MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 41 /1975

Arbeitstagung über die Monodromie

13.10. bis 17.10.1975

Unter der Leitung von E. Brieskorn (Bonn) und K. Lamotke (Köln) fand in der Woche vom 13. bis zum 17. Oktober im Rahmen einer halbjährlich stattfindenden Arbeitsgemeinschaft eine Arbeitstagung zum Thema Monodromie statt. Es wurden 15 Vorträge gehalten, die das Thema von der analytischen, algebraischen und topologischen Seite aus behandelten.

Teilnehmer

G. Angermüller, Erlangen
G. Barthel, Konstanz
R. Bernd, Hamburg
E. Brieskorn, Bonn
T. Bröcker, Regensburg
N.A'Campo, Paris
D. Erle, Dortmund
W. Fischer, Bremen
H. Flenner, Bochum
G. Frey, Erlangen
W.D. Geyer, Erlangen
G.M. Greuel, Bonn
G. Harder, Wuppertal
W.H. Hesselink, Utrecht
K. Jänich, Regensburg
U. Karras, Dortmund
L. Kaup, Konstanz
Fujiki, Bonn
Naruki, Bonn
K. Köhnen, Mainz
H. Kraft, Bonn
K. Lamotke, Köln
Lee Sin-Min, Paris
M. Lindner, Saarbrücken
E. Looijenga, Nijmegen
L. Miller, Karlsruhe
B. Moonen, Köln
H.-J. Nastold, Münster
J. Neukirch, Regensburg
R. Rentschler, Paris
J. Scherk, Bonn
D. Siersma, Amsterdam
W. Singhof, Köln
P. Slodowy, Regensburg
J. Steenbrink, Amsterdam
G. Wassermann, Regensburg
A. Koestner, Hannover
A. Dress, Bielefeld

Vortragsauszüge

E. BRIESKORN: Zur Geschichte der Monodromie

Monodromiegruppen traten in der Geschichte der Mathematik zum ersten Mal auf als Monodromiegruppen von gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen mit regulären singulären Punkten. Die Theorie entwickelte sich durch Untersuchungen über die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{p_o}{t} + \frac{p_1}{t-1}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{q_o}{t^2} + \frac{q_1}{(t-1)^2} + \frac{q_2}{t(t-1}\right)y = 0$$

von Euler, Gauß, Kummer, Riemann, H.A. Schwarz und F. Klein. Von Euler gibt es eine Integraldarstellung von Lösungen

$$y(t) = \int_o^1 x^a (1-x)^b (1-tx)^c \, dx \; .$$

Dies führt zur Betrachtung von Integralen der Form

$$y(t) = \int_{\gamma_t} \omega_t \quad :$$

Sei X_t eine Familie proj. alg. Mannigfaltigkeiten. ω_t eine Familie meromorpher q-Formen auf X_t, und γ_t eine mehrdeutige Familie von q-Zyklen, die durch stetige Parallelverschiebung entsteht. Dann gilt:

1. Regularitätssatz $y(t) = \int_{\gamma_t} \omega_t$ genügt einer regulär-singulären Differentialgleichung.

2. Monodromiesatz: Die Monodromie einer solchen Funktion bei Umlauf um eine singuläre Faser der Familie $\{X_t\}$ hat als Eigenwerte nur Einheitswurzeln.

In der Geschichte der Monodromie hat die Analyse spezieller Beispiele eine große Rolle gespielt. Das sogenannte Umkehrproblem für die hypergeom.-Dgl. (Riemann, Schwarz, Klein) führte dazu, die homogenen Polvnome in zwei Variablen zu betrachten. die unter der Monodromiegruppe invariant sind. Sie werden erzeugt von drei solchen Poynomen x,y,z, zwischen denen noch eine Gleichung besteht. Ist z.B. die Monodromiegruppe eine binäre Ikosaedergruppe, so ist dies die Gleichung

$$x^3 + y^5 + z^2 = 0 \, .$$

Diese und die verwandten Gleichungen

$$x^3 + y^5 + z_1^2 + \ldots + z_k^2 = 0$$

waren in der weiteren Entwicklung von großer Bedeutung und sie wurden auf die verschiedensten Weisen immer wieder entdeckt.

