MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 48|1974

(letzter Bericht 1974)

Didaktik der Mathematik

8.12. bis 14.12.1974

Die diesjährige Tagung stand wieder unter der Leitung von H.-J. Vollrath.

Die Mehrzahl der Vorträge enthielt Vorschläge stofflicher Art. Diese blieben jedoch nicht Selbstzweck, sondern lieferten Beiträge zur Organisation schon etablierter Themen oder konnten sich auf unterrichtliche Erprobung berufen. E. Cohors-Fresenborg berichtete über Einführung in Automatennetze und Algorithmen mit einem Baukastenspiel für Grundschüler. Ebenfalls für die Grundschule schlug H. Spiegel das Quadrominospiel vor, ein sehr vielseitig in Richtung auf Gruppen und Operatoren verwendbares strukturiertes Material. A. Engels Wahrscheinlichkeitsabakus ist einfach genug, daß schon Schüler in der Orientierungsstufe damit umgehen können; er wird aber gewiß selbst den Kenner der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Leichtigkeit beeindrucken, mit der sich auch verwickeltere Aufgaben lösen lassen. E. Röhrl betrachtete kritisch die verschiedenen Arten, Gleichungen durch Operatoren zu lösen. Die Vorschläge zu einer weniger isolierten, sondern an Begriffen des archimedisch geordneten Halbkörpers orientierten Behandlung der Bruchrechnung von H. Winter können zu einer Abrundung und Vertiefung für alle Schularten führen. H. Wellstein legte dar, daß in dem simplen Konzept des Rundens durch Betonung des Funktionsaspektes Anregungen bis hinauf in die Oberstufe enthalten sind. Auf den Geometrieunterricht der Oberstufe österreichischer Gymnasien bezog sich J. Laub in seiner Darstellung eines Lernabschnitts über Kegelschnitte, bei dem es darum ging, die sehr geringe verfügbare Stundenzahl so gut wie möglich zu nutzen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H.J. Claus stellte als Axiomatisierungsübung die Gewinnung eines Axiomensystems für N aus einfachsten anschaulichen Eigenschaften des Graphen der Nachfolgerfunktion dar. H. Hischers Vorschlag, unter den g-alen Darstellungen der reellen Zahlen diejenigen mit g N 1 durch Forderungen nach leichter rechnerischer Handhabung herauszuheben, bezog sich auf die Kollegstufe ebenso wie die Lernsequenz von H. Glaser, in der, ausgehend von der Mittelstufengeometrie, die Abhängigkeiten der Begriffe Norm, Skalarprodukt, Orthogonalität analysiert werden.
B. Artmann trat in einem Lehrgang über Zahlbereiche den Nachweis an, daß grundlegende algebraische Begriffe sich im wesentlichen aus einer vertieften Behandlung der den Schülern bekannten Zahlbereiche entwickeln lassen.
H.-G. Bigalke zeigte in seinem Beitrag über Triangulationen, wie die Schüler an einem Stoff stark variierbaren Schwierigkeitsgrades (bis hin zur mathematischen Forschung) die von H. Taba beschriebenen heuristischen Aktivitäten vollziehen können. Der Vortrag von M. Jeger über den Drei-Spiegelungssatz in der ebenen projektiven Geometrie wendete sich stärker an den Lehrer, wenn auch der Beweis mit synthetischen Mitteln recht elementar ist.
H.-J. Vollrath setzte sich aufgrund eigener empirischer Untersuchungen kritisch mit Piagets Ausführungen zur Entwicklung des mathematischen Ähnlichkeitsbegriffs auseinander; seine Ergebnisse lassen die Empfehlung eines sehr frühen Einsatzes des Abbildungsbegriffes zu.
Über ein von ihm erarbeitetes Stufenmodell und seine unterrichtlichen Konsequenzen berichtete M. Leppig.
U. Viet diskutierte verschiedene Differenzierungsmodelle, die derzeit erprobt werden, und berichtete über einen eigenen umfangreichen Versuch. Im Zusammenhang hiermit kann man den Vortrag von D. Lind sehen, der die unterschiedlichen Eigenschaften von Tests zur Leistungskontrolle besprach und verschiedene mathematische Testmodelle vorstellte und diskutierte.

Teilnehmer

B. Artmann, Darmstadt
F. Barth, München
G. Becker, Bremen
H.-G. Bigalke, Hannover
H.J. Claus, Darmstadt
E. Cohors-Fresenborg, Flensburg
A. Engel, Frankfurt
L. Führer, Berlin
H. Glaser, Würzburg
H. Griesel, Kassel
G. Heink, Berlin
H. Hischer, Braunschweig
M. Jeger, Luzern
L. Kieffer, Luxemburg
A. Kirsch, Kassel
P. Kirsche, Augsburg
N. Knoche, Essen
J. Kratz, München
J. Kühl, Kiel
J. Laub, Wien
M. Leppig, Duisburg
P. Lesky, Stuttgart
D. Lind, Landau
D. Markert, Freiburg
E. Mellin, Freiburg
F. Nestle, Ludwigsburg
M. Otte, Bielefeld
H. Prade, Freiburg
L. Profke, Gießen
E. Röhrl, Stuttgart
H. Siemon, Ludwigsburg
H. Spiegel, Reutlingen
U. Viet, Osnabrück
H.-J. Vollrath, Würzburg
H. Wäsche, Karlsruhe
I. Weidig, Landau
H. Wellstein, Würzburg
H. Winter, Neuß

Vortragsauszüge

B. ARTMANN: Entwurf eines Kollegstufenkurses über Zahlbereiche

Bei Entwürfen von Kursen über algebraische Strukturen in der Kollegstufe sollte man neue Begriffe nicht nur an neuen Beispielen veranschaulichen. Deshalb wird vorgeschlagen, die Algebra aus einem vertieften Studium der Zahlbereiche zu entwickeln. Dies führt schnell zu gewichtigen Aussagen. Inhalt des Entwurfs: 1. Komplexe Zahlen 2. Verschiedene Studienobjekte, insbesondere der Ring $\mathbb{D}ez$ der endlichen Dezimalbrüche 3. Gruppen, wie $(\mathbb{R},+),(\mathbb{C}^{x},\cdot)$ 4. Mächtigkeit 5. Angeordnete Gruppen $(\mathbb{D}ez,+<),(\mathbb{Q},+,<)$ 6. Kennzeichnung des Körpers R 7. Morphismen 8. Fundamentalsatz der Algebra. Für einen Halbjahreskurs wären fünf bis sechs dieser Kapitel auszuwählen. Dabei sollte man auf $\mathbb{C}$ nicht verzichten. Am Schluß wurde gezeigt, wie sich aus der Isomorphie von $(\mathbb{D}ez,<)$ und $(\mathbb{Q},<)$ eine neue Veranschaulichung der Lückenhaftigkeit von $(\mathbb{Q},<)$ ergibt.

H.-G. BIGALKE: "Entdeckendes Lernen" am Beispiel von Triangulationen

"Entdeckendes Lernen" wird anhand einer von H. Taba angegebenen Folge von notwendigen Aktivitäten des Lernenden am Beispiel von Triangulationen erklärt. Dabei werden gleichzeitig Untersuchungen und neue Ergebnisse aus der Theorie der Triangulationen vorgestellt. Ausgehend von Begriffsbildungen (Triangulationen, isomorphe Triangulationen, Kennzeichen usw.) wird über die Euler-Gleichung für Triangulationen ($\sum_i e_i(6-i)=12$) eine Liste aller möglichen Triangulationen mit Ecken E_i vom Grade $i, 2\leq i\leq 5$, erstellt und diskutiert. Es zeigt sich, daß von den 34 möglichen Erfüllungen der Gleichung $4e_2+3e_3+2e_4+e_5=12$ nur 15 als Triangulationen realisierbar sind. Neben einer sukzessiven Diskussion aller Fälle werden vier allgemeine Sätze angegeben, aufgrund derer die 19 übrigen Fälle herausfallen.

H.J. CLAUS: Vom Pfeilgraphen der Nachfolgerfunktion zu einem Axiomensystem der natürlichen Zahlen

In einigen modernen Unterrichtswerken und bei STREHL "Zahlbereiche" werden Pfeilgraphen zur Veranschaulichung der PEANO-Axiome verwandt.

Im Gegensatz dazu beginnen wir mit den Pfeilgraphen beliebiger Funktionen und sondern schrittweise Typen von Pfeilgraphen aus, bis wir bei der Nachfolgerfunktion angelangt sind. Zu jedem Aussonderungsschritt gehört eine Forderung an die Funktion, die wir als Axiom setzen. Wir gelangen so zu einem von dem PEANOschen verschiedenen, sehr einfachen Axiomensystem der natürlichen Zahlen ohne das Induktionsaxiom, das im Wesentlichen mit dem 1955 von DEVIDÉ aufgestellten identisch ist.
Dieser Weg dürfte für die selbständige Erarbeitung durch Schüler der Sekundarstufe II geeigneter und einsehbarer sein als das PEANOsche Axiomensystem, dessen Induktionsaxiom Schüler nicht selbst finden können.

E. COHORS-FRESENBORG: Automatentheorie in der Grundschule

Es ist ein Baukasten entwickelt worden, mit dem sich die Motivation des Spiels mit der elektrischen Eisenbahn bei Grundschülern zu einer Einführung in die Theorie von Automatennetzen und Algorithmen nutzen läßt. Es wurde über erste Erfahrungen in einer Unterrichtseinheit von 35 Stunden im 3. und 4. Schuljahr berichtet. Zunächst wurden die Konstruktion und Analyse von Labyrinthen und Ringschaltern erarbeitet. Ein zweiter Teil beschäftigte sich mit der gemeinsamen Struktur von Rechennetzen zur Berechnung von Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Durch häufige Gruppen-bzw. Partnerarbeit lassen sich die bald zu beobachtenden Leistungsdifferenzen zum Erreichen abgestufter Lernziele nutzen, ohne daß die schwächeren Schüler lustlos werden. Dieses Material eignet sich außer zur Propädeutik für Algorithmen sehr gut zur Förderung des Problemlöseverhaltens.

A. ENGEL: Der Wahrscheinlichkeitsabakus

Es wird ein neuer Algorithmus vorgestellt, absorbierende und ergodische Markow-Ketten ohne Vorkenntnisse zu behandeln. Er ist schon Grundschülern zugänglich. Der Algorithmus wurde durch Simulationsalgorithmen angeregt. Er ist eine "Supersimulation", die in kurzer Zeit exakte Werte für Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte liefert, die stationäre Verteilung berechnet u.a.m.

H. GLASER: Lernsequenzen zur Erfassung der Orthogonalität in der Kollegstufe

Die vorgestellten Lernsequenzen sollen lokales Ordnen im Rahmen der globalen Axiomatisierung im Geometrieunterricht der Kollegstufe anregen. Ausgehend von elementargeometrischen Figuren (z.B. Rechteck, Raute, rechtwinkliges Dreieck, Lotstrecke) sind mehrere Definitionen der Orthogonalitätsrelation mittels der Norm von Vektoren möglich. Diese Relationen sind genau dann gleich, und haben die bekannten Eigenschaften, wenn die Normen der Parallelogrammidentität genügen.
Setzt man $F(\vec{x},\vec{y}) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$, sind die Orthogonalitätsrelationen genau dann gleich, wenn $F(\vec{x},-\vec{y}) = -F(\vec{x},\vec{y})$.
Die Untersuchungen der Abhängigkeit zwischen dieser Abbildung F und der Orthogonalitätsrelation werden als Beispiele für Axiomatisierungsübungen aufgezeigt. Die Lernschritte wurden am Spiral-und Aufbauprinzip (Konstruktion eines Begriffs vor seiner Analyse) orientiert.

H. HISCHER: Stellenwertsysteme für archimedisch angeordnete Körper

Die Untersuchung von Stellenwertsystemen kann der Bewußtmachung des Axiomensystems für $\mathbb{R}$ dienen. Ausgehend von der naiven Interpretation von R als Menge aller Dezimalzahlen $\alpha = \sum_{\nu=-\infty}^{n} a_\nu g^\nu$ mit $n \in \mathbb{Z}$, g=10 und $a_\nu \in \mathfrak{A}_g := \{0,1,2,\dots,9\}$ ($\alpha > 0$ o.E.d.A.) gelangt man über die Frage nach rekursionsfreier Charakterisierung der Dezimalstellen von α zu der Vermutung $a_\nu = \gamma\left(\frac{\alpha}{g^\nu}\right) - g \cdot \gamma\left(\frac{\alpha}{g^{\nu+1}}\right)$, wobei γ (zunächst naiv) die Ganzteilfunktion bezeichnet.
Andere Grundzahlen liefern dieselbe Vermutung. Zu ihrem Beweis benötigt man die Axiome eines archimedisch angeordneten Körpers $(A,+,\cdot,\leq) =: \mathcal{A}$. Die möglichen Grundzahlen werden auf $g \in A^+ \setminus \{1\}$ eingeschränkt. In $\mathcal{A}$ lassen sich γ und weitere Treppenfunktionen eindeutig erklären, mit ihnen ist jedes $\alpha \in A^+$ bezüglich $g > 1$ (o.E.d.A.) g-al darstellbar. "Alphabet" $\mathfrak{A}_g$ und "Ziffer" können definiert werden, die Vermutung ist für $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ beweisbar, ebenfalls die Eindeutigkeit der Darstellungen. Vollständigkeit heißt: jede g-ale Darstellung bezeichnet eine reelle Zahl.

M. JEGER: Spiegelungen in der ebenen projektiven Geometrie

Die vorgetragenen Überlegungen sind als Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus zu verstehen.
Sollen gruppentheoretische Ansätze in der Geometrie nicht nur klassifikatorischen Charakter haben, dann ist die Frage von Interesse, ob sich eine vorgegebene Transformationsgruppe aus einfacheren Abbildungen erzeugen läßt. Aus diesem Gedanken ist die Spiegelungsgeometrie gewachsen, mit der sich einige bekannte Gruppen abdecken lassen. Versucht man diesen Ansatz bei der Gruppe der projektiven Abbildungen in der Ebene, bieten sich zunächst die Perspektivitäten als Erzeugendensystem an: Jede Projektivität ist als Produkt von drei Perspektivitäten darstellbar. Es ist schon lange bekannt, daß hier sogar die projektiven Spiegelungen genügen. Ein Beweis wurde allerdings bis heute nicht publiziert. Es wird für die Drei-Spiegeligkeit der projektiven Gruppe in der Ebene ein weitgehend elementarer Beweis gegeben, dessen Kern die Darstellung einer Perspektivität durch drei Spiegelungen ist.

J. LAUB: Über Kegelschnitte (12. Schulstufe)
Bericht über einen Schulversuch in Österreich

Da für das Thema Kegelschnitte nur 12 Stunden verfügbar sind, können diese nur so behandelt werden, daß Mittelpunkt (Ellipse, Hyperbel) bzw. Scheitel (Parabel) im Ursprung liegen. Gibt man die Ellipse (Hyperbel) durch $M=0, F_1(-\vec{e}), a$, so wird $a^2\vec{x}^2 - (\vec{e}\cdot\vec{x}) = \pm a^2b^2$. Für die Parabel mit Scheitel $S=0$ und $F(\vec{e})$ ist $e^2x^2 - (e\cdot x)^2 = 4e^2(e\cdot x)$. Hieraus werden die Koordinatengleichungen, aus ihnen die Koordinaten von Scheitel und Brennpunkten erhalten. Mit dem symmetrischen bilinearen "Kon"-Produkt $\vec{a}\circ\vec{b}$ wird die Gleichung einer Ellipse (Hyperbel) $\vec{x}\circ\vec{x} = F$, die einer Parabel $\vec{x}\circ\vec{x} = 2\,\vec{d}\cdot\vec{x}$. $\vec{u}\circ\vec{v} = 0$ gibt konjugierte Vektoren, $\vec{u}\circ\vec{u} = 0$, $u \neq 0$, die Asymptoten, $\vec{p}\circ\vec{x} = 0$ die Polare bzw. Tangente eines Punktes $P(\vec{p})$ bezüglich einer Ellipse (Hyperbel), $\vec{p}\circ\vec{x} = \vec{d}\cdot\vec{x} + \vec{d}\cdot\vec{p}$ die Polare bzw. Tangente bezüglich einer Parabel. Als Anwendung wurden vier Beispiele angeführt.

M. LEPPIG: Ist "Mathematik in der Grundschule" Mathematik?
Zur Didaktik mathematischer Lern-und Arbeitsphasen

Der Umstand, daß "Mathematik in der Grundschule" oft nicht als "Mathematik" angesehen wird bzw. angesehen werden kann - was möglicherweise sogar für die Mathematik aller Schulstufen festgestellt werden könnte - legt nahe, sich über den Standort des mathematischen Schulgeschehens generell und im einzelnen Gedanken zu machen. Aufgezeigt wird ein didaktischer Ansatz, der mathematisches Prozedieren auf verschiedenen Entwicklungsstufen beschreibt und unterrichtspraktikabel auszudeuten versucht.

D. LIND: Über mathematische Testmodelle

Auf der Grundlage der in [1] entwickelten Testtheorie und der mathematischen Theorie statistischer Entscheidungsverfahren ([2],[3]) wird folgende Frage diskutiert: Messen Punktzahlsummen ein Merkmal? Es läßt sich zeigen, daß sich in der Klasse der Testmodelle mit stochastisch (lokal) unabhängigen, dichotomen, gleich bewerteten Aufgaben, die alle monotone und differenzierbare Funktionen eines reell quantifizierbaren Merkmals sind, nur das Testmodell von Rasch [4] eignet. Endlich wird nachgewiesen, daß die Forderung nach mindestens 90% Lösungswahrscheinlichkeit für eine Aufgabe in der Theorie lernzielorientierter Tests außer bei extrem verteilten Lösungswahrscheinlichkeiten sehr ungünstig ist. Daraus folgt die Anregung, solche Verteilungen für leichte Aufgaben zu untersuchen, da sich vielleicht die Entscheidungsgrenze von 90% verkleinern läßt.

[1] Lord-Novick, Statistical Theories of Mental Test Scores, 1968
[2] Schmetterer, Einführung in die mathematische Statistik, 1966
[3] Witting, Mathematische Statistik, 1966
[4] Rasch, Probabilistic models for some intelligence and attainment tests, Kopenhagen 1960 (Nielson und Lydiche, Danmarks Paedagogiske Institut)

E. RÖHRL: Textaufgaben und Gleichungslehre in der Hauptschule

Im Grundschulunterricht werden heute Begriffe und Notationsformen entwickelt, die einen didaktischen Gewinn versprechen für das Lösen der verschiedensten Textaufgaben in der Hauptschule.
Die verbale Darstellung von mathematisierbaren Sachverhalten ist durch eine problemangemessene graphische Darstellung zu ersetzen - in der Erwartung, daß damit die Fähigkeit zu Sachverhaltsklärungen für den Hauptschüler zunimmt.

H. SPIEGEL: Mathematik mit Quadromino

Quadrominosteine (QS) sind quadratische Pappstücke, die auf einer Seite durch die beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt sind, deren jedes blau, gelb oder rot gefärbt ist. Ein vollständiger Satz QS besteht aus allen verschiedenen derartigen Plättchen. Die QS ermöglichen in der Grundschule ein reicheres Lernangebot als die herkömmlichen strukturierten Materialien. Darüber hinaus bieten sie Problemstellungen, die den MU aller Schulstufen bereichern können. Dafür einige Beispiele: 1. Kennzeichnung der QS durch vierstellige Namen 2. Unterschiedsspiele 3. "Viererpuzzle" nach der Quadrominoregel 4. Farbpermutationsoperatoren. Hier gilt: Nichttriviale Operatoren besitzen Fixpunkte; nicht durch jedes Wertepaar ist der Operator eindeutig bestimmt. Dies wird genutzt, um strukturelle Zusammenhänge zu entdecken, den Erfahrungsbereich zum Operatorbegriff zu erweitern und gruppentheoretische Begriffe "handgreiflich" oder "anschaulich" zu illustrieren.

U. VIET: Leistungsdifferenzierung im Mathematikunterricht

In immer mehr Schulen und Schulformen (Orientierungsstufe, Gesamtschulen) wird der Mathematikunterricht in nach Leistung differenzierten Gruppen erteilt. Das hat Konsequenzen für die Gestaltung und die Effektivität des gesamten Mathematikunterrichts -(leider nicht nur positive).

Die Differenzierung erfolgt nach unterschiedlichen Kriterien mit unterschiedlicher Prognosefähigkeit in unterschiedlichen Organisationsformen. Jeweils werden Voraussetzungen gemacht, die in Bezug auf die für den Mathematikunterricht relevanten Leistungsdimensionen nicht oder nicht hinreichend empirisch überprüft sind und die sich z.T. widersprechen.
Es wird ein Projekt beschrieben, daß sich mit der Untersuchung der genannten Fragen beschäftigt und einige - leider noch bruchstückhafte - Ergebnisse genannt.

H.-J. VOLLRATH: <u>Bruchrechnung und Ähnlichkeit von Rechtecken</u>

Den Thesen von Piaget zur Entwicklung des Ähnlichkeitsbegriffs beim Kinde werden Überlegungen und empirische Untersuchungen entgegengestellt, die zeigen sollen, daß es sich bei der Aneignung des mathematischen Ähnlichkeitsbegriffs um einen heuristischen Prozeß handelt, der durch geeignete Lernsequenzen optimiert werden kann. Im Vordergrund sollte dabei die Betonung des Abbildungsbegriffs gegenüber dem Relationsbegriff stehen. Dieser Lernprozeß läßt sich günstig verbinden mit der Bruchrechnung und geometrischer Propädeutik.

H. WELLSTEIN: <u>Die Rundungsfunktion im Unterricht</u>

Das elementare Runden von Zahlen wird als Ausgangspunkt für eine vertiefte Behandlung in späteren Unterrichtsstufen aufgewiesen. Durch Einführung der Folge der Rundungsfunktionen gewinnt man ein vielseitiges und praxisnahes Anwendungsgebiet für elementare Begriffe. Mit Hilfe der Ganzteilfunktion erhält man Funktionsterme. Der Einfluß der beschränkten Abweichung von der Linearität auf die Verknüpfungstreue wird untersucht und bietet Gelegenheit zur Arbeit mit Ungleichungen und bestmöglichen Abschätzungen. Die Rundungsfunktionen werden durch ein Minimum-Maximum-Prinzip charakterisiert. Die Approximationsfolge von Rundungen stückweise monotoner Funktionen führt in natürlicher Weise auf das bestimmte Integral.

H.WINTER: Strukturorientierte Bruchrechnung

In der neueren didaktischen Literatur zur Bruchrechnung sind überzeugende Konzepte zur Einführung der Bruchzahlen und zur Einführung der Relationen und Verknüpfungen in B gemacht worden. Noch zu wenig beachtet blieb bisher eine Didaktifizierung struktureller Aspekte des archimedisch angeordneten Halbkörpers der Bruchzahlen. Hierzu sollen unterrichtsnahe Vorstellungen vorgetragen werden.

H.Wellstein (Würzburg)