MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 43 /1976

Arbeitsgemeinschaft Geyer-Harder:

Himmelsmechanik

10.10. bis 16.10.1976

Die Herbsttagung der Arbeitsgemeinschaft stand unter der Leitung von H. Rüßmann (Mainz). Die Tagung wurde von E. Zehnder (Erlangen) vorbereitet.

Die Frühjahrstagung der Arbeitsgemeinschaft findet vom 3.4.1977 bis 9.4.1977 statt. Sie wird das Thema "Klassifikation von Flächen" haben. Die Vorbereitung übernimmt Herr Popp (Mannheim).

Teilnehmer

Binz, Mannheim
Erle, Dortmund
Freitag, Mainz
Fuzita, Mannheim
Geyer, Erlangen
Gottschling, Mainz
Horneffer, Bremen
Kirchgraber, Zürich (Schweiz)
Kneser, Göttingen
Mayer, Dortmund
Orbanz, Paderborn
Bröcker, T. Regensburg
Fischer, Bremen
Frey, Saarbrücken
Gamst, Bremen
Goldhorn, Mainz
Höner, Mainz
Kani, Heidelberg
Kiyek, Paderborn
Lindner, Saarbrücken
Oertel, Bielefeld
Pfeuffer, Mainz

Pommerening, Mainz
Reiter, Mainz
Scheerer, Heidelberg
Staude, Mainz
Viehweg, Mannheim
Wolff, Dortmund
Popp, Mannheim
Rüßmann, Mainz
Siersma, Amsterdam (Niederlande)
Suckow, Mainz
Wittstock, Saarbrücken

Einige Bemerkungen über die Probleme der Himmelsmechanik

Die Himmelsmechanik beschäftigt sich mit den Lösungen der Differentialgleichungen des n-Körperproblems, bei dem sich n Massenpunkte m_i, $i=1,\dots,n$, nach dem Newetonschen Gravitationsgesetz anziehen. Setzt man $x_i \in \mathbb{R}^3$ für die Lage und $y_i \in \mathbb{R}^3$ für den Impuls des i-ten Massenpunktes, so lautet diese Differentialgleichung

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^T H(x,y) \quad , \quad \dot{y} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^T H(x,y)$$

mit $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$, $y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. Dabei ist die Hamiltonfunktion definiert durch $H(x,y) = T(y) + V(x)$ mit

$$T(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i|^2}{m_i} , \qquad V(x) = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$$

Gewöhnlich betrachtet man nur den Fall, in dem (n-1) Massenverhältnisse, etwa m_i/m_n, $i=1,\dots,n-1$, klein sind. Die Gleichungen sind auf $\mathbb{R}^{6n} \setminus \Delta$ definiert, wobei $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^{3n} \mid x_i = x_j$ für mindestens ein $i \neq j\}$ die Menge der sog. Kollisionspunkte ist.

Für den Fall n=2 (Keplerproblem) sind die Lösungen bekannt. Im Fall $n \geq 3$ weiß man jedoch nur wenig. Eines der Hauptprobleme ist das Stabilitätsproblem nämlich das Verhalten der Lösungen über ein unendlich langes Zeitintervall, falls solche existieren. Hier wurden in den letzten 20 Jahren große Fortschritte durch die Arbeiten von Kolmogorov, Arnold und Moser erzielt. Demnach existiert in jenem Teil des Phasenraumes $\mathbb{R}^{6n}$ der der Konfiguration des n-Körperproblems entspricht, eine Cantorartige Menge von positivem Maß, die überdeckt wird von quasiperiodischen Lösungen, insbesondere also von Lösungen, die für alle Zeiten beschränkt bleiben und keine Kollisionen erleiden. Diese sog. KAM-Theorie wird am Beispiel des restringierten Dreikörperproblems studiert. Zwischen den "guten" quasiperiodischen Lösungen existieren Lösungen von total verschiedenem Verhalten über unendliche lange Zeiten, nämlich unstabile, deren erratisches Verhalten durch Einbettungen von topologischen Bernoulli-Systemen beschrieben wird. Dieser Lösungstyp wird an einem speziellen Dreikörperproblem studiert. Außerdem gibt es noch singuläre Lösungen, nämlich Kollisions- und Explosionslösungen, die an linearen Drei- und Vierkörperproblemen studiert werden. Schliesslich wird noch die Arbeit von Smale über die Topologie des ebenen n-Körperproblems studiert.

Literatur

[1] C.L.Siegel-J. Moser: Lectures on Celestial Mechanics, Springer, 1971

[2] J. Moser: Stable and Random Motions in Dynamical Systems Princeton University Press

[3] V.Arnold-A.Avez: Ergodic Problems in Classical Mechanics, Benjamin 1968

[4] H.Rüßmann (Manuskript)

[5] V.Arnold Small denominators and problems of stability of motions in classical mechanics, Russ.Math. Surveys 18 (1963) 85-193

[6] R.McGehee Triple collision in the collinear three-body problem Invent. math.27 (1974)191-227

[7] R.McGehee Springer Lecture Notes of Pysics Vol.38 (1975) 550-572

[8] J. Moser Regularization of Kepler's problem and the avaraging method on a manifold, Comm.P.A.Math. 23 (1970) 606-636

[9] R.McGehee Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time, Springer Lecture Notes of Physics Vol. 38 (1975)573-597

[10] S.Smale Topology and mechanics I,II Invent.math.10 (1970) 305-331, 11 (1970) 45-64

[11] J.W.Robbin Relative equilibria in mechanical systems, in: Dynamical Systems, Ed. by M.H. Peixoto, Academic Press 1973,pp 425-443

[12] J.M.Souriau Structure des systêmes dynamiques Dunod, Paris 1971

[13] A.Iacob Methode Topologice în mechanica clasică. Editura acad. republ. social. românia, Bucuresti 1973

Vortragsauszüge

I. Die KAM-Theorie, illustriert am restringierten 3-Körperproblem

Gegen Ende des letzten Jahrhunderts wurden quasiperiodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems in Gestalt formaler Potenzreihen nach Potenzen eines kleinen Störparameters gefunden, vornehmlich von Delaunay und Poincaré. Die Konvergenz dieser Reihen wurde erst in den letzten 20 Jahren von Kolmogorov, Arnold und Moser bewiesen. Die mathematische Schwierigkeit des Konvergenzbeweises ist unter dem Begriff "Kleine Nenner" bekannt. Zur Oberwindung dieser Schwierigkeit benutzt man eine rasch konvergierende Approximationsmethode, die dem Newtonverfahren nachgeahmt ist. Diese Methode erlaubt auch die Konstruktion einer großen Menge quasiperiodischer Lösungen des allgemeinen ebenen und räumlichen N-Körperproblems,

$N \geq 3$.

1. S. SUCKOW : Das restringierte 3-Körperproblem in der Ebene

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen zu Hamiltonschen Differentialgleichungen und kanonischen Transformationen wird das restringierte Dreikörperproblem betrachtet: Zwei Körper P_1 und P_2 bewegen sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt; ein dritter Körper P bewegt sich in dem von P_1 und P_2 erzeugten Gravitationsfeld in derselben Ebene wie P_1 und P_2. Man beschreibe seine Bewegung! Zur Untersuchung dieses Problems behandelt man die Masse μ von P_2 als Störparameter. Der Fall $\mu = 0$ ist das Keplerproblem (Bewegung im Zentralfeld). Man führt zunächst Winkel- und Wirkungsvariable ein ("Delaunay- Transformation").

Die neue Hamiltonfunktion hat dann die Form

$$H(x,y;\mu) = H_0(y) + \mu H_1(x,y;\mu)$$

wo H periodisch in den Winkelvariablen x_i ist. Im ungestörten Fall ($\mu = 0$) bekommt man eine Faserung durch invariante Tori; die Lösungskurven darauf sind periodisch oder quasiperiodisch, je nachdem, ob der "Frequenzvektor" $\omega = H_0(y_0)$ rational ist oder nicht (dies gilt bezgl. eines rotierenden Koordinatensystems).

2. H PFEUFFER : Konstruktion quasiperiodischer Lösungen mit Hilfe formaler Potenzreihen nach Potenzen eines Störparameters

Indem man das gestörte Problem für kleine μ durch eine kanonische Transformation

$$x = X(\xi, \eta, \mu) = \xi + \mu \hat{X}(\xi, \eta, \mu), \quad y = Y(\xi, \eta, \mu) = \eta + \mu \hat{Y}(\xi, \eta, \mu)$$

so transformiert, daß das neue Hamiltonsche Differentialgleichungssystem

$$\dot{\xi} = K_{\eta}^{T} \quad , \quad \dot{\eta} = -K_{\xi}^{T}$$

nicht explizit von ξ abhängt, wenn man ein festes $\eta = b$ wählt, erhält man quasiperiodische Lösungen durch

$$\begin{aligned} \eta &= b \\ \xi &= \omega t + \overset{\circ}{\xi} \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= X(\omega t + \overset{\circ}{\xi}, b, \mu) \\ y &= Y(\omega t + \overset{\circ}{\xi}, b, \mu) \end{aligned}$$

mit $\omega(\mu) = K_{\eta}(b, \mu)^T$. Eine solche Transformation ist - wenn überhaupt - möglich mit X, das nicht von η abhängt, und Y, das linear in η ist. Wenn b die Eigenschaft hat, daß für $\omega = \omega(0) = H_{oy}(b)^T$ jede Differentialgleichung

$$F_{\xi}\,\omega = f \quad \text{(mit f und F analytisch und } 2\pi\text{-periodisch)}$$

lösbar ist, gibt es formale Potenzreihen in μ für X und Y, die bei vorgegebenem $\omega(\mu)$ im Wesentlichen eindeutig sind, so daß

$$K(\xi, \eta, \mu) = H(X, Y, \mu)$$

die verlangte Eigenschaft hat.

Die Menge der b, für die ω nicht die entscheidende Eigenschaft hat (z.B. alle rationalen ω) liegt dicht. Daher gibt es keine kanonische Transformation mit der verlangten Eigenschaft für alle b (Poincaré's Preisschrift). Die Konvergenz der Potenzreihen in μ kann nicht direkt bewiesen werden.

3. H. REITER : Kleine Nenner

Es wird untersucht, für welche $\omega \in \mathbb{R}^n$ die Differentialgleichung

$$F_z(z)\,\omega = f(z)$$

für jede reell-analytische, n-fach 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lösung hat. Notwendig ist, daß der Mittelwert von f Null ist. Dann erhält man die Lösbarkeit mit Ausnahme einer Menge von Lebesgue-Maß Null, in der die Zahlen $k^T\omega$, $0 \neq k \in \mathbb{Z}^n$, zu stark klein werden. Genügt f(z) für gutes ω und für $|\mathrm{Im}\, z| < r$ der Abschätzung $|f(z)| < M$, so gilt für $|\mathrm{Im}\, z| < r - \delta$

$$|F(z)| \leq c(n,\tau)\frac{M}{\gamma\,\delta^{\tau}}$$

wobei $c(n,\tau)>0$, $\tau \geq n-1$ und $\gamma = \gamma(\omega) > 0$ ist.

4. K. POMMERENING : Beweis der Konvergenz der formalen Reihen mit Hilfe eines Newtonschen Iterationsprozesses

Für kleine Werte des Störparameters μ werden (bei festen Anfangswerten) Lösungen des restringierten Dreikörperproblems konstruiert, die analytisch von μ abhängen. Dabei darf der Anfangswert b für die Impulsvariablen nicht der in den Vorträgen 2 und 3 beschriebenen Ausnahmemenge angehören. Auf diese Weise wird - freilich nicht direkt, sondern auf einem Umweg - auch die Konvergenz der formalen Potenzreihen-Lösungen aus Vortrag 2 erhalten, und zwar wegen der dort formulierten Eindeutigkeit. Die Beweismethode - nach Kolmogorov - Arnold -

Moser, von Rüßmann vereinfacht - ist ein Iterationsverfahren, das dem bekannten elementaren Newtonverfahren nachgebildet ist. Die "kleinen Nenner", die den direkten Konvergenzbeweis für die formalen Potenzreihen verhindern, treten hier ebenfalls auf, weil in jedem Iterationsschritt Differentialgleichungen von dem im Vortrag 3 beschriebenen Typ zu lösen sind. Die Konvergenz des Verfahrens ist jedoch so stark, daß der Einfluß der kleinen Nenner nur die Konvergenzgeschwindigkeit etwas mindert; der Fehler geht nicht mehr quadratisch, d.h. wie ε^{2^ν}, $0<\varepsilon<1$, gegen 0, sondern nur wie $\varepsilon^{\varkappa^\nu}$ mit einem $\varkappa$, $1<\varkappa<2$.

II. Unstabile Lösungen

In diesem Vortragszyklus werden unstabile Lösungen des Dreikörperproblems an einem Spezialfall studiert, der von Sitnikov und Alekseev untersucht wurde. Dabei betrachtet man das folgende spezielle Dreikörperproblem: Zwei Massen m_1, m_2 mit $m_1 = m_2 > 0$ bewegen sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz in einer Ebene auf Ellipsenbahnen mit der Exzentrizität $\varepsilon > 0$. Gesucht ist die Bewegung eines dritten Massenpunktes $m_3 = 0$, der sich auf einer Geraden senkrecht zur Ebene durch den Massenschwerpunkt bewegen soll. Mit Hilfe des topologischen Shifts können verschiedene Lösungen des Problems in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen untersucht werden.

1. D. ERLE : Der topologische Shift

Als Vorbereitung für die Behandlung des Problems von Sitnikov wird der topologische Shift besprochen. Bei diesem Homöomorphismus einer Cantormenge sind z.B. die periodischen Punkte dicht. Der topologische Shift kommt als Einschränkung von Homöomorphismen eines Quadrates in der Ebene vor, wenn der im Quadrat liegende Teil der Bildmenge aus einem System von

horizontalen Streifen und deren Urbild aus einem System von vertikalen Streifen besteht. Dabei müssen u.a. Oberkanten der Streifen in Oberkanten übergehen.
Hat ein Diffeomorphismus φ einer offenen Teilmenge der Ebene in die Ebene einen homoklinischen Punkt r bezgl. eines hyperbolischen Fixpunktes p, in dem sich stabile und instabile Mannigfaltigkeiten transversal schneiden, so enthält die sog. transversale Abbildung,die lokal eine Potenz von φ ist, einen topologischen Shift in der Nähe von r. Daraus folgt die Existenz unendlich vieler weiterer homoklinischer Punkte in der Nähe von r.

2. W. FISCHER : Das restringierte Dreikörperproblem von Sitnikov I

Zwei Punkte gleicher Masse mögen sich auf Keplerellipsen in einer festen Ebene bewegen. Ein dritter Körper winziger Masse bewege sich auf einer Geraden, welche die Ebene der beiden Primärkörper in deren gemeinsamen Schwerpunkt senkrecht schneidet. Ist z die Koordinate auf dieser Geraden, so wird die Bewegung des dritten Körpers bei geeigneter Normierung beschrieben durch

$$\ddot{z} = - z(z^2 + r(t))^{-3/2} \tag{1}$$

wobei $r(t) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon \cos t) + O(\varepsilon^2)$ der Abstand eines Primärkörpers vom Schwerpunkt und ε die Exzentrizität seiner Bahn ist. Es werden verschiedene mit (1) zusammenhängende Probleme diskutiert.

3. J. GAMST : Das restringierte Dreikörperproblem von Sitnikov II

Die Diskussion der Differentialgleichung (1) wurde fortgesetzt. Die Resultate von Sitnikov beziehen sich auf Lösungen von(1) mit unendlich vielen Nullstellen $t_k < t_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$.Derartigen Lösungen ordnet man ganze Zahlen

$$s_k = \left[\frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi}\right]$$

zu. Umgekehrt gilt:

Satz: Zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es eine ganze Zahl $c(\varepsilon) > 0$, so daß jede Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $s_k \geqslant C(\varepsilon)$ einer Lösung von (1) entspricht.

Daher gibt es sowohl periodische Lösungen als auch unbeschränkte Lösungen, die unendlich oft oszillieren. Auch Folgen der Form $(\ldots,s_{-1},s_0,s_1,\ldots,s_{k-1},\infty)$ entsprechen Lösungen von (1), nämlich Fluchtlösungen, die für $t \leqslant 0$ beschränkt sind und für $t \to \infty$ monoton über alle Grenzen wachsen. Aus dem gleichen Grunde gibt es auch Einfanglösungen

4. K. HORNEFFER : Das restringierte Dreikörperproblem von Sitnikov III

Die Sitnikovschen Resultate beruhen auf einer Einbettung des topologischen Shifts in eine Abbildung $\varphi : D_0 \to D_1$. Diese Abbildung ordnet einer wiederkehrenden Lösung z der Differentialgleichung (1) Zeitpunkt und Geschwindigkeit der Wiederkehr (als Polarkoordinaten aufgefaßt) zu. In dem Vortrag wurden die für die Einbettung benötigten Eigenschaften von φ behandelt, insbesondere die Gestalt des Definitionsbereiches D_0. Hierzu ist eine genaue Analyse des Verhaltens der Fluchtlösungen der Differentialgleichung in der Nähe des Punktes ∞ erforderlich. Dieser kann als periodischer Orbit aufgefaßt werden, von dem zwei invariante Mannigfaltigkeiten ausgehen, die sich in einem Schnittpunkt P der Ränder ∂D_0 und ∂D transversal schneiden. Dadurch erklärt sich das homoklinische Verhalten dieses Punktes.

III. Singuläre Lösungen

Außer den in den ersten beiden Vortragszyklen besprochenen stabilen und unstabilen Lösungen besitzt das n-Körperproblem noch singuläre Lösungen, bei denen man zwischen Kollisions- und Explosionslösungen unterscheiden kann, die beide nur für ein endliches Zeitintervall existieren. Diese Lösungstypen werden für den Spezialfall des kollinearen Drei- und Vierkörperproblems untersucht.

1. G FREY: Der kollineare Dreierstoß. I. Desingularisierung

Wir betrachten drei Massenpunkte, die sich auf einer Geraden in einem Newtonschen Kraftfeld bewegen, und suchen nach möglichen Bahnen, die nach endlicher Zeit enden, z.B. in einer Doppelkollision oder in einer Dreierkollision. In diesen Kollisionspunkten hat das durch die Gradienten der Hamiltonfunktion gegebene Vektorfeld Singularitäten. Durch Übergang zu geeignete Koordinaten und durch eine geeignete Zeittransformation gelingt es, diese Singularitäten zu beseitigen: Doppelkollisionen werden durch den elastischen Stoß regularisiert; die durch konstante Energie gegebene Energiefläche wird in dem der Dreierkollision entsprechenden Punkt "aufgeblasen", so daß eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit C auf die Energiefläche aufgeklebt wird, die unter dem Vektorfeld invariant ist und die von tatsächlich vorkommenden Bahnen nicht in endlicher Zeit erreicht wird. Das gegebene Vektorfeld wird dabei so transformiert, daß es stetig auf C fortgesetzt werden kann.

2. G. WITTSTOCK : Der kollineare Dreierstoß. II. Die Kollisionsmannigfaltigkeit.

Auf der mit dem Rand der fiktiven Dreierstoßmannigfaltigkeit C versehenen Engergiefläche wird der Fluß untersucht und gezeigt, daß er genau zwei stationäre Punkte x_C^+ , x_C^- besitzt. Die Anwendung eines Satzes über dynamische Systeme liefert, daß die Dreierkollisionsorbits im Punkte x_C^- enden. Dabei werden einige Abschätzungen über den Fluß in der Nähe der Kollisionsmannigfaltigkeit C benötigt. Die Koordinaten von x_C^- können bestimmt werden und liefern asymptotische Aussagen für die Kollisionsorbits. Insbesondere ist die stabile Mannigfaltigkeit des Ruhepunktes eine zweidimensionale analytische Untermannigfaltigkeit der Energiefläche. Außerdem wird der Fluß auf dem Rand des isolierenden Blocks betrachtet, der im 3. Vortrag genauer studiert wird.

3. M. LINDNER : Der kollineare Dreierstoß. III. Nicht-regularisierbare Fälle

Um die Kollisionsmannigfaltigkeit C wird ein sog. isolierender Block gelegt, d.h. eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit, und dessen Rand betrachtet. Der Fluß definiert einen Homöomorphismus eines Teils des Randes auf sein Bild. Man nennt das Vektorfeld regularisierbar, wenn der Fluß auf den ganzen Rand homöomorph fortgesetzt werden kann. Es werden zwei Behauptungen bewiesen:

(i) Ist die unstabile Mannigfaltigkeit von x_C^- ungleich der stabilen Mannigfaltigkeit von x_C^+ , so ist keine Regularisierung möglich, da die Teilchen in der Nähe der Dreierkollision mit beliebig hoher Geschwindigkeit enteilen. Diese Behauptung folgt aus der Stetigkeit des Flusses und der Geometrie der Kollisionsmannigfaltigkeit in der Nähe der kritischen Punkte

(ii) Es gibt Massentripel $(m,\varepsilon m,m),\varepsilon>0$, für die dieser Zustand eintritt.

4. T.BRÜCKER und M. KNESER : Ein explodierendes kollineares Vierkörpersystem (2 Vorträge)

Folgender Satz von Mather und McGehee wird gezeigt: Man kann vier Massenpunkte so bestimmen, daß bei geeigneten Anfangswerten das nach den Newtonschen Gleichungen resultierende dynamische System nur für ein endliches Zeitintervall $[0,t^*)$ integrabel ist, ohne daß Dreierkollision auftritt. Zweierkollisionen werden vorher als elastischer Stoß regularisiert.

Im Zeitintervall $[0,t^*)$ entfernt sich der erste Massenpunkt mit wachsender Geschwindigkeit gegen $-\infty$, der dritte und vierte entfernen sich unter Zweierstößen wachsender Frequenz gegen $+\infty$, und der zweite Massenpunkt läuft zwischen dem ersten und dritten mit divergiererender Geschwindigkeit hin und her.

IV. Topologie und Mechanik

In diesem Vortragszyklus werden die Arbeiten von Smale über die Topologie des ebenen n-Körperproblems studiert.

1. H. SCHEERER: Topologie und Mechanik I

Es wird nach Arbeiten von Smale und Robbin ein mechanisches System (M,K,V,G) mit Symmetriegruppe G definiert. Dabei ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik $K:TM \to \mathbb{R}$, V eine Potentialfunktion, und G operiert auf M. Man hat eine Zweiform ω auf TM, welche nicht-entartet ist und definiert ein Vektorfeld X auf TM durch

$$i_X\omega = dE \qquad \text{mit } E = V + K \text{ (Gesamtenergie).}$$

Der allgemeine Drehimpuls J ist eine Abbildung $J:TM \to \mathfrak{g}^*$ wo $\mathfrak{g}^*$ der Dualraum der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G ist. Die Abbildung $I = E \times J$ ist invariant unter dem Vektorfeld X. Man will nun den topologischen bzw. differenzierbaren Typ von I studieren, d.h. man untersucht, welchen Typ die Mannigfaltigkeiten $I_{c,p} = I^{-1}(c,p)$ haben und für welche Werte von c,p die Abbildung I nicht lokal trivial ist. Die Menge dieser (c,p.) ist die Bifurkationsmenge Σ; in Σ enthalten ist die Menge der kritischen Punkte Σ' von I.

Zur Bestimmung von Σ' wird der Begriff "relatives Gleichgewicht" eingeführt. Ein solches ist ein Punkt $v \in TM$, wo die Integralkurve von X so erhalten werden kann, daß man v durch eine 1-Parametergruppe von G bewegt. Dann gilt:

(i) Ist $\dot{v}$ kritischer Punkt von I und nicht von J, so ist v relatives Gleichgewicht.

(ii)Ist v relatives Gleichgewicht, so ist $\dot{v}$ kritischer Punkt von I.

Die kritischen Punkte von I berechnen sich auch mit Hilfe von korrigierten Potentialen, für die im planaren n-Körperproblem (SO(2)-Symmetrie) explizite Formeln angegeben werden.

2. D. SIERSMA: Topologie und Mechanik II

Im planaren n-Körperproblem wird der topologische Typ von $I_{c,p}$ weiter untersucht. Im Falle $c<0$ und $p \neq 0$ braucht man dazu nur die genaue Kenntnis der kritischen Punkte und kritischen Werte von $l_p(z) = -(V(pz))^2$ mit $z \in S_K$ wo S_K die Einheitssphäre in M bezgl. der K-Metrik ist. In den übrigen Fällen bestimmt (c,p) schon $I_{c,p}$.

Satz 1. Die Menge der kritischen Werte ist gegeben durch

$$\Sigma' = \{(c,p) \mid c = l_p(z) \text{ und } z \text{ krit.Wert von } l_p\}$$

Dabei ist $c = l_p(z) \Leftrightarrow p^2 z = -(V(z))^2$

Satz 2. Sei $z \in S_K$. Dann sind äquivalent:

(i) z ist kritischer Punkt von l_p ,

(ii) z ist kritischer Punkt von $V|S_K$,

(iii) Es gibt ein v, so daß (z,v) ein relatives Gleichgewicht ist

(iv) Es gibt ein v, so daß (z,v) kritischer Punkt von $E \times J$ ist.

Satz 3. Die Bifurkationsmenge ist gegeben durch

$$\Sigma = \Sigma' \cup \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$$

Als Beispiel werden das Zwei- und Dreikörperproblem im Detail vorgeführt.

K. Goldhorn (Mainz)