K. LAMOTKE: <u>Einführung in die topologische Untersuchung von isolierten Hyperflächensingularitäten</u>

Eine isolierte Hyperflächensingularität wird durch eine Polynomabbildung $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ mit isolierter kritischer Stelle a gegeben. Ihr wird der "gefaserte Knoten" $K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{2n+1} \subset S_\varepsilon^{2n+1}$ zugeordnet, wobei $S_\varepsilon^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ die Sphäre um a mit dem Radius ε ist (Milnor).
Jedem gefaserten Knoten $K \subset S^{2n+1}$ wird eine Verschlingungsform L, das ist eine unimodulare Bilinearform, zugeordnet. Für $n \geq 3$ werden die gefaserten Knoten differentialtopologisch umkehrbar eindeutig durch die unimodularen Bilinearformen charakterisiert (Kervaire, Levine, Durfee, Kato). Insbesondere erhält man die Schnittform einer typischen Faser als $S = L + (-1)^n L^t$ und die Monodromie als $T = \pm L^{-1} L^t$ (t = transponiert) (Levine).

Die Probleme, zu gegebener Hyperflächensingularität die Form L zu berechnen sowie diejenigen L zu charakterisieren, die von Hyperflächensingularitäten herkommen, sind nur in einigen Ansätzen gelöst. Z.B. kann man mittels Auflösung der Singularitäten beweisen, daß es ein q gibt, so daß $(T^q - \mathrm{id})^{n+1} = 0$ ist (Grothendieck, ...).
Es wird über die Deformation der Polynomabbildung f berichtet, bei der f durch ein "benachbartes" Polynom g ersetzt wird, welches nur nicht entartete kritische Stellen hat. Die topologische Untersuchung der durch g gegebenen "Faserung", deren Ausnahmefasern gewöhnliche Doppelpunkte und sonst keine Singularitäten haben, benutzt die Methoden, die Picard (1897) und Lefschetz (1924) entwickelten, um die Topologie einer glatten algebraischen Varietät

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

in einem projektiven Raum mittels der Schnitte mit einem Ebenenbüschel zu untersuchen: Verschwindende Zykeln, Picard Lefschetz'sche Formel.
Man erhält so, daß man L stets durch eine Dreiecksmatrix darstellen kann sowie Methoden um L in Spezialfällen, z.B. für $n = 1$ (2 Variable) explizit zu bestimmen. Schließlich wurde am Beispiel $f(x,y) = x^3 + y^5 + z^2$ durch Deformation die Schnittmatrix S bestimmt.

W.D. GEYER: <u>Der Monodromiesatz</u> (nach Clemens und A'Campo)

Der Vortrag berichtete über den Inhalt der §§1-3 der Arbeit von A'Campo: "La fonction zêta d'une monodromie" (Comm. Math. Helv. 50, Fasc. 2/1975, 233-248).
Sei H die Hyperfläche $P(z) = 0$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ mit einer Singularität in 0, so ist die geometrische Monodromie von H in 0 ein charakteristischer Homöomorphismus $f : F_\theta \to F_\theta$ einer Faser $F_\theta := \{z \in \mathbb{C}^{n+1};\ |z| = \varepsilon,\ \arg P(z) = \theta\}$ der Milnorfaserung. Es wird die Wirkung von f auf der Kohomologie $H^\bullet(F_\theta, \mathbb{C})$ untersucht. Löst man die Singularität (nach Hironaka) auf, so bestimmen die Multiplizitäten und Euler-Charakteristiken der Komponenten der Faser über 0 vollständig die Zetafunktion von f auf $H^\bullet(F_\theta, \mathbb{C})$. Im Fall einer isolierten Singularität besteht $H^\bullet(F, \mathbb{C})$ nur aus dem 0-ten und n-ten Term, daher bestimmen obige Invarianten der Auflösung das charakteristische Polynom von f auf $H^n(F_\theta, \mathbb{C})$ und die Milnor-Multiplizität $\mu = \dim H^n(F_\theta, \mathbb{C})$ der Singularität. Insbesondere folgt, daß die Eigenwerte der Monodromie auf $H^n(F_\theta, \mathbb{C})$ Einheitswurzeln sind, und auch eine Abschätzung der Größe der Jordankästchen kann gegeben werden.
Zum Beweis werden die mit der Zetafunktion eng verknüpften Lefschetzzahlen der Iterierten f^k der Monodromie berechnet. Dies geschieht mittels einer expliziten Beschreibung der geometrischen Monodromie.

D. ERLE: <u>Zur Frage der Endlichkeit der Monodromie</u>

Nach einer Idee von P. Deligne wird die explizite Beschreibung der geometrischen Monodromie mit Hilfe einer Auflösung der Singularität (voriger Vortrag) benutzt, um folgende Resultate zu beweisen bzw. deren Beweis zu skizzieren:

(1) Satz (Lê Dung Trang): Die Monodromie einer irreduziblen Kurvensingularität in der komplexen Ebene ist endlicher Ordnung.

(2) Monodromiesatz: Für die Monodromie h einer beliebigen Kurvensingularität in der komplexen Ebene gilt: Es gibt eine natürliche Zahl m mit $(h^m - id)^2 = 0$.

(3) Beispiel (A'Campo): Die Singularität $(x^2 + y^3)(x^3 + y^2) = 0$ hat eine Monodromie unendlicher Ordnung.
(Vgl. A'Campo: Sur la monodromie des singularités isolées, d'hypersurfaces complexes, Invent. math. 20, 147-169).

H. FLENNER: Reguläre Zusammenhänge

Im ersten Teil des Vortrages wurden allgemeine Zusammenhänge auf kohärenten Garben über einer komplexen Mannigfaltigkeit betrachtet. Die folgenden Eigenschaften wurden angegeben:
(1) Ist ein Zusammenhang integrabel, so ist die Garbe lokal frei.
(2) Für jede kohärente Garbe, zusammen mit einem integrablen Zusammenhang, hat das Vektorraumbündel der horizontalen Schnitte eine kanonische flache Struktur.
Im zweiten Teil wurden nur lokal freie Garben $\mathcal{E}$ mit einem Zusammenhang ∇ über der gelochten Kreisscheibe $S = \{x \in \mathbb{C}^* : |x| < 1\}$ betrachtet. Ist $e = (e_1, \dots, e_n)$, $e_i \in \Gamma(S, \mathcal{E})$ eine Basis von $\mathcal{E}$, so wurden die folgenden äquivalenten Charakterisierungen für die Regularität eines Zusammenhangs ∇ auf $(\mathcal{E}, e)$ gegeben:
(1) Bzgl. einer zu e meromorph äquivalenten Basis e' hat die kovariante Ableitung $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ die Form $\nabla_{\frac{d}{dt}}(\varphi \cdot e') = (\frac{d}{dt}\varphi + \frac{1}{t} A\varphi)e'$ wo $A \in GL(n, \mathbb{C})$.
(2) Ist $\nabla_{\frac{d}{dt}}(\varphi \cdot e) = (\frac{d}{dt}\varphi + A\varphi)e$, so sind die Koeffizienten von A meromorph; für die Differentialoperatoren $D : F \to t^{-r}F$ ($F := \mathbb{C}\{t\}^n$, $r \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, $D(\varphi) = \frac{d}{dt}\varphi + A\varphi$) und $\hat{D} : \hat{F} \to t^{-r}\hat{F}$ („$\hat{\ }$" bezeichne die t-adische Komplettierung) gilt:

Kern $D \cong$ Kern $\hat{D}$, Cokern $D \cong$ Cokern $\hat{D}$.

(3) A wie oben ist meromorph; es ex. $m \in \mathbb{N}$, so daß $D^k(F) \subset t^{-m-k}F \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(4) Die Koordinatenfunktionen (bzgl. e) eines jeden horizontalen Schnittes auf einem Kreissektor wachsen nicht schneller als $C t^{-n}$ ($C > 0$, $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß).

Ein Zusammenhang ist regulär singulär, wenn eine der 4 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

G. HARDER: Der Monodromiesatz nach Katz

Für einen glatten eigentlichen Morphismus $f : U \to V$ zwischen glatten Schemata über $\mathbb{C}$ definiert man die relative de Rham-Kohomologie

$$H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O}) = \mathbb{R}^q f_*(\Omega^\bullet_{U/V})$$

Dies liefert eine kohärente $\mathcal{O}_V$ - Garbe auf V . Auf dieser Garbe wird ein integrabler Zusammenhang konstruiert

$$\delta_q : H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O}) \to \Omega^1_V \otimes H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O}) ,$$

der sich aus einer exakten Sequenz für die Hyperkohomologie des Komplexes $\Omega^\bullet_{U/V}$ ergibt.
Katz zeigt:
Satz: δ_q hat reguläre singuläre Punkte.
Beim Beweis dieses Satzes zieht man sich auf den Fall zurück, daß V eine Kurve ist. Sei T das singularitätenfreie Modell von V . Dann findet man mit Hilfe der Auflösung der Singularitäten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & S \\ \downarrow f & & \downarrow \pi \\ V & \hookrightarrow & T \end{array} \qquad T - V = Y$$

wobei S glatt und $\pi^{-1}(Y)$ ein Divisor mit glatten Komponenten und normalen Überkreuzungen ist. Um Satz 1 zu beweisen, hat man $H^q_{DR}(U/V, \mathcal{O})$ auf T fortzusetzen.
Der Zusammenhang δ_q induziert einen Endomorphismus

$$A : \delta_q(t \frac{d}{dt})_{\{o\}} : H^q_{DR}(S/T)_{\{o\}} \longrightarrow H^q_{DR}(S/T)_{\{o\}}$$

wobei $H^q_{DR}(S/T)_{\{o\}}$ die Faser des Vektorraumbündels (und nicht der Halm der Garbe) sei. Dann gilt:

<u>Satz</u>: $$\left[\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=o}^{a_i-1} (a_i A - j)\right]^{q+1} = 0$$

für gewisse Zahlen a_i, die sich aus dem exzeptionellen Divisor von $\pi : S \to T$ bestimmen. Daraus folgt der Monodromiesatz.

Literatur: Katz: The regularity theorem in algebraic geometry, Actes Congrès intern. math. 1970, Tom.1, p.437-443.
Katz-Oda in: Journal of Math. Univ. of Kyoto, 1968.

<u>J. STEENBRINK</u>: <u>Mixed Hodge Structures</u>

One describes the Hodge decomposition of $H^k(M, \mathbb{C})$ for M a projective manifold; if L is the hyperphome class then $\wedge L^{n-k} \quad H^k(M) \xrightarrow{\sim} H^{2n-k}(M) \quad (n = \dim M,\ k \leqslant n)$.

A mixed Hodge structure is, roughly speaking, a finitely generated abelian group $H_{\mathbb{Z}}$, a filtration $W_o \subset W_1 \subset \ldots$. of $H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ and for all k a decomposition $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} (W_k/W_{k-1}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ with $H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$, induced by a filtration on $H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$.

Deligne defines a functor : $\{$algebraic varieties $/\mathbb{C}\} \to \{$mixed Hodge structures$\}$ where $H_{\mathbb{Z}}(X) = H^*(X,\mathbb{Z})$, which for smooth projective varieties gives back the Hodge decomposition.

One treats the example of an affine hypersurface in $\mathbb{C}^{n+1}$ with equation $f(z) = 1$ for f homogeneous with isolated singularity at 0.

One considers the Milnor fiber of the function $(x^4 - y^2)(x^2 - y^4)$ and shows how to filter its H_1 to get a mixed Hodge structure.

Finally the case of a projective family over the unit disk is treated, where the singular fiber over 0 consists of two components Y_1, Y_2 which are smooth and intersect transversally. For $\gamma \in H_{n-1}(Y_1 \cap Y_2)$ one constructs $l_{n-1}(\gamma)$, $l_{n+1}(\gamma)$ $\in H_n(Y_t)$, Y_t the generic fiber; a filtration W is defined in terms of these and the connection with monodromy and intersection form on $H_n(Y_t)$ is formulated.

N. A.'CAMPO: <u>Polyèdre de Newton d'une singularité</u>

Soit $f(x) = \sum_{v \; \mathbb{N}^{n+1}} a_v \, x^v$ un polynôme. Le sous-monoide de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$M = \{ w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists \; v \in \mathbb{N}^{n+1}, w - v \;\; \mathbb{N}^{n+1} \text{ et } a_v \neq 0 \}$$

s'appelle monoide de f.
Soit $\widetilde{M}$ l'enveloppe convexe de M ; c'est un polyèdre de dimension pure $n + 1$, dont les points extrêmaux sont dans $\mathbb{N}^{n+1}$. Le polyèdre de Newton Γ de f est l'union des faces compacted de dimension $\leqslant n$ de $\widetilde{M}$. (Dans le cas $n = 1$ on retrouve le polygone de Newton classique).
Un k-simplexe σ dans $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ est la donnée de k points $v_1, \ldots, v_k$ de $\mathbb{N}^{n+1}$ linéairement independants. Un k-simplexe est special si σ est inclu dans une intersection de $n + 1 - k$ hyperplans de coordonnés de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Une décomposition simpliciale de Γ est une famille $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ de simplices telle que

$$\bigcup |\sigma_i| = \Gamma$$
$$|\mathring{\sigma}_i| \cap |\mathring{\sigma}_j| = \emptyset \qquad , \; i \neq j ,$$

ici $|\sigma|$ désigne l'enveloppe convexe de $\{o\} \cup \sigma$.
Soit σ un k-simplex spécial. On note

$$V(\sigma) := (-1)^k \cdot k! \; . \; (\text{Volume k-dim. de } |\sigma|) .$$

De plus, on appelle poids de σ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $p(v) = 1$, $v \in \sigma$. La multiplicité de σ est le plus petit entier $m(\sigma) = m > 0$ telle que $m \cdot p(v) \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N}^{n+1} \cap [\sigma]$; ici $[\sigma]$ désigne le sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par σ.
Nous donnous ici une formule experimentalement testé et dont la demonstration a fait de grand progres durant ce colloque, pour la fonction Zêta de la monodromie:
<u>Formule</u>: Soit $\Gamma = \bigcup |\sigma_i|$ une decomposition simpliciale d'un polyèdre de Newton Γ. Soit E_Γ l'espace des polynômes f tels que le polyèdre de f est Γ. Il existe dans l'espace des coefficients $\{ a_v \}_{v \in \Gamma \cap \mathbb{N}^{n+1}}$ un ouvert de Zariski

Ω tel que pour toute fonction $g \in \Omega$ ayant une singularité isolée on a

$$Z_g(t) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \sigma_i \text{ special}}} (t^{m(\sigma_i)} - 1)^{\frac{V(\sigma_i)}{m(\sigma_i)}}$$

Cette formule redonne, pour le nombre de Milnor μ :

<u>Theorème</u> (Kusnirenko)

$$\mu = (-1)^n \left[1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \sigma_i \text{ special}}} V(\sigma_i) \right] .$$

G.-M. GREUEL: <u>Der singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang</u>

Sei $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$ ein holomorpher Abbildungskeim mit isolierter Singularität. Man wählt einen Milnor'schen Repräsentanten $f : X \to S$, so daß $f : X - f^{-1}(0) \to S - \{0\}$ ein zur Milnorfaserung äquivalentes C^∞- Faserbündel ist. Der lokale singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang ∇ ist ein spezieller gewöhnlicher Differentialoperator, der in $0 \in S$ eine polartige Singularität besitzt und dessen Monodromie sich kanonisch mit der lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie von f in 0 identifiziert. Man betrachtet die relative De Rham-Kohomologie $\mathcal{H}^\bullet(f_* \Omega^\bullet_{X/S})$. Nach einem Satz von Brieskorn ist $\mathcal{H}^\bullet(f_* \Omega^\bullet_{X/S})$ kohärent und die Einschränkung $\mathcal{H}^n(f_* \Omega^\bullet_{X/S}) \mid S - \{0\}$ genau die Garbe der Keime von holomorphen Schnitten in dem komplexen Vektorraumbündel $H^n := \bigcup_{t \in S - \{0\}} H^n(X_t, \mathbb{C})$. Das flache Vektorbündel H^n hat einen kanonischen Zusammenhang, dessen Monodromie genau die Picard-Lefschetz-Monodromie ist. Der Gauß-Manin-Zusammenhang ∇ ist eine Fortsetzung dieses auf transzendente Weise definierten Zusammenhangs auf ganz $\mathcal{H}^n(f_* \Omega^\bullet_{X/S})$. Seine kovariante Ableitung längs d/dt wird folgendermaßen definiert:

$$\nabla_{d/dt} : \mathcal{H}^n(f_* \Omega^\bullet_{X/S}) \to f_* \Omega^n_{X/S} / d(f_* \Omega^{n-1}_{X/S}) :$$

Sei $[\omega] \in \Gamma(U, \mathcal{H}^n(f_* \Omega^{\bullet}_{X/S}))$ und $\omega \in \Gamma(f^{-1}U, \Omega^n_X)$ ein Repräsentant; dann gilt $d\omega = df \wedge \alpha$ mit $\alpha \in \Gamma(f^{-1}U, \Omega^n_X)$. Sei $\left[\frac{d\omega}{df}\right] := [\alpha]$ die Klasse von α in $\Gamma(U, f_* \Omega^n_{X/S} / d(f_* \Omega^{n-1}_{X/S}))$, dann sei

$$\nabla_{d/dt} [\omega] := \left[\frac{d\omega}{df}\right].$$

Satz: Der lokale singuläre Gauß-Manin-Zusammenhang ∇ ist regulär singulär.

Aufgrund des Regularitätssatzes und der Beschreibung der P.L.-Monodromie als Monodromie von ∇ ist es möglich, einen Algorithmus zur Berechnung der Monodromie anzugeben.

Literatur: Brieskorn, E.: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.

Greuel, G.-M. : Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten vollständiger Durchschnitte. Math. Annalen 1975.

J. SCHERK: Monodromie und asymptotische Entwicklung schnell oszillierender Integrale (nach Malgrange, Intégrales asymptotiques et monodromie. Annales de l'Ecole Normale Supérieure)

Diese Arbeit stellt eine Verfeinerung von den Resultaten von Brieskorn und Greuel dar, und eine Anwendung deren Theorie auf das asymptotische Verhalten schnell oszillierende Integrale.

Hauptlemma: $\lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ \arg t = 0}} \int_{\gamma(t)} \omega = 0 \qquad \omega \in \Gamma(X, \Omega^n_X),\ \gamma(t) \in H_n(X_t),\ t \neq 0$

Konsequenzen: (1) Regularitätssatz

(2) $\int_{\gamma(t)} \omega = \sum\limits_{\substack{0<\alpha \\ 0 \leq q \leq q_0 - 1}} d_{\alpha,q}\, t^{\alpha} (\log t)^q$ wo q_0 = Index der Unipotenz, $e^{2\pi i \alpha}$ Eigenwerte der Monodromie

(3) $H^n(\Omega_{X/S})_0 = H^n(\Omega_{X/S,0})$ ist torsionsfreier $\mathbb{C}\{t\}$-Modul (Sebastiani)

(4) $H^n(\Omega_{X/S,o})$ hat zwei Filtrierungen :

$$\{\mathfrak{m}^j H^n(\Omega_{X/S,o})\}_{j\geq o} \text{ und } \{t^j H^n(\Omega_{X/S,o})\}_{j\geq o},$$

wo $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,o}$ ist. Die entsprechenden Topologien sind äquivalent.

(5) Sei $f \in C^\omega(\mathbb{R}^{n+1})$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\tau f} g\, dx \sim \sum_{\alpha,q} c_{\alpha,q} \tau^{-\alpha-1} (\log \tau)^q \qquad \alpha,q \text{ wie oben}$$

(es sei $\sim$ asymptotische Äquivalenz).

TH. BRÖCKER: Morsefizierung und Picard-Lefschetz-Theorie

Für Polynome mit isolierter Singularität wird der Variationshomomorphismus var : $H_q(F, \partial F) \longrightarrow H_q(F)$ eingeführt, wo F die Milnorfaser ist. Es wird gezeigt, var ist ein Isomorphismus für $q = 0,n$. Im Falle einer nicht entarteten, quadratischen Singularität wird der verschwindende Zykel konstruiert und die Picard-Lefschetzsche Formel bewiesen. Diese verallgemeinert sich auf den Fall mehrerer isolierter, nicht entarteter Singularitäten. Durch Morsefizierung ergibt sich dann für eine beliebige isolierte Singularität der folgende Hauptsatz:

Sei $S: H_n(F) \otimes H_n(F) \to \mathbb{Z}$ die Schnittform, $L : H_n(F)\otimes H_n(F) \to \mathbb{Z}$ die Verschlingungsform; diese ist definiert durch

$$L(x,y) := (-1)^{n+1} \langle \operatorname{var}^{-1} y, x \rangle$$

(i) $$H_q(F) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0,n \\ \text{endlich erzeugte freie abelsche Gruppe} & q = n \end{cases}$$

(ii) $S(x,y) = L(x,y) + (-1)^n L(y,x)$

$L(x,Hy) = (-1)^{n+1} L(y,x)$ (H die algebraische Monodromie)

(iii) $H_n(F)$ besitzt eine Basis s_ν, $\nu = 1,\ldots,\mu$, von verschwindenden Zykeln. Es gilt:

$$H = \sigma_\mu \circ \ldots \circ \sigma_1, \qquad \sigma_\nu : H_n(F) \to H_n(F)$$

$$\sigma_\nu(x) = x - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S(x, s_\nu) s_\nu$$

(iv) Bezgl. der Basis $(s_1, \ldots, s_\mu)$ wird L durch eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ gegeben.

Literatur: Lamotke, K: Die Homologie isolierter Singularitäten. Math. Z. 143, 27-44

G. BARTHEL: <u>Schnittform für Singularitäten ebener Kurven (nach A'Campo, Gusein-Sade, Scott, ...)</u>

Sei $f: (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorph mit einer isolierten Singularität, alle Zweige von f seien reell-analytisch. Für eine reelle Störung g von f sind die Schnittpunkte der Zweige in einer reellen Milnorscheibe D_ε reelle kritische Punkte, weiter liegt in jeder "Region" (Komponente von $D_\varepsilon \setminus g^{-1}(0)$, die den Rand ∂D_ε nicht trifft) mindestens ein Extremum von $g|D_\varepsilon$ und somit ein kritischer Punkt. Genau dann ist g eine reelle Morse-Störung (d.h. alle kritische Punkte sind reell und Morsepunkte), wenn die Maximalzahl $\delta = \frac{1}{2}(\mu_f + r - 1)$ von Schnittpunkten (r: Anzahl der Zweige) (und die Maximalzahl $\mu - \delta$ von Regionen) vorliegt.

Es gilt:

<u>Satz 1</u>: Eine ebene isolierte Kurvensingularität mit nur reellen Zweigen hat eine reelle Morse-Störung.

Aus dem Bild der Niveaulinien und Trajektorien einer reellen Morse-Störung erhält man ein "geometrisches Dynkin-Diagramm."

<u>Satz 2</u>: Das geometrische Dynkin-Diagramm der reellen Morse-Störung ist das Dynkin-Diagramm der Schnittform (bzgl. einer geeigneten Basis verschwindender Zykel).

Literatur: Zu Scott vgl. Am. J. of Math. Nr. 4.

U. KARRAS: Einfache und einfach-elliptische Singularitäten

Das Umkehrproblem der hypergeometrischen Differentialgleichung führt auf das Problem: Sei $G \subset SU(2)$ eine endliche Untergruppe. Was sind die unter G invarianten Polynome in 2 Variablen?
Antwort: Der Ring dieser Polynome wird erzeugt von 3 Polynomen x,y,z, die einer quasihomogenen polynomialen Gleichung $f(x,y,z) = 0$ genügen. G operiert auf $\mathbb{C}^2$ mit genau einem Fixpunkt im Ursprung, der im Orbitraum $\mathbb{C}^2/G$ eine isolierte Singularität definiert.
Satz: Die Quotientensingularität ist isomorph zu der isolierten Singularität der Hyperfläche $f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^3$
Es kann gezeigt werden, daß diese genau die Singularitäten A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 sind. Diese Singularitäten lassen sich auf mannigfache Art charakterisieren. Arnol'd studierte das Problem, alle einfach Singularitäten zu klassifizieren, das sind definitionsgemäß genau die Singularitäten, für die jede lokale Deformation nur zu endlich vielen nicht isomorphen Singularitäten führt.
Satz: Die einfachen Singularitäten sind genau die Quotienten-singularitäten.
Der Beweis zerfällt im wesentlichen in 2 Schritte. Zunächst zeigt die semiuniverselle Deformation der Quotientensingularitäten, daß diese einfach sind. Der zweite Schritt besteht darin zu zeigen, daß jede isolierte Hyperflächensingularität (verschieden von einer Quotientensingularität) in eine einfach-elliptische Singularität $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ deformiert werden kann. Die exzeptionelle Kurve der minimalen Auflösung der $\tilde{E}_i$ ist eine singularitätenfreie elliptische Kurve. Daher sind diese offensichtlich nicht einfach. Man erhält hieraus recht einfach das folgende stärkere Resultat: Die Schnittmatrix der Milnorfaser einer Hyperflächensingularität ist genau dann definit, wenn diese eine einfache Singularität ist.
Tjurina benutzte dieses Ergebnis, um einen Zusammenhang zwischen der Milnorfaser und der minimalen Auflösung herzustellen.
Satz: Die Milnorfaser ist genau dann diffeomorph zur mimimalen Auflösung einer Hyperflächensingularität, wenn diese einfach ist. Denn aus obigem Resultat folgt, daß nur die einfachen Singularitäten infrage kommen. Der Rest ist ein Korollar des folgenden Satzes.

Satz: Jede lokale Deformation einer einfach Singularität läßt sich simultan auflösen.(Brieskorn)

E. LOOIJENGA: A homotopy problem in singularity theory and the period mapping

As was shown by Tjurina, any germ of a hypersurface (X,x_o) with isolated singularity admits a semi-universal deformation $F: (X,x_o) \longrightarrow (S,s_o)$ (with $F^{-1}(s_o) \cong X_o$) . For a good representative $\tilde{F} : X \to S$ of F the critical set of F maps properly to S. Its image Δ is then an analytic irreducible hypersurface and is usually called the discriminant.
Brieskorn has shown that for a simple singularity one has a nice description of (S, Δ) as a pair $(V_{\mathbb{C}}/W,D)$ there W is a Weyl group in the complex vector space $V_{\mathbb{C}}$, and D the branch locus of the canonical map $V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}/W$. In the lecture I indicated a proof of this result using the period mapping. This period mapping was also used to obtain a similar description for simple-elliptic singularities.
To state it, let W_a be an affine Weyl group acting on an affine l-space V . Let $T_a \subset W_a$ denote the translation subgroup and write $W = W_a/T_a$. For any elliptic curve $E/\mathbb{C}$ consider the abelian variety $E \otimes T_a$ ($\cong E^l$). Over $E \otimes T_a$ exists a line bundle $\mathcal{L}$ which (i) admits a W-action lifting the canonical action of W on $E \otimes T_a$, (ii) whose associated Hermitian form is $< o$ and (iii) generates the (infinite cyclic) group of line bundles satisfying (i) . We then have that $\text{0-section} \setminus \mathrm{Tot}(\mathcal{L})/W$ is isomorphic to $\mathbb{C}^{l+1}$. Denote the former space by $S^E_{W_a}$ and write $D^E_{W_a}$ for the discriminant of the canonical map $\mathrm{Tot}(\mathcal{L}) \longrightarrow S^E_{W_a}$.

Now suppose X_o simply elliptic, i.e. obtained by collapsing the 0-section of a line bundle $\overset{\downarrow}{E}\, l$ (E elliptic curve as above) of Cherm class $k-9$ $(k = 6,7,8)$ to a point. Then the pair (S, Δ) is isomorphic to $(S^E_{W_a}, D^E_{W_a})$ with $W_a = W(E_k)$.

B. Moonen (Köln)