkörper von F algebraischen Elemente aus F. Sind dann $u \in \Omega_K$ und $\sigma \in \tilde{\mathfrak{G}}(\tilde{K}/K)$ so, daß $(\frac{\tilde{K}/K}{U}) = \varkappa(\sigma)$, so gilt

$$\mathrm{Fix}\ (\sigma) \underset{K}{\simeq} \mathrm{Abs}\ (K_u) \underset{K}{\simeq} \mathrm{Abs}\ \bar{K}_u$$

$$\mathrm{Fix}\ ((\mathrm{inv}_K U, K_{ab}/K)) \simeq \mathrm{Ab}(\mathrm{Abs}(K_u)/K) \simeq \mathrm{Ab}(\mathrm{Abs}(\bar{K}_u)/K).$$

(Hierbei bedeutet $\mathrm{Ab}(*/K)$ die maximal-abelsche Erweiterung von K in $*$.)

Korollar: Es seien $u_1, u_2 \in \Omega_K$. Dann sind äquivalent:

(i) $K_{u_1} \underset{K}{\simeq} K_{u_2}$

(ii) $\bar{K}_{u_1} \underset{K}{\simeq} \bar{K}_{u_2}$

(iii) Die von $\left(\frac{\tilde{K}/K}{u_1}\right)$ bzw. $\left(\frac{\tilde{K}/K}{u_2}\right)$ (top.) erzeugten Untergruppen sind in $\mathfrak{G}(\tilde{K}/K)$ konjugiert.

In dem Korollar wurden außer Satz 4 auch noch bekannte Resultate von Ax-Kochen und Ax hineingesteckt.

Zum Schluß wurden noch Dichtigkeitsfragen untersucht. Sei E eine elementare Aussage, und sei $A(E)$ (bzw. $\Omega(E)$) die Menge derjenigen $\mathfrak{p}$ aus P_K (bzw. aus Ω_K) so, daß E im Restklassenkörper $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ erfüllt ist. Ferner sei $\Sigma(E)$ die Menge der $\sigma \in \mathfrak{G}(\tilde{K}/K)$, so daß E im Fixkörper $\mathrm{Fix}(\sigma)$ gilt. Es wurde dann bewiesen:

Satz 5: Die Menge $A(E)$ besitzt eine Dirichletdichtigkeit $\delta(a(E))$; $\Omega(E)$ ist eine Borelmenge in Ω_K, und die Menge $\Sigma(E)$ ist meßbar bzgl. dem (normierten) Haarmaß μ auf $\mathfrak{G}(\tilde{K}/K)$. Ferner existiert ein Borelmaß ν auf Ω_K so, daß $\delta(A(E)) = \nu(\Omega(E)) = \mu(\Sigma(E))$.

Zum Beweis wurden Satz 4, der Tschebotarev'sche Dichtigkeitssatz und Resultate von Ax und Jarden benötigt.

Ernst Kani (Heidelberg